

Министерство высшего и среднего
специального образования Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
В ПРОИЗВОДСТВЕ
ДЕТАЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Куйбышев 1984

Настоящие методические указания предназначены для студентов, выполняющих УИРС, курсовые и дипломные проекты по курсу технологии производства летательных аппаратов.

В них изложены современные методы оценки погрешностей результатов прямых, косвенных и совместных измерений, а также даны практические рекомендации по применению этих методов в производстве летательных аппаратов.

Составитель В.А. Барвинок

Рецензенты: Ю.В. Иванов, Ю.Г. Голубев

В технологии производства летательных аппаратов, также как и в любой другой инженерной практике, возникают различные задачи по планированию и обработке эксперимента. Их разнообразие определяется требованиями к эксперименту, характером исследуемых величин, наличием априорных сведений и т.д.

В последние годы значительно увеличился интерес к статическому методу со стороны производителей как к методу исследования, который широко применяется для расчета общей погрешности при изготовлении любого изделия, установления точности работы отдельных агрегатов его и так далее. Большое значение приобретает математическая статистика при изучении вопросов, связанных с совершенствованием и конструированием летательных аппаратов и их двигателей.

Методы математической статистики находят самое широкое применение в области технологии и организации производства летательных аппаратов и, в частности, для установления межоперационных припусков, для оценки технологических режимов при конструировании инструмента и приспособлений, при выборочном контроле и анализе производственного процесса в борьбе с браком продукции.

Возрастающая роль и значение методов математической статистики в технике объясняются исключительной сложностью современных технологических процессов, многообразием внешних и внутренних факторов, влияющих на производственный процесс.

Чтобы выявить основные факторы, исследователь вынужден повторять свое наблюдение несколько раз подряд. Такое многоразовое наблюдение позволяет пользоваться соответствующими суммарными статистическими характеристиками, которые дают существенную информацию об изучаемых явлениях в производстве.

Нельзя не отметить также и того, что в нашей стране огромное количество лабораторий, занятых научными исследованиями, не может обойтись без научной обработки результатов эксперимента, оценки погрешностей и выявления в ряде случаев взаимосвязей.

Однако нельзя переоценивать статистические методы. Правильное применение статистического анализа к определенному материальному объекту (процессу) отнюдь не может быть сведено к одним математическим приемам. По мнению Карла Маркса оно прежде всего требует предварительного теоретического анализа, конкретного своеобразия, раскрытия своеобразной логики, своеобразного предмета. Роль статистико-математических методов должна заключаться в измерении закономерностей, рас-

крытых специфическим анализом данной конкретной отрасли знаний.

В настоящей работе приведены основные сведения об измерениях, погрешностях, возникающих при измерениях, и применении методов математической статистики для обработки результатов наблюдений, имеющих место при производстве летательных аппаратов.

I. Основное содержание математической статистики

Наша познавательная деятельность в технике обычно ставит следующие задачи: теоретически определить, исследовать, описать и объяснить интересующие нас явления.

Математическая статистика дает возможность приобретать и накапливать знания о массовых, повторяющихся процессах и явлениях путем текущего их учета или специально организуемых наблюдений и исследований.

Обобщая опыт практики, мы сопоставляем неизвестное с известным, связываем известную группу фактов с ранее открытыми закономерностями и выявляем новые закономерности, если они имеют место. По мере накопления знаний новых фактов и закономерностей разрабатывается и новая теория.

Описывая же явление, мы перечисляем его основные свойства, признаки. Например, наблюдая производственный процесс изготовления деталей летательных аппаратов, мы интересуемся, из какого материала они изготавливаются, их геометрической точностью и качеством обработанной поверхности, производительностью и экономичностью процесса и так далее.

Объясняя что-либо, мы стремимся, прежде всего, выяснить, в какой связи находится интересующее нас явление или одна из его сторон с другими явлениями или с другим элементом того же явления.

Математическая статистика дает возможность по одним величинам вычислять другие, недоступные или малодоступные непосредственному наблюдению. Эта наука в сочетании с другими науками вооружает нас такими математическими приемами, которые позволяют предвидеть течение и развитие массового, повторяющегося процесса, установить его характер и формы. Так, например, с помощью математической статистики можно оценивать погрешности эксперимента, предвидеть течение технологического процесса, рассчитывать и обосновывать технические допуски, контролировать качество продукции и так далее.

