МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

МАТЕМАТИКА

Решение задач по геометрии с применением тригонометрии

КУЙБЫШЕВ 1983

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

М А Т Е М А Т И К А

Решение задач по геометрии
с применением тригонометрии

Утверждено редакционным
советом института
в качестве методических
указаний

Куйбышев 1983

УДК 5I4 (075)

Настоящие методические указания предназначаются для слушателей подготовительного отделения и имеют цель всесторонне подготовить их как к выпускным экзаменам, так и для дальнейшей учебы в Куйбышевском авиационном институте.

Указания составлены в соответствии с программой по математике для подготовительного отделения и содержат обширный перечень упражнений по данному разделу.

Составитель - Н.В. Н о в и к о в а

Рецензенты: доц. В.Г. Г у л и р о в, доц. А.В. З и н ч е н к о

ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При решении геометрических задач необходимо знать :

I. Понятия и свойства плоских и пространственных фигур (треугольника, параллелограмма, призмы, конуса и др.), соотношения между их элементами.

2. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых, плоскостей , прямой и плоскости и др. теоремы.

3. Формулы для вычисления площадей и объемов фигур.

Треугольник

I. Основные линии в треугольнике : биссектриса, медиана, высота, серединный перпендикуляр к стороне, средняя линия треугольника.

2. Во всяком треугольнике все высоты пересекаются в одной точке; все медианы пересекаются в одной точке, и эта точка делит их длины в отношении 2:I, считая от вершины; все серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке; все биссектрисы пересекаются в одной тöчке.

3. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине.

4. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны; высота, проведенная из вершины, является медианой и биссектрисой.

5. В равностороннем (правильном) треугольнике все четыре линии: высота, биссектриса, медиана и серединный перпендикуляр, проведенные к одной стороне, совпадают.

6. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис углов.

7. Около всякого треугольника можно описать окружность; центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

8. В равнобедренном треугольнике центры вписанной и описанной окружностей находятся на высоте, опущенной из вершины треугольника, но не совпадают.

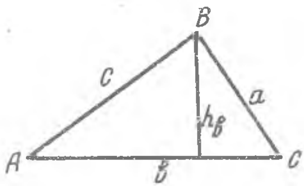
9. Только в правильном треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Причем, справедливо соотношение $R=2r$, где R и r – длины радиусов соответственно описанной и вписанной окружностей.

10. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности – середина гипотенузы.

11. Если a – длина стороны правильного треугольника, то справедливы соотношения $a=R\sqrt{3}$, $a=2r\sqrt{3}$.

12. Т е о р е м а к о с и н у с о в. Во всяком треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A},$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B},$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \text{ (рис.1)}.$$



Р и с. I

13. Т е о р е м а П и ф а г о р а. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

14. Т е о р е м а с и н у с о в. Во всяком треугольнике отношение стороны к синусу противолежащего угла – величина постоянная для данного треугольника, равная диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R.$$

15. Формулы для вычисления площади треугольника (см. рис. I):

$$S_\Delta=\frac{1}{2}bh_b; \qquad (1)$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}, \qquad (2)$$

если $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, то

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (3)$$

Формулу (3) называют формулой Герона;

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}; \qquad (4)$$

$$S_\Delta = pr. \qquad (5)$$

Для прямоугольного треугольника

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab, \qquad (6)$$

где a и b - катеты.

Для правильного треугольника

$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad (7)$$

где a - сторона.

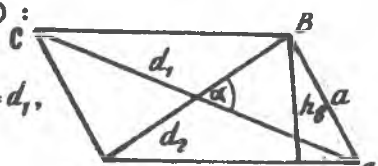
<u>Параллелограмм и его виды</u>

I. В параллелограмме точка пересечения диагоналей является центром симметрии, отсюда следует: противоположные стороны равны; противоположные углы равны; диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

Площадь параллелограмма (рис. 2):

если $|AB| = a$, $|AD| = b$,

$[BF] \perp [AD]$, $|BF| = h_b$, $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$, α - угол между диагоналями, то



Р и с. 2

$$S = bh_b; \qquad (8)$$

$$S = ab\sin\hat{A}; \qquad (9)$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha. \qquad (10)$$

2. В прямоугольнике диагонали равны. Площадь прямоугольника :

$$S = ab \qquad (a \text{ и } b \text{ -стороны}), \qquad (11)$$

$$S = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha \qquad (d \text{ - диагональ}), \qquad (12)$$

3. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам. Площадь ромба может быть вычислена по формуле (8), а также по формулам

$$S = a^2 \sin \hat{A} \qquad (a \text{ - сторона}), \qquad (13)$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \qquad (d_1 \text{ и } d_2 \text{ - диагонали}) \qquad (14)$$

4. Сторона квадрата $a = R\sqrt{2}$.

Площадь квадрата

$$S = a^2 , \qquad (15)$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \qquad (d \text{ - диагональ}). \qquad (16)$$

Трапеция

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Площадь трапеции :

$$S = \frac{a+b}{2} h , \qquad (17)$$

где a и b - основания, h - высота.

Вписанные и описанные четырехугольники

1. В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.
2. Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180 градусам.

Длина окружности и площадь круга

Определение. За длину окружности принимается предел последовательности периметров правильного вписанного (описанного) многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон.

Длина окружности вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R , \qquad (18)$$

где R - радиус окружности.

Определение площади круга дается аналогично.
Площадь круга вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2. \qquad (19)$$

Соотношения в прямоугольном треугольнике между сторонами и тригонометрическими функциями острого угла

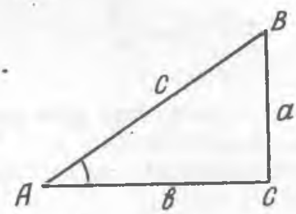
Из рис. 3 имеем :

$$\frac{a}{c} = \sin\hat{A} \Rightarrow a = c\sin\hat{A},\ c = \frac{a}{\sin\hat{A}}.$$

$$\frac{b}{c} = \cos\hat{A} \Rightarrow b = c\cos\hat{A},\ c = \frac{b}{\cos\hat{A}}.$$

$$\frac{a}{b} = tg\,\hat{A} \Rightarrow a = b\,tg\,\hat{A},\ b = \frac{a}{tg\,\hat{A}}.$$

$$\frac{b}{a} = ctg\,\hat{A} \Rightarrow b = a\,ctg\,\hat{A},\ a = \frac{b}{ctg\,\hat{A}}.$$



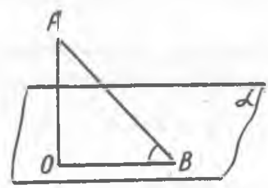
Р и с. 3

Замечания по стереометрии

Особое внимание при решении задач следует уделить построению чертежа. Необходимо знать понятие угла прямой с плоскостью и двугранного угла.

О п р е д е л е н и е I. Углом между прямой (наклонной) и плоскостью называется острый угол, образованный этой прямой с ее проекцией на плоскость.

Пусть на рис. 4 (AB) - наклонная к плоскости α, $[AO]\perp\alpha$, значит, $[OB]$ - проекция $[AB]$ на плоскость α, тогда $\widehat{ABO}$ - угол прямой AB с плоскостью α.



Р и с. 4

О п р е д е л е н и е 2. Пересечение двух полупространств, границами которых служат непараллельные плоскости, называется д в у г р а н н ы м у г л о м.

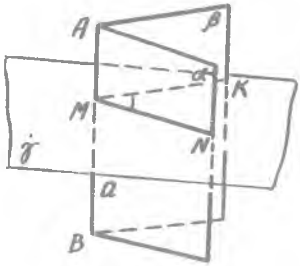


Рис. 5

Двугранный угол обозначается $\angle \alpha a \beta$ или кратко $\angle AB$ (рис. 5). Пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной к его ребру, называется линейным углом двугранного угла.

$\gamma \cap \angle \alpha a \beta = \angle KMN$ – линейный угол (здесь $\gamma \perp (AB)$).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла, т. е. $\widehat{\alpha a \beta} = \widehat{KMN}$.

Стороны линейного угла перпендикулярны ребру двугранного угла, т.е.
$[MK) \perp (AB)$ и $[MN) \perp (AB)$.

Полезно помнить :

1. Если все боковые ребра пирамиды равны или наклонены под равными углами к плоскости основания, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

2. Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под равными углами, то высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

3. Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под равными углами и в пирамиду вписан шар, то центр шара находится в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании (причем одна сторона линейного угла должна быть высотой боковой грани пирамиды).

Формулы для вычисления площадей поверхностей и объемов многогранников и круглых тел

1. Определение. Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей его граней.

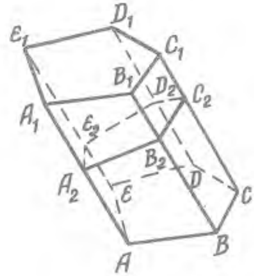
2. Для призмы

$$S_{пр} = S_{бок} + 2S_{осн} , \qquad (20)$$

где $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности призмы.

3. Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро (рис.6).

Многоугольник $A_2B_2C_2D_2E_2$, полученный от пересечения плоскости, перпендикулярной к боковому ребру, с боковыми гранями, называется п е р п е н д и к у л я р н ы м с е ч е н и е м.



Р и с. 6

4. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту :

$$S_{бок} = Ph, \tag{21}$$

где P – периметр основания, h – высота призмы.

5. Для пирамиды

$$S_{пир} = S_{бок} + S_{осн}. \tag{22}$$

6. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды, т.е.

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P h_{бок}, \tag{23}$$

где P – периметр основания, $h_{бок}$ – апофема правильной пирамиды.

7. Если все боковые грани пирамиды наклонены к основанию под равными углами α, то

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}. \tag{24}$$

8. Объем призмы равен произведению площади основания на высоту, т.е.

$$V = S_{осн} h. \tag{25}$$

9. Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, т.е.

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h. \tag{26}$$

10. О п р е д е л е н и е. Фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется ц и л и н д р о м.

Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{бок} = 2\pi RH. \tag{27}$$

Площадь полной поверхности цилиндра

$$S_{цил} = 2\pi RH + 2\pi R^2. \tag{28}$$

Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H, \tag{29}$$

где в формулах (27), (28) и (29) R - радиус основания, H - высота цилиндра.

II. О п р е д е л е н и е. Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет, называется к о н у с о м .

Площадь боковой поверхности конуса

$$S_{бок} = \pi R L, \tag{30}$$

площадь полной поверхности конуса

$$S_{кон} = \pi R L + \pi R^2, \tag{31}$$

объем конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \tag{32}$$

где в формулах (30), (31), (32) R - радиус основания, L - - образующая, H - высота конуса.

I2. О п р е д е л е н и е I. Множество всех точек пространства, равноудаленных от данной точки, называется с ф е р о й.

О п р е д е л е н и е 2. Фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр, называется ш а р о м .

Площадь сферы

$$S = 4 \pi R^2. \tag{33}$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \tag{34}$$

где в формулах (33) и (34) R - радиус сферы и шара.

З А Д А Ч И   С   Р Е Ш Е Н И Я М И

Планиметрия

З а д а ч а I. Площадь равнобедренного треугольника Q, угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием α. Найти площадь круга, вписанного в треугольник.

Дано (рис. 7) : $\Delta ABC,\ |AB| = |BC|$,

$[AD] \perp [BC],\ D\hat{A}C = \alpha,\ S_\Delta = Q$.

Найти $S_{кр}$.

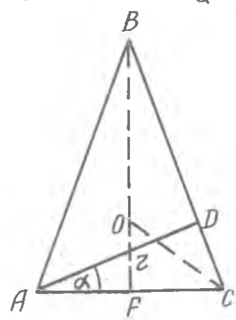


Рис. 7

Р е ш е н и е . Центр вписанной окружности находится на высоте BF в точке пересечения ее бисссектрисой другого угла, например, с OC. Обозначим радиус круга $|OF| = z$.

В ΔADC $A\hat{C}D = 90° - \alpha \Rightarrow O\hat{C}F = 45° - \frac{\alpha}{2}$.

Из ΔBFC : $|BF| = |CF|\, tg(90° - \alpha) = |CF|\, ctg\alpha$.

Из ΔOCF : $|CF| = z\, ctg(45° - \frac{\alpha}{2})$.

$S_\Delta = \frac{1}{2}|AC||BF|$, т.е.

$Q = |CF|^2 ctg\alpha$ или

$Q = z^2 ctg^2(45° - \frac{\alpha}{2})\, ctg\alpha$,

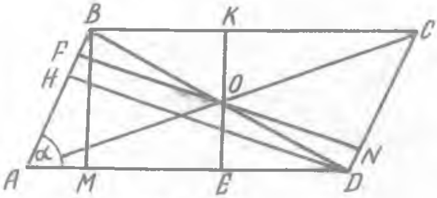
$$z^2 = \frac{Q}{ctg^2(45° - \frac{\alpha}{2})\, ctg\alpha} = Q\, tg^2(45° - \frac{\alpha}{2})\, tg\alpha .$$

Согласно формуле (I9), площадь вписанного круга
$S = \pi Q\, tg^2(45° - \frac{\alpha}{2})\, tg\alpha$.

З а д а ч а 2. В параллелограмме дан острый угол α и расстояния m и p от точки пересечения диагоналей до неравных сторон. Определить диагонали и площадь параллелограмма. Вычислить их при m = I см, p = 2 см и $\alpha = 60^0$ (Δ = 0,I)

Дано (рис. 8) : $\square ABCD$ – параллелограмм, $\widehat{BAD}=\alpha$, $[OK]\perp[BC]$, $[ON]\perp[CD]$, $|OK|=m$, $|ON|=p$.

Найти : $|BD|$, $|AC|$, $S_{парал.}$



Р и с. 8

Р е ш е н и е . Точка пересечения диагоналей является центром симметрии; значит, $|KE|=2m$ и $|FN|=2p$. Определим стороны параллелограмма. Проведем $[BM]\perp[AD]$ и $[DH]\perp[AB]$,

$|BM|=2m$, $|DH|=2p$.

Из ΔABM : $\quad |AB|=\dfrac{|BM|}{\sin\alpha}=\dfrac{2m}{\sin\alpha}$.

Из ΔADH : $\quad |AD|=\dfrac{|DH|}{\sin\alpha}=\dfrac{2p}{\sin\alpha}$.