Пользуясь математической обработкой результатов наблюдений и анализом массовых явлений в производстве, представляется возможность распространять получаемые выводы в известных пределах и на те явления, которые еще не подвергались наблюдению.

Следует отметить, что математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей, на предельных теоремах которой базируется большинство ее выводов. Поэтому, для правильной оценки значимости выводов в математической статистике, необходимо познакомиться с основными положениями теории вероятностей.

2. Некоторые понятия теории вероятностей

В теории вероятностей рассматриваются распределения случайных величин. Под случайной величиной понимают переменную величину, которая может принимать различные значения с определенной вероятностью [1].

С л у ч а й н ы м с о б ы т и е м называется такое событие, которое в данных условиях может произойти, а может и не произойти, т.е. появление которого нельзя предсказать точно. Для примера представим игральный кубик с цифрами от 1 до 6 на гранях. Если кубик подбросить, то нельзя точно предсказать, какой цифрой вверх он упадет. Назовем событием выпадение какой-то определенной цифры, например 1. Очевидно, это событие случайное — цифра 1 может выпасть, а может и не выпасть.

М а т е м а т и ч е с к о й в е р о я т н о с т ь ю события называется отношение числа случаев, в которых происходит это событие, к общему числу всех возможных равновероятных случаев. В нашем примере возможных случаев 6 (6 граней кубика). Из них один благоприятствующий нашему событию (выпадению цифры 1). Отсюда вероятность выпадения цифры 1 при бросании кубика равна $1/6$. Обозначив число благоприятных событий n (в данном случае $n=1$), а число всех возможных событий m (в данном примере $m=6$), вероятность события можно записать как

$$P = \frac{n}{m} \quad (2.1)$$

Если бы на всех гранях кубика была только цифра 1, то вероятность выпадения этой цифры была бы $P_1 = 1$ (всегда выпадает именно эта цифра). Таким образом, вероятность достоверного события равна единице. Если бы цифры 1 вообще не было на гранях кубика, то вероятность выпадения единицы была бы равна $P_1 = 0$ (вероятность невозможного события равна нулю). Вообще всегда

$$0 < P < 1.$$

В данном случае нам известно общее число всех возможных равновероятных событий N . Но часто приходится определять вероятность какого-либо события, не зная возможного числа равновероятных событий. В этом случае пользуются другим, ч а с т о т н ы м определением вероятности. Пусть мы бросаем кубик N раз (не зная, какие цифры на его гранях). При этом цифра 1 выпадает n раз. Отношение $\frac{n}{N}$ называется относительной частотой события.

Чем больше N , тем меньше частота появления события $\frac{n}{N}$ отличается от математической вероятности этого события (закон больших чисел).

Теория вероятностей утверждает, что вероятность события (в нашем примере - вероятность выпадения цифры I) равна пределу частоты появления этого события при $N \rightarrow \infty$:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}.$$

Вероятность случайного события может быть определена любым из этих двух способов. При этом, очевидно, всегда выполняются два условия:

$$0 \leq P \leq 1$$

и

$$\sum_i P_i = 1$$

(условие нормировки).

Определенная таким образом вероятность называется нормированной на единицу.

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что на сборочный ступень какого-то изделия поступают заклепки с трех автоматов, работающих с разной точностью. Первый автомат дает бракованных заклепок 0,6%, второй - 0,7%, третий - 0,8%. С первого автомата поступило 2500 заклепок, со второго - 2000, с третьего - 1250. Вычислим вероятность попадания на сборочный ступень бракованных заклепок.