По теореме косинусов находим диагонали параллелограмма :

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB||AD|\cos\alpha, \qquad (35)$$

$$|AC|^2=|CD|^2+|AD|^2-2|CD||AD|\cos(180^\circ-\alpha). \qquad (36)$$

Из выражений (35) и (36) имеем

$$|BD|=\sqrt{\frac{4m^2}{\sin^2\alpha}+\frac{4p^2}{\sin^2\alpha}-\frac{8mp}{\sin^2\alpha}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+p^2-2mp\cos\alpha} \quad ;$$

$$|AC|=\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+p^2+2mp\cos\alpha} \, .$$

Площадь параллелограмма , согласно формуле (9), равна

$$S = |AB||AD| \sin\alpha = \frac{4mp}{\sin\alpha}.$$

При данных m, p и α

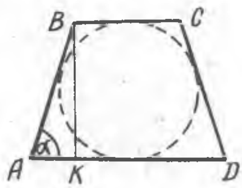
$$|BD| = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{1+4-4\frac{1}{2}} = 4\,(см); \quad |AC| = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{7} \approx 4 \cdot 1{,}53 \approx 6{,}1\,(см);$$

$$S = \frac{16}{\sqrt{3}} \approx 9{,}2\,(см^2).$$

З а д а ч а 3. Определить площадь равнобедренной трапеции с острым углом α, если длина окружности, вписанной в эту трапецию, равна C. Вычислить площадь трапеции при $\alpha = 30°$ и $C = 2\pi$.

Дано (рис. 9) : $\square ABCD$ – трапеция, $|AB| = |CD|$, $\widehat{BAD} = \alpha$, окружность вписана в трапецию с длиной C.

Найти S трапеции.



Р и с. 9

Р е ш е н и е: $S = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)|BK|$,

где $[BK] \perp [AD]$.

По свойству описанного четырехугольника имеем, что

$$|AD| + |BC| = |AB| + |CD| = 2|AB|.$$

Обозначив радиус окружности r, имеем $C = 2\pi r$, но

$$|BK| = 2r = \frac{C}{\pi}.$$

Из $\Delta ABK : |AB| = \frac{|BK|}{\sin\alpha} = \frac{C}{\pi \sin\alpha}$.

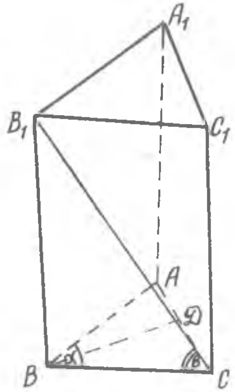
Тогда $S = |AB||BK| = \frac{C^2}{\pi^2 \sin\alpha}$.

При данных α и C

$$S = \frac{(2\pi)^2}{\pi^2 \sin 30°} = 8.$$

Стереометрия

З а д а ч а 4. Равнобедренный треугольник с углом α при вершине и основанием b является основанием прямой призмы. Диагональ одной из равных боковых граней наклонена к плоскости основания под углом β. Определить площадь боковой поверхности и площадь основания призмы.



Р и с. 10

Дано (рис. 10) : $ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма, $|AB| = |BC|$, $\widehat{ABC} = \alpha$, $|AC| = b$, $B_1\widehat{C}B = \beta$.

Найти $S_{бок}$ и $S_{осн}$.

Пояснения к чертежу :
Равными боковыми гранями являются прямоугольники AA_1B_1B и BCC_1B_1, проходящие через равные стороны AB и BC. Проекцией диагонали $[B_1C]$ является $[BC]$, так как $[B_1B] \perp (ABC)$. Поэтому $\angle B_1CB$ является углом прямой B_1C с плоскостью основания и $B_1\widehat{C}B = \beta$.

Р е ш е н и е : согласно формуле (21), $S_{бок} = Ph$, где P – периметр основания, h – высота призмы. Проведем $[BD] \perp [AC] \Rightarrow [BD]$ – медиана и биссектриса.

Из $\Delta BDC : \dfrac{|CD|}{|BC|} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, $|CD| = \dfrac{b}{2}$,

откуда $|BC| = \dfrac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Из

$$\Delta BB_1C : h = |BB_1| = |BC|\operatorname{tg}\beta = \frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

тогда

$$S_{бок} = \left(b + \frac{b}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\frac{b\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2(1+\sin\frac{\alpha}{2})\operatorname{tg}\beta}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad (кв. ед.).$$

Согласно формуле (2), площадь основания

$S_{осн} = \dfrac{1}{2}|AB||BC|\sin\alpha$,

или

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\,\frac{b^2\sin\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

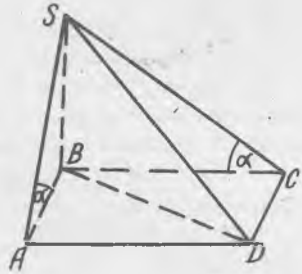
З а д а ч а 5. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани ее перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом $\alpha = 45°$. Среднее по величине боковое ребро $l = 6$. Вычислить объем пирамиды ($\Delta = 0,1$).

Дано (рис. II) : $SABCD$ - пирамида,
$\square ABCD$- квадрат,

$$\left.\begin{matrix}(ASB)\perp(ABCD)\\(BSC)\perp(ABCD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(SB)\perp(ABCD)$$

$$S\hat{A}B=S\hat{C}B=\alpha=45^\circ,$$
$$|AS|=|SC|=\ell=6.$$

Найти V.



Р и с. II

Пояснение к чертежу :
Проекцией $[AS]$ на плоскость $ABCD$ является $[AB]$, причем, по условию, $[AB]\perp[AD]$, тогда $[AS]\perp[AD]$ по теореме о трех перпендикулярах. Значит, $\angle S\hat{A}B$ является линейным углом двугранного угла $SADB$ и поэтому $S\hat{A}B=\alpha=45^\circ$. Аналогично, $S\hat{C}B=\alpha=45^\circ$. $|AS|=|SC|=\ell$, как наклонные с равными проекциями; $|SD|>|SC|$, так как ее проекция $|BD|>|AB|$. SB - наименьшее по длине боковое ребро и является высотой пирамиды.

Р е ш е н и е : согласно формуле (26), $V=\frac{1}{3}S_{осн}\,h$.

Из ΔASB : $h=|SB|=|AS|\sin\alpha=\ell\sin\alpha=6\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

Так как $\alpha=45^\circ$, то $|SB|=|AB|$, значит, $|AB|=3\sqrt{2}$.

Поэтому $S_{осн}=|AB|^2=(3\sqrt{2})^2=18$.

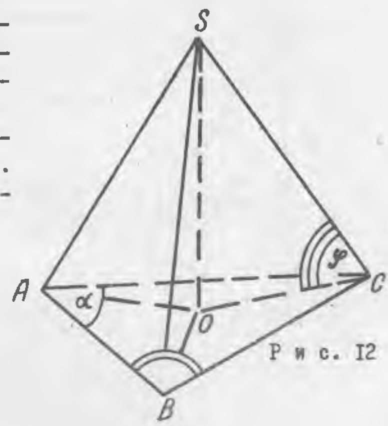
$$V=\frac{1}{3}\,18\cdot3\sqrt{2}\approx18\cdot1{,}41\approx25{,}4\ (куб.\ ед.).$$

З а д а ч а 6. Основанием пирамиды служит треугольник с углами $\alpha=60^\circ$ и $\beta=45^\circ$. Высота пирамиды $H=3\,см$. Угол между каждым боковым ребром и плоскостью основания $\varphi=60^\circ$. Вычислить объем пирамиды. ($\Delta=0{,}1$).

Дано (рис. I2) : $SABC$ - пирамида,

$C\hat{A}B=\alpha=60^\circ$, $A\hat{B}C=\beta=45^\circ$,
$[SO]\perp(ABC)$, $|SO|=H=3\,см$,
$S\hat{A}O=S\hat{C}O=S\hat{B}O=\varphi=60^\circ$.

Найти V .



Р и с. I2

5-2069

Пояснения к чертежу :

$[AO]$, $[BO]$, $[OC]$ — проекции наклонных $[AS]$, $[BS]$ и $[CS]$ на плоскость основания, поэтому углы наклона боковых ребер к плоскости основания : $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \varphi = 60^\circ$. Отсюда следует, что высота $[SO]$ пройдет через центр O окружности, описанной около ΔABC. Значит, $|AO| = |BO| = |CO| = R$ — радиусу описанной окружности.

Решение: из ΔCSO имеем $\dfrac{|OC|}{|OS|} = ctg\,\varphi$, откуда $|OC| = H ctg\,\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (см).

По теореме синусов имеем

$$\frac{|AB|}{\sin\hat{C}} = \frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\hat{A}} = 2R, \text{ отсюда:}$$

$$|AC| = 2R\sin\hat{B} = 2\sqrt{3}\sin 45^\circ = \sqrt{6} \text{ (см)}.$$

$$|BC| = 2R\sin\hat{A} = 2\sqrt{3}\sin 60^\circ = 3 \text{ (см)}.$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|AC||BC|\sin\hat{C} = \frac{1}{2}3\sqrt{6}\sin 75^\circ.$$

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,3\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\,3 = \frac{3}{8}(2\sqrt{3}+6) \approx \frac{3}{8}9{,}46 \approx 3{,}5 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Задача 7. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна b. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен β. Определить площадь полной поверхности и высоту конуса.

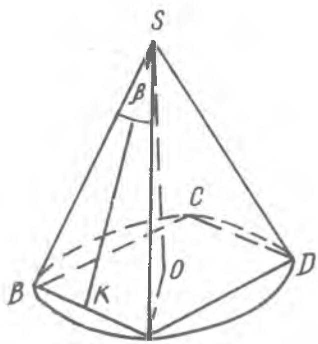


Рис. 13

Дано (рис. 13) : конус с вершиной S, в основание которого вписан квадрат $ABCD$, $|AB| = b$, $\widehat{ASB} = \beta$, $[SO] \perp (ABCD)$.

Найти $S_{кон}$ и $|SO|$.

Р е ш е н и е : в $\Delta SAB: |AS| = |BS|$ - как образующие конуса. Согласно формуле (3I), $S_{кон} = \pi RL + \pi R^2$, где R - радиус основания, L - образующая конуса. Сторона вписанного квадрата $|AB| = R\sqrt{2}$, отсюда $R = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Проведем $[SK] \perp [AB] \Rightarrow [SK]$ - медиана и биссектриса.

Из ΔASK : $L = |AS| = \frac{b}{2} : \sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}$.

Значит

$$S_{кон} = \frac{\pi b^2}{2\sqrt{2}\sin\beta/2} + \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi b^2}{2\sin\beta/2}\left(\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

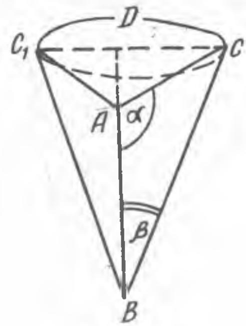
Из ΔASO по теореме Пифагора

$$H = |SO| = \sqrt{|AS|^2 - |AO|^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4\sin^2\frac{\beta}{2}} - \frac{b^2}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}} =$$
$$= \frac{b\sqrt{\cos\beta}}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

З а д а ч а 8. ΔABC, у которого угол при вершине A тупой и равен α, угол при вершине B равен β, вращается вокруг стороны AB, равной C. Определить объем тела вращения.

Дано (рис. I4) : ΔABC вращается вокруг (AB), $\hat{CAB} = \alpha$ - тупой, $\hat{ABC} = \beta$, $|AB| = C$.

Найти V тела вращения.



Р и с. I4

Р е ш е н и е : при вращении получается тело, представляющее собой разность конусов с общим основанием радиуса $[CD]$ и высотами $[BD]$ и $[AD]$, поэтому

$$V_{т.вр} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi|CD|^2(|BD| - |AD|) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi|CD|^2|AB|.$$

Из ΔABC по теореме синусов :

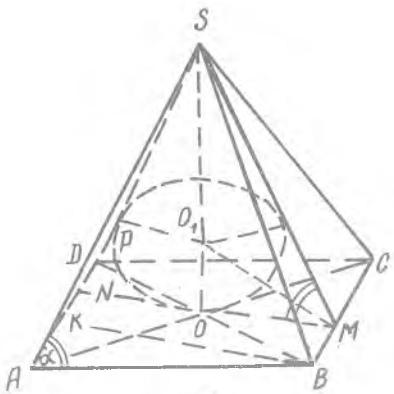
$$\frac{|BC|}{\sin\hat{A}} = \frac{|AB|}{\sin\hat{C}},\ \hat{C} = 180^\circ - (\alpha + \beta),\ \sin\hat{C} = \sin(\alpha + \beta),$$

тогда $|BC| = \frac{C\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Из $\Delta BCD: |CD| = |BC|\sin\beta = \frac{C\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Тогда $V_{т.вр} = \frac{1}{3}\pi\,\frac{C^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

З а д а ч а 9. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α, двугранные углы при основании равны φ. Определить площадь полной поверхности пирамиды, если радиус шара, вписанного в эту пирамиду, равен r. Вычислить искомую площадь при $r = 2см$, $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.



Р и с. I5

Дано (рис. I5) : $SABCD$ – пирамида, $\square\, ABCD$ – ромб, $\widehat{BAD} = \alpha$, $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \varphi$, $|OO_1| = r$ – радиус вписанного шара.

Найти $S_{пир}$.

Пояснения к чертежу :

Высота пирамиды $[SO]$ пройдет через центр вписанной окружности в ромб, так как все боковые грани наклонены под одним углом φ, т.е. пройдет через точку пересечения диагоналей.

Проведем $[SM] \perp [BC]$, тогда $[OM] \perp [BC]$ по теореме о трех перпендикулярах, так как $[OM]$ – проекция $[SM]$ на плоскость основания. Следовательно, $\angle SMO$ – линейный угол двугранного угла боковой грани SBC и плоскости основания. Продолжив $[OM]$ до пересечения с $[AD]$ в точке N и соединив N с S, получим $\angle SNO$ – линейный угол двугранного угла боковой грани ASD и плоскости основания ($[NO] \perp [AD] \Longrightarrow [SN] \perp [AD]$, так как $[NO]$ – проекция $[SN]$ на плоскость основания).

Центр вписанного шара находится в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла SMO, т.е. $\widehat{O_1MO} = \frac{\varphi}{2}$.

Р е ш е н и е : согласно формуле (22), $S_{пир} = S_{бок} + S_{осн}$.

Из $\Delta\, OO_1M$: $|OM| = |OO_1| \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = r \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

$[OM]$ является половиной высоты ромба (точка пересечения диагоналей - центр симметрии), значит $|BK| = 2|OM| = 2r \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ ($[BK] \perp [AD]$ по построению).