Число всех заклепок, поступивших на сборку, будет равно:

$$M = 2500 + 2000 + 1250 = 5750.$$

Из них бракованных

$$N = 15 + 14 + 10 = 39.$$

Следовательно, искомая вероятность P равна

$$P = \frac{N}{M} = \frac{39}{5750} = 0,00618.$$

Тогда противоположное событие, то есть вероятность непопадания на сборочный ступень бракованных заклепок q , будет равна:

$$q = \frac{M-N}{M} = \frac{5750 - 39}{5750} = 0,99312.$$

Причем $P + q = 0,00618 + 0,99312 = 1.$

Это говорит о том, что сумма противоположных событий равна единице. Отсюда следует, что чем ближе P к нулю, тем менее вероятно наступление события n , наоборот, чем P ближе к единице, тем оно более вероятно.

2.1. Плотность вероятности

Случайная величина X может принимать непрерывный ряд значений. Тогда нельзя говорить о вероятности данного значения X , так как эта вероятность всегда равна нулю [в знаменателе (2.1) будет ∞]. Можно судить только о вероятности того, что X попадет в какой-то определенный интервал dx . Обозначим эту вероятность $dP(x)$.

Величина

$$f(x) = \frac{dP(x)}{dx} \quad (2.2)$$

называется плотностью вероятности. Из соотношения (2.2) видно, что

$$dP(x) = f(x)dx. \quad (2.3)$$

2.2. Математическое ожидание случайной величины

Предположим, что какая-то случайная величина имеет n возможных значений.

Мы проводим N измерений, причем $N \gg n$ и получаем, что значение X_1 появилось m_1 раз, значение $X_2 - m_2$ раз, $X_3 - m_3$ раз и т.д. Тогда среднее значение величины X будет равно

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i m_i.$$

Предел этого выражения при $N \rightarrow \infty$ называется математическим ожиданием случайной величины:

$$M(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i m_i.$$

Это равенство можно записать, учитывая (2.1), в виде

$$M(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{N} X_i = \sum_{i=1}^n X_i \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^n X_i P_i,$$

где P_i - вероятность того, что случайная величина имеет значение X_i .

Если же величина X может принимать непрерывный ряд значений, то эта сумма будет представлена интегралом

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dP(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.4)$$

При $N \rightarrow \infty$, $\bar{x} \rightarrow M(x)$.

2.3. Законы распределения вероятностей

При решении задач, связанных со случайными явлениями, необходимо знать не только числовые характеристики случайных величин, но и их законы распределения. Для описания распределения случайных величин в больших борках применяются следующие законы: закон нормального распределения (закон Гаусса), биномиальное распределение, распределение Пуассона, распределение Максвелла. Наибольшее распространение в практике для случая больших выборок получил закон нормального распределения, а для случая малых выборок – распределение Госсета (Стьюдента). Распределение по Гауссу и распределение по Стьюденту будут подробно рассмотрены при обработке результатов измерений.

3. Применение математической статистики при обработке экспериментальных данных

3.1. Элементарные сведения об измерениях

Методы математической статистики впервые были применены к задаче обработки результатов измерений.

Процесс нахождения значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств называется измерением [2]. Под физической величиной понимают величину, характеризующую рассматриваемый объект или процесс. Например, температура детали, прочность, вязкость, геометрическая точность, пластичность, мощность сварочной дуги и так далее.

Измерение можно представить в виде схемы, приведенной на рис.3.1.

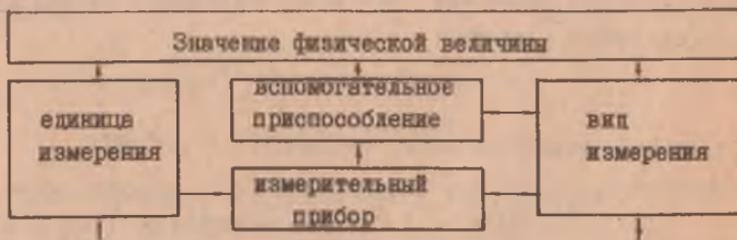


Рис. 3.1. Схема процесса измерения

В связи с большой важностью процесса измерения для науки и техники, а также многообразием измеряемых величин существует целый ряд видов измерений. Классификация видов измерений, в зависимости от различных признаков, приведена на рис. 3.2.