Из $\Delta\, ABK$: $|AB| = \frac{|BK|}{\sin\alpha} = \frac{2r \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$.

Согласно формуле (I3), $S_{осн} = |AB|^2 \sin\alpha = \frac{4r^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$.

По формуле (24) $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$. $S_{пир} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi} + S_{осн} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}(1+$ $+\cos\varphi) = \frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} S_{осн}$, значит. $S_{пир} = \frac{8r^2 ctg^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha\cos\varphi}$ (кв.ед).

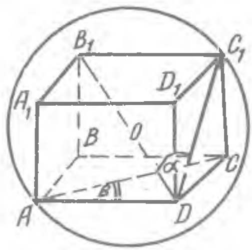
При данных $r = 2$ см, $\alpha = 30°$ и $\varphi = 60°$

$S_{пир} = \frac{8\cdot 4\, ctg^2 30° \cos^2 30°}{\sin 30° \cos 60°} = 288$ (кв.см).

З а д а ч а 10. В шар радиусом R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей боковой гранью угол α, диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда.

Дано (рис. 16) : AC_1 – прямоугольный параллелепипед вписан в шар радиусом R. В прямоугольнике $ABCD$, $[AD]$ – большая сторона, $C\hat{A}D = \beta$, $C_1\hat{D}B_1 = \alpha$.

Найти $S_{бок}$.



Р и с. 16

Пояснения к чертежу :

CC_1D_1D – меньшая боковая грань параллелепипеда, так как проходит через меньшую сторону основания; $[B_1C_1] \perp$ плоскости C_1CDD_1, так как параллелепипед прямоугольный, отсюда $[C_1D]$ является проекцией $[B_1D]$ на боковую грань CC_1D_1D, а поэтому $\angle B_1DC_1$ – угол прямой B_1D и плоскости CC_1D_1D, т.е. $B_1\hat{D}C_1 = \alpha$.

Диагональ параллелепипеда $[B_1D]$ является диаметром шара, поэтому центр O находится в середине $[B_1D]$.

Р е ш е н и е : согласно формуле (21), $S_{бок} = Ph = 2(|AD| + |DC|)\,|CC_1|$.

Из $\triangle B_1DC_1$: $|B_1C_1| = |B_1D|\sin\alpha = 2R\sin\alpha$.

Из $\triangle ADC$: $|CD| = |AD|\, tg\,\beta = 2R\sin\alpha\, tg\,\beta$.

Из $\triangle B_1DC_1$ $|C_1D| = |B_1D|\cos\alpha = 2R\cos\alpha$.

Из $\triangle CC_1D$ по теореме Пифагора : $|CC_1| = \sqrt{|C_1D|^2 - |CD|^2} =$
$= \sqrt{(2R\cos\alpha)^2 - (2R\sin\alpha\, tg\,\beta)^2} = 2R\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\, tg^2\beta}$.

Тогда $S_{бок} = 2(2R\sin\alpha + 2R\sin\alpha\, tg\,\beta)2R\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\, tg^2\beta} =$
$= 8R^2\sin\alpha(1 + tg\,\beta)\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\, tg^2\beta}$.

З А Д А Ч И

П л а н и м е т р и я

1. В равнобедренном треугольнике основание равно $30 см$, а высота $20 см$. Определить высоту, опущенную на боковую сторону.

2. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на боковую сторону, равна h и образует угол α с основанием треугольника. Вычислить искомую площадь при $h = 5 см$ и $\alpha = 15°$.

3. Найти квадрат стороны ромба, если она равна меньшей диагонали его, а площадь ромба равна площади круга радиусом R. Вычислить искомую величину с точностью до 0,1 при $R = 1 дм$.

4. Определить площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиусом R. Вычислить искомую площадь при $R = 2 см$ с точностью до $0,1$.

5. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами α, радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь треугольника.

6. В прямоугольный треугольник вписан круг. Найти отношение площадей треугольника и круга, если один из острых углов треугольника равен α. Вычислить искомое отношение при $\alpha = 60°$.

7. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника. Вычислить искомую площадь при $H = 2 см$ с точностью до 0,1.

8. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна ℓ , угол при вершине равен α . Найти боковую сторону.

9. Определить площадь правильного описанного треугольника, если радиус круга равен r . Вычислить искомую площадь при $r=1см$ с точностью до 0,1.

10. В равнобедренном треугольнике основание равно a , а угол при вершине равен α . Найти длину вписанной окружности и площадь соответствующего круга.

11. В прямоугольный треугольник, гипотенуза которого c , а один из острых углов α , вписан круг. Найти длину окружности этого круга. Вычислить искомую длину при $\alpha=60°$, $c=4см$ с точностью до 0,1.

12. В круг, радиус которого равен $R=\sqrt{6}$, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Определить радиус окружности, описанной около квадрата.

13. Определить длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника с острым углом α и площадью S . Вычислить искомую длину при $\alpha=15°$ и $S=4см^2$.

14. Стороны треугольника $a=13$, $b=14$, $c=15$. Две из них a и b служат касательными к окружности, центр которой лежит на третьей стороне. Определить радиус этой окружности.

15. Дан равнобедренный треугольник с основанием $2a=6см$ и высотой $h=4см$. Определить длину окружности, вписанной в треугольник.

16. В прямоугольной трапеции острый угол при основании равен $30°$, сумма оснований равна m , а сумма боковых сторон равна n , Найти площадь трапеции.

17. Определить периметр равнобочной трапеции, если острый угол её α , а радиус вписанного круга R .

18. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна Q . Определить боковую сторону этой трапеции, если острый угол при основании равен $30°$.

19. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большим основанием острые углы α и β . Найти площадь круга, если площадь трапеции равна Q .

20. Найти площадь ΔABC, если $|AC|=a$, угол при вершине A равен φ, а при вершине C равен α. Вычислить искомую площадь при $\alpha=45°$, $\varphi=30°$, $a=4см$ с точностью до 0,1.

21. Определить площадь равнобедренной трапеции, диагональ которой равна a и составляет с основанием угол α. Вычислить эту площадь при $a=4см$ и $\alpha=15°$.

22. Определить острый угол ромба, в котором сторона есть средняя пропорциональная между диагоналями.

23. В круг вписан прямоугольник, одна из сторон которого стягивает дугу в $150°$. Найти площадь прямоугольника, если радиус круга равен 5 см.

24. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом α (острым). Найти стороны прямоугольника, если площадь его Q.

25. Около круга радиуса r описан ромб с острым углом α. Определить площадь ромба. Вычислить эту площадь при $r=3см$ и $\alpha=30°$.

Многогранники

26. Высота правильной треугольной призмы равна H. Через одно из ребер нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость. Найти площадь сечения, если угол при заданной вершине призмы равен α.

27. Диагональ прямоугольного параллелепипеда и диагональ его боковой грани образуют с основанием углы α и β. Найти объем параллелепипеда, если его высота равна H. Вычислить этот объем при $H=3см$, $\alpha=30°$, $\beta=60°$ с точностью до 0,1.

28. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Сумма диагоналей ромба равна m. Найти объем призмы.

29. Основанием прямой призмы служит прямоугольник. Определить объем призмы, если диагональ призмы равна d и составляет с боковыми гранями углы α и β.

30. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда $a=4см$ и $b=3см$. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол $\alpha=60°$. Определить площадь боковой поверхности с точностью до 0,1.

31. Сторона основания правильной треугольной призмы равна $4 см$. Диагональ боковой грани образует с боковым ребром угол $\alpha = 60°$. Найти объем призмы.

32. Диагональ правильной четырехугольной призмы $d = 3см$ и образует с боковой гранью угол $\alpha = 30°$. Найти объем призмы с точностью до 0,1.

33. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого $d = 2 дм$ и составляет с плоскостью основания угол $\alpha = 45°$, а с большей боковой гранью угол $\beta = 30°$. Вычислить с точностью до 0,1.

34. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол $\alpha = 30°$, а сторона основания $a = 4 см$ (вычислить с точностью до 0,1).

35. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен α. Определить площадь боковой поверхности призмы, если сторона основания равна a. Вычислить искомую площадь при $a = 2см$ и $\alpha = 30°$ с точностью до 0,1.

36. В прямбугольном параллелепипеде диагональ основания d и составляет с большей стороной основания угол α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, которая наклонена под углом β к основанию. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда. Вычислить искомую площадь при $d = 4см$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ с точностью до 0,1.

37. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом α. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Определить объем параллелепипеда.

38. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β. Высота параллелепипеда равна H. Определить объем параллелепипеда.

39. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани по прямым, угол между которыми равен α. Определить объем призмы, если сторона основания равна a.

40. Определить площадь боковой поверхности прямой призмы, у которой в основании лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании и периметром $2p$. Через основание этого треугольника и конец противоположного ребра призмы проведено сечение. Угол при основании этого сечения равен β.

41. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ боковой грани параллелепипеда равна d и образует с диагональю основания, которую пересекает, угол α. Найти объем параллелепипеда и вычислить его при $\alpha=60^\circ$ и $d=4см$ с точностью до 0,1.

42. Основанием прямой призмы является ΔABC, у которого $|AC|=b$, $|BC|=a$ и угол $\hat{ACB}=\alpha$. Боковое ребро равно высоте ΔABC, проведенной из вершины C. Определить объем призмы и вычислить его при $a=4см$, $b=2{,}5см$, $\alpha=60^\circ$.

43. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник. Каждая из диагоналей двух равных боковых граней равна d и составляет с плоскостью основания угол α. Между собой эти диагонали образуют угол β. Найти объем призмы.

44. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды $m=3\,см$ и наклонено к плоскости основания под углом $\alpha=60^\circ$. Найти объем пирамиды с точностью до 0,1.

45. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее боковая грань образует с плоскостью основания угол $\alpha=60^\circ$, а высота $h=3см$ (с точностью до 0,1).

46. В правильной треугольной пирамиде высота $h=2см$ и боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\alpha=30^\circ$. Найти объем пирамиды с точностью до 0,1.

47. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $a=4см$ и составляет угол $\alpha=30^\circ$ с боковым ребром пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды с точностью до 0,1.

48. Найти площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой $a=2см$, а двугранный угол при основании $\alpha=60^\circ$ (с точностью до 0,1).

49. В правильной четырехугольной пирамиде высота $h=4см$ и боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\alpha=60^\circ$. Определить площадь полной поверхности пирамиды.

50. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S и плоский угол при вершине α. Найти объем пирамиды.

51. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, острый угол которого равен α, каждое боковое ребро равно b и образует угол β с плоскостью основания. Определить объем пирамиды и вычислить его при $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 30^\circ$ и $b = 3 см$.

52. Основанием пирамиды служит ромб с тупым углом φ и меньшей диагональю d. Все двугранные углы при основании равны; большее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды и вычислить его с точностью до 0,1 при $d = 4 см$, $\varphi = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

53. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α, боковая грань, проходящая через основание треугольника, перпендикулярна основанию пирамиды, а каждое из боковых ребер, лежащих в этой грани, составляет угол β с плоскостью основания пирамиды. Найти объем пирамиды.

54. Найти объем пирамиды, если в её основании прямоугольный треугольник с гипотенузой $c = 6 см$ и острым углом $\alpha = 30^\circ$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\beta = 60^\circ$.

55. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а каждая другая боковая грань образует с плоскостью основания угол β. Определить объем пирамиды.

56. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое из боковых ребер равно ℓ и составляет с прилежащими сторонами основания углы α и β. Найти объем пирамиды.

57. Основанием четырехугольной пирамиды служит прямоугольник с диагональю $d = 3 см$ и углом $\alpha = 60^\circ$ между ними. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол $\beta = 30^\circ$ Найти объем пирамиды.

58. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой грани равна Q, грань составляет с плоскостью основания угол α. Определить объем пирамиды и вычислить его при $\alpha = 60^\circ$

и $Q = 6 см^2$.

59. Найти площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды по данному объему V и углу α между боковой гранью и плоскостью основания и вычислить её с точностью до 0,I при $\alpha = 60°$, $V = 3 см^3$.

60. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник; боковая грань, проходящая через один из его катетов, образует с плоскостью основания угол α. Найти объем этой пирамиды, если боковые ребра наклонены под одним углом β и каждое из них равно b.

6I. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине α, α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно плоскости основания и равно a. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

62. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину ℓ, плоские углы при вершине α, α и β. Определить объем пирамиды.

63. Пирамида имеет в основании квадрат. Из двух противоположных друг другу ребер одно перпендикулярно плоскости основания, другое наклонено к нему под углом β и имеет длину ℓ. Определить длины остальных ребер и вычислить их при $\beta = 45°$ и $\ell = 4 см$

64. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, а третья образует с ним угол α. Определить объем пирамиды.

65. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а каждый из плоских углов при вершине равен α. Определить объем пирамиды.

66. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине α, а основание равно a, боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найти объем пирамиды.

67. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α и противолежащим ему катетом a. Боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания под углом β. Найти высоту пирамиды.

68. В основании призмы лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Две противолежащие грани AA_1B_1B и CC_1D_1D перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены под углом φ. Найти площадь сечения призмы, проведенного через сторону BC под углом α к плоскости основания.

69. Высота правильной треугольной призмы равна H. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найти площадь полной поверхности призмы и вычислить ее при $H = 1\,дм$ и $\alpha = 60°$ с точностью до 0,1.

70. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

71. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а третья составляет с плоскостью основания угол α. Определить площадь боковой поверхности пирамиды, если высота ее равна h.

72. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с острым углом α и боковой стороной b, равной меньшему основанию. Определить объем призмы, если угол между диагональю призмы и диагональю трапеции равен $\frac{\alpha}{2}$.

К р у г л ы е   т е л а

73. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра образует угол α с основанием развертки, длина диагонали равна d. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

74. Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом α вращается вокруг гипотенузы. Найти объем и площадь поверхности тела вращения и вычислить эти величины при $\alpha = 60°$, $a = 4\,см$.

75. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Около конуса описана пирамида, имеющая в основании равнобедренный треугольник с углом β при основании. Найти объем пирамиды.

76. Тупоугольный треугольник с острыми углами α и β вращается вокруг стороны, противолежащей углу β, большая сторона равна c. Найти площадь поверхности тела

вращения.

77. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна d и образует с меньшей боковой гранью угол β. Диагональ основания составляет с большей стороной основания угол α. Найти объем цилиндра.

78. Площадь осевого сечения конуса $Q = 4 см^2$. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = 45°$. Определить объем конуса.