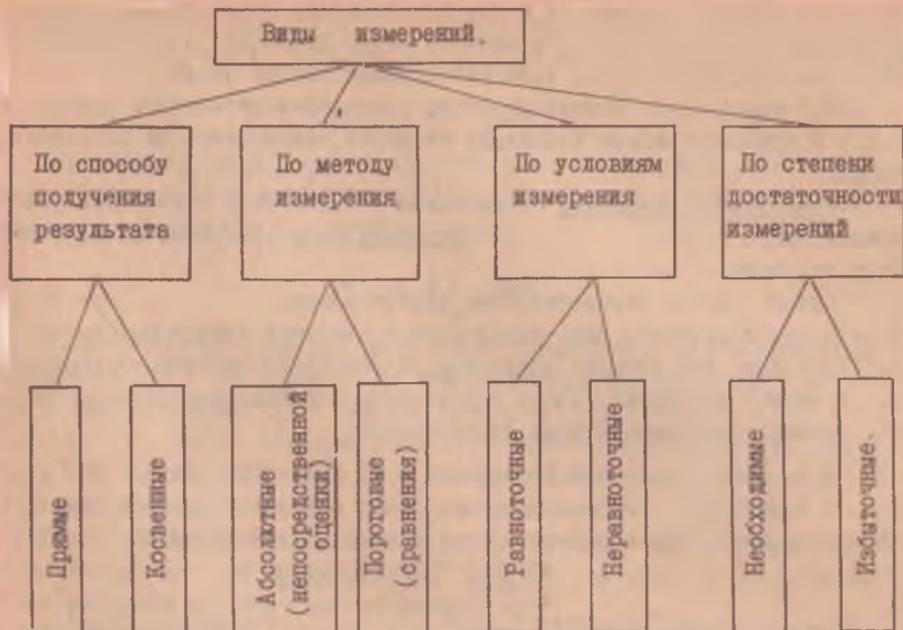


Рис. 3.2. Классификация измерений

Прямое измерение – измерение, при котором искомое значение измеряемой величины находят непосредственно из опытных данных [3]. Примеры прямых измерений: измерение геометрических размеров детали с помощью штангенциркуля или микрометра, измерение тока сварочной дуги с помощью амперметра, температуры с помощью пирометра и так далее.

Косвенное измерение – такое измерение, при котором искомое значение физической величины находят на основании известной функциональной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям [3]. Например, определение объема тела по его геометрическим размерам, мощности сварочной дуги по току и напряжению, плотности тела по массе и объему и т.д.

Деление измерений по этому признаку до некоторой степени является условным, так как на практике часто встречаются различные сочетания прямых и косвенных измерений.

Измерения можно классифицировать и по методу измерений. Метод измерения – это совокупность приемов использования принципов и средств измерений [2]. Основных методов два: метод непосредственной оценки, когда искомое значение измеряемой величины определяется непосредствен-

но по отсчетному устройству и метод сравнения, когда искомое значение измеряемой величины определяется путем сравнения с известной величиной. Примером метода непосредственной оценки является отсчет по шкале термометра, штангенциркуля, электроизмерительного прибора и т.д., а примером метода сравнения является взвешивание на рычажных весах.

Равноточные измерения производятся в одинаковых условиях, определяющих общую точность измерений. Неравноточные измерения не отвечают этим условиям.

Однако из-за несовершенства измерительной аппаратуры при любых измерениях получаются лишь приближенные значения измеряемых величин. Это означает, что проводя измерения, мы допускаем некоторые погрешности. В задачу измерений, кроме определения значения измеряемой величины, входит оценка допущенных погрешностей.

3.2. Погрешности при измерениях и их классификация

В зависимости от различных признаков принято классифицировать виды погрешностей в соответствии со схемой, приведенной на рис. 3.3.