79. Осевое сечение конуса представляет треугольник, угол при вершине которого $\alpha = 60°$ и боковая сторона $\ell = 4 см$. Найти площадь полной поверхности конуса.

80. Равнобедренный треугольник ABC, в котором $|AB| = |BC|$, $|AC| = a$ и $\hat{ABC} = \alpha$, вращается около боковой стороны. Определить площадь поверхности вращения.

81. Диагональ прямоугольника, равная d, образует с его стороной угол φ. Найти площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей эту сторону.

82. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом β. В основание конуса вписан треугольник, у которого сторона, равная a, лежит против угла α. Найти площадь полной поверхности конуса.

83. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом φ к основанию, пересекает верхнее основание по хорде a, стягивающей дугу α. Найти объем цилиндра и вычислить его при $\alpha = 120°$, $\varphi = 60°$, $a = 6 см$.

84. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α, расстояние плоскости от центра основания равно d. Определить объем конуса.

85. Два конуса имеют общую высоту, но вершины их лежат в разных концах высоты. Образующая первого конуса равна ℓ, а угол при вершине его осевого сечения равен 2α. Угол при вершине осевого сечения второго конуса равен 2β. Найти объем общей части конусов.

86. В равнобочной трапеции большее основание равно a, острый угол α, диагональ перпендикулярна к боковой сто-

роне. Найти объем тела, полученного вращением трапеции вокруг большего основания и вычислить его при $a = 1 дм$ и $\alpha = 60°$.

87. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Определить площадь полученного сечения.

88. Осевое сечение конуса представляет собой треугольник, угол при вершине которого равен α. Радиус круга, описанного около этого треугольника равен R. Определить объем конуса и вычислить его при $R = 4 см$, $\alpha = 60°$

89. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Определить площадь полной поверхности конуса, если радиус шара, вписанного в конус равен r и вычислить ее при $\alpha = 60°$ и $r = 1 см$.

90. В шар радиусом R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем пирамиды, если боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α и вычислить его при $\alpha = 60°$ и $R = 2 см$.

91. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в шар объемом V, если угол между противоположными боковыми ребрами равен α.

92. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Определить площадь полной поверхности пирамиды, если радиус шара, вписанного в пирамиду равен r.

93. В шар вписан конус с высотой h и углом в осевом сечении α. Определить площадь сферы и вычислить ее при $h = 1 см$ и $\alpha = 120°$.

94. В шар радиусом R вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к основанию под углом α. Найти объем цилиндра.

95. Высота конуса равна $h = 3 см$ и образует угол $\alpha = 60°$ с образующей. В этом конусе проведена плоскость через его вершину, угол при вершине этого сечения равен $\beta = 30°$. Найти площадь сечения.

96. Диагональ осевого сечения цилиндра образует с плоскостью основания угол в $60°$. Отношение $V : S_{бок} = 2 см$.

Найти длину диагонали осевого сечения.

97. В шар с радиусом $R = \frac{2}{3}$ дм вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha = 45^\circ$. Найти площадь полной поверхности цилиндра.

98. Вычислить объем цилиндра, если радиус основания его равен 2 см, а тангенс угла, образованного диагональю осевого сечения с плоскостью основания, равен $\frac{1}{4}$.

99. Вычислить площадь боковой поверхности цилиндра, если высота его $h = 1$ дм и $tg\,\alpha = \frac{1}{6}$, где α - угол, образованный диагональю осевого сечения с плоскостью основания.

100. Осевое сечение цилиндра - квадрат. Радиус основания цилиндра $R = \sqrt{19}$ см. В нижнем основании хорда AB стягивает дугу $\alpha = 60^\circ$. Вычислить расстояние от центра верхнего основания до хорды AB.

101. Угол при вершине осевого сечения конуса $\alpha = 120^\circ$, а площадь этого сечения $Q = \sqrt{3}$ см^2. Найти площадь боковой поверхности.

102. В основании конуса хорда длины $a = 2\sqrt{3}$ см стягивает дугу $\alpha = 120^\circ$. Угол между образующей конуса и плоскостью основания $\varphi = 30^\circ$. Вычислить объем конуса.

103. Плоскость пересекает шар. Расстояние от центра шара до плоскости равно $d = 1$ см, площадь полученного сечения равна 3π см^2. Вычислить радиус шара.

104. Точка A лежит на окружности верхнего основания, B - на окружности нижнего основания цилиндра. Угол между радиусами, проведенными в точки A и B, равен 120°. Найти $|AB|$, если радиус основания цилиндра $R = \sqrt{7}$ см, а осевое сечение этого цилиндра - квадрат.

105. В шар вписан конус. Угол при вершине осевого сечения α. Найти объем конуса, если радиус шара равен R.

106. Площадь основания конуса Q. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α. Определить объем конуса.

107. Основание пирамиды - ромб со стороной a и острым углом α. В пирамиду вписали конус, образующая которого

наклонена к плоскости основания под углом φ. Найти объем конуса.

108. Прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом α вращается вокруг оси, проведенной через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти объем тела вращения.

109. Куб вписан в шар, найти объем шара, если ребро куба равно a.

110.* Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг внешней оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от нее на расстоянии, равном высоте треугольника. Найти объем тела вращения.

111.* Плоскости 2-х сечений шара взаимно перпендикулярны. Одна из них проходит через центр, а другая удалена от него на $12\,см$. общая хорда сечений равна $18\,см$. Найти площади сечений.

112.* Два сечения шара имеют единственную общую точку; плоскости сечений составляют угол 60°, одна из них проходит через центр шара. Расстояние между параллельными диаметрами сечений равно $10\,см$. Найти диаметр шара.

ОТВЕТЫ

1. 24 см. 2. $\dfrac{h^2}{2\sin 2\alpha}$; 25 см^2. 3. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}R^2$; $\approx 3{,}6$ дм^2.

4. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$; $\approx 5{,}2$ см^2. 5. $r^2\operatorname{ctg}^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

6. $\dfrac{1}{2\pi}\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\operatorname{tg}\alpha$; $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{\pi}$. 7. $H^2\sqrt{3}$; $\approx 6{,}9$ см^2.

8. $\dfrac{l}{\sin\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. 9. $3r^2\sqrt{3}$; $\approx 5{,}2$ см^2.

10. $\pi a\operatorname{tg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$; $\dfrac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)$. 11. $\dfrac{2\pi c\cos\alpha}{1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

$\approx 4{,}6$ см. 12. 3. 13. $2\pi\sqrt{\dfrac{S}{\sin 2\alpha}}$; $\approx 17{,}7$ см.

14. $6\dfrac{2}{9}$. 15. 3π см. 16. $\dfrac{mn}{6}$. 17. $\dfrac{8R}{\sin\alpha}$.

18. $\sqrt{2Q}$. 19. $\dfrac{\pi Q\sin\alpha\sin\beta}{4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$. 20. $\dfrac{a^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin(\alpha+\gamma)}$;

$\approx 0{,}7$ см^2. 21. $\dfrac{1}{2}a^2\sin 2\alpha$; 4 см^2. 22. 30°. 23. 25 см^2.

24. $\sqrt{Q\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, $\sqrt{Q\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$. 25. $16r^2\sin\alpha$; 72 см^2.

26. $\dfrac{H^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}-3}$. 27. $H^3\operatorname{ctg}\beta\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}$; $\approx 25{,}4$ см^3.

28. $\dfrac{m^3\sin\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2}\,tg\beta}{4(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2})^3}$. 29. $d^3\sin\alpha\,\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

30. $\approx 121{,}1$ см^2. 31. 16 см^3. 32. $\approx 4{,}8$ см^3. 33. $\approx 1{,}4$ дм^3.

34. $\approx 90{,}2$ см^3. 35. $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3\,ctg^2\alpha-1}$; $\approx 16{,}9$ см^2.

36. $2d^2\sin\alpha\,tg\beta(\sin\alpha+\cos\alpha)$; $\approx 37{,}8$ см^2. 37. $2a^3\sin\alpha\times$ $\times\cos\frac{\alpha}{2}\,tg\beta$. 38. $\dfrac{H^3\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}{\sin^2\alpha}$. 39. $\dfrac{a^3}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\cos\alpha}{2}}$.

40. $\dfrac{p^2\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}}{\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 41. $2d^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\approx 22{,}6$ см^3.

42. $\dfrac{a^2b^2\sin^2\alpha}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$; $10\frac{5}{7}$ см^3. 43. $d^3\sin\frac{\beta}{2}\sin\alpha\times$

$\times\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}$. 44. $\approx 3{,}9$ см^3. 45. $\approx 31{,}1$ см^2.

46. $\approx 10{,}4$ см^3. 47. $\approx 13{,}8$ см^2. 48. $\approx 5{,}2$ см^2. 49. 64 см^2.

50. $\dfrac{S\sqrt{S\,tg\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}}{6\cos\frac{\alpha}{2}}$. 51. $\frac{1}{6}b^3\sin 2\alpha\sin 2\beta\cos\beta$; $1\frac{11}{16}$ см^3.

52. $\frac{1}{12}d^3tg^2\frac{\varphi}{2}tg\beta$; $\approx 27{,}7$ см^3. 53. $\frac{1}{6}a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}tg\beta$.

54. 13,5 см^3. 55. $\frac{1}{12}c^3\sin 2\alpha\cos\alpha\dfrac{tg\beta}{1+ctg\alpha}$.

56. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 57. $1\frac{1}{8}$ см^3.

58. $\frac{4}{3}Q\sin\alpha\sqrt{Q\cos\alpha}$; 12 см^3. 59. $\dfrac{2\sqrt{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{9V^2ctg^2\alpha}$;

15,6 см^2. 60. $\dfrac{2b^3\sin^2\beta\,ctg\alpha}{3\sin\alpha}\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}$.

61. $\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha}\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})$. 62. $\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

63. $l\sin\beta$, $\dfrac{l\cos\beta}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{l}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\sin^2\beta}$; $2\sqrt{2}$ см, 2 см, $2\sqrt{3}$ см.

64. $\frac{a^3}{8}tg\alpha$. 65. $\frac{a^3}{24}\sqrt{3ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}$. 66. $\dfrac{a^3}{48}\dfrac{ctg\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}tg\beta}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{4})}$.

67. $\frac{a\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$. 68. $\frac{a^2\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$. 69. $6\sqrt{3}\,H^3\operatorname{ctg}\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$; $\approx 9{,}5$ дм^2. 70. $a^2(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})$. 71. $\frac{h^2\operatorname{ctg}\alpha(2\sin\alpha+1)}{\sqrt{3}\sin\alpha}$.

72. $2b^3\sin^2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. 73. $\frac{d^2}{2\pi}(\pi\sin 2\alpha+\cos^2\alpha)$.

74. $\frac{1}{3}\pi a^3\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$, $\pi a^2\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$; 32π см^3, $8\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ см^2. 75. $\frac{1}{3}r^3\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$.

76. $\frac{2\pi c^2\sin\alpha\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})\cos\frac{\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}$. 77. $\frac{\pi d^3\sin^2\beta}{4\cos^3\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

78. $\frac{8}{3}\pi$ см^3. 79. 12π см^2. 80. $\frac{\pi a^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}(1+2\sin\frac{\alpha}{2})$.

81. $2\pi d^2\sin\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi)$. 82. $\frac{\pi a^2\cos^2\beta/2}{2\sin^2\alpha\cos\beta}$.

83. $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; 36π см^3. 84. $\frac{\pi d^3}{3\sin^2\varphi\cos\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

85. $\frac{\pi l^3\cos^3\alpha}{3(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)^2}$. 86. $\frac{\pi a^3\sin^2 2\alpha}{12}(3-4\cos^2\alpha)$; $\frac{\pi}{8}$ дм^3.

87. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\varphi\cos\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$.

88. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 24π см^3. 89. $\frac{2\pi r^2}{\cos\alpha}\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; 9π см^2

90. $\frac{4}{3}R^3\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha$; 6 см^3. 91. $\frac{V}{\pi}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

92. $\frac{8r^2}{\cos\alpha}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$. 93. $\frac{\pi h^2}{\cos^4\frac{\alpha}{2}}$; 16π см^2.

94. $\pi R^3\sin 2\alpha\cos\alpha$. 95. 9 см^2. 96. 16 см. 97. $\frac{4}{3}\pi$ дм^2.

98. 4π см^3. 99. 6π дм^2. 100. 9,5 см. 101. $2\pi\sqrt{3}$ см^2.

102. $\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$ см^2. 103. 2 см. 104. 7 см. 105. $\frac{2}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

106. $\frac{Q\sqrt{\pi Q}}{3\pi}\operatorname{tg}\alpha$. 107. $\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\alpha\operatorname{tg}\varphi$. 108. $\frac{4}{3}\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}$.

109. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. 110. πa^3. 111. 81π см^2; 225 см^2. 112. $\frac{80}{\sqrt{3}}$.

Литература

1. Геометрия: Учебное пособие для 8 класса средней школы/ Под ред. А.Н.Колмогорова, М.: Просвещение, 1980.

2. Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. Геометрия : Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / Под ред. М.И.Скопеца. М.: Просвещение, 1980.

3. Абрамович М.И., Стародубцев М.Т. Математика, геометрия и тригонометрические функции: Учебное пособие для подготовительных отделений ВТУЗов. М.: Высшая школа, 1976.

4. Стратилатов П.В. Сборник задач по тригонометрии для 9 и 10 классов средней школы/ Под ред. С.И.Новоселова. М., 1957.

5. Рыбкин Н. Сборник задач по тригонометрии с приложением задач по геометрии, требующих применения тригонометрии для 8,9 и 10 классов средней школы. М.-Л., 1957.

6. Киселев А.П. Геометрия .Ч.I-II:Учебники для 6-8 и 9-10 классов/ Под ред. Н.А. Глаголева. М.:Просвещение, 1968.

7. Кущенко В.С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л.:Судостроение,1964.

8. Антонов Н.П.,Выгодский М.Я. и др. Сборник задач по элементарной математике:Пособие для самообразования. М., 1958.

Составитель Нина Васильевна Н о в и к о в а

М А Т Е М А Т И К А

Решение задач по геометрии
с применением тригонометрии

Редактор Е.Д.А н т о н о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор М.И.Л о г у н о в а

Подписано в печать 27.12.83 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 2,09. Уч.-изд.л. 1,9. Тираж 500 экз.
Заказ 2069 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Областная тип.им. В.П.Мяги,г. Куйбышев,ул.Венцека,60.