Рис. 3.3. Виды погрешностей

Абсолютная погрешность равна разности между результатом измерения X искомой величины и ее истинным значением X_0 :

$$\Delta X = X - X_0 \quad (3.1)$$

Относительной погрешностью называется погрешность, приходящаяся на единицу измеряемой величины. Она обычно выражается в процентах:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta X}{X_0} \cdot 100\% \quad (3.2)$$

Приведенная погрешность относится не к конкретному значению измеряемой величины, а к ее максимально возможному значению или к максимальному значению шкалы прибора X_{max} :

$$\delta_{пр} = \frac{\Delta X}{X_{max}} \cdot 100\% \quad (3.3)$$

Приведенная погрешность чаще всего нормируется государственными стандартами [4]. Согласно ГОСТу электроизмерительные приборы по степени точности делятся на 8 классов точности: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Класс точности определяет наибольшую допустимую приведенную погрешность для всего рабочего диапазона шкалы δ кл. точн. По определению классов точности $\delta_{пр} \leq \delta$ кл. точн.

Погрешности, рассчитываемые по формулам (3.1 - 3.3), являются, в общем случае, полными погрешностями, так как они состоят из случайной, систематической и грубой составляющих.

Случайная погрешность - составляющая полной погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины [3]. Она обусловлена большим числом как объективных, так и субъективных причин, действие которых на каждое измерение не может быть учтено заранее. Обычно известны только числовые характеристики закона распределения погрешностей измерений.

Систематическая погрешность это составляющая полной погрешности, которая от измерения к измерению остается либо постоянной, либо изменяется по какому-то определенному закону [3]. Так, систематическая погрешность возникает, если смещен нуль прибора или неправильно отградуирована его шкала. Недостаточное наполнение ртутью баллончика термометра приведет также к постоянному смещению результатов.

В общем случае систематические погрешности принято разделять на две большие группы: с известной и неизвестной величиной погрешности. Так, все измерительные приборы, работающие в нормальных условиях, обладают известной систематической погрешностью - приборной. Эта погрешность определяется классом точности прибора. Для прибора с классом точности δ кл. точн. абсолютная систематическая погрешность измеряемой величины X определяется из формулы

$$\Delta X = \frac{\delta_{кл. точн} \cdot X_{max}}{100\%} \quad (3.4)$$

где X_{max} интервал значений рабочей шкалы прибора. Если на приборе не указан класс точности, то считают, что систематическая погрешность такого прибора равна половине цены деления прибора. Например, для штангенциркуля с ценой деления 0,1 мм систематическая погрешность составляет 0,05 мм, а для термометра с ценой деления 1° она равна 0,5°.

Систематическая погрешность неизвестной величины может возникать, когда прибор работает не в нормальных условиях (повышенная или пониженная температура, давление, влажность и т.д.) или используемые законы не точно описывают процесс.

Тщательный анализ условий измерений позволяет, в принципе, обнаружить, исключить, либо учесть в виде поправок все систематические погрешности часто до выполнения самих измерений. Однако реальные трудности такого учета резко возрастают при повышении точности измерений.

Важно отметить, что, несмотря на принципиальное отличие систематических и случайных погрешностей, систематическую погрешность часто можно перевести в случайную. Для этого необходимо организовать измерения таким образом, чтобы постоянный (систематический) фактор, влияющий на результат измерений, при каждом повторном измерении действовал разным образом, т.е. результат его действия носил случайный характер.

Этот прием превращения систематической погрешности в случайную называется рандомизацией. Он позволяет учесть многие неизвестные систематические погрешности.

Так, например, при изготовлении цилиндра на токарном станке его диаметр из-за постоянного износа резца будет в разных местах различным. Проводя измерения диаметра в различных, случайно выбранных точках, мы переведем систематические погрешности, связанные с условиями изготовления детали, в случайные погрешности результатов измерений.

Для рандомизации процесса измерения часто используют вместо одного целый набор приборов.

Грубая погрешность (промах) вызывается просчетом экспериментатора, неисправностью средств измерения, неучетом резко изменившихся внешних условий и т.д. Грубые погрешности приводят к явному искажению результатов, поэтому при обработке результатов измерений их надо исключать.

Выявить уже сделанные промахи можно, анализируя полученные результаты с помощью теории вероятностей.

3.3. Источники погрешностей

Процесс измерения является сложным процессом, состоящим из нескольких этапов (операций). На каждом из этих этапов различные факторы могут приводить к появлению погрешностей. Поэтому полная погрешность измерения будет складываться из составляющих, имеющих различное происхождение. Эти составляющие, в зависимости от источника погрешности, можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 3.4.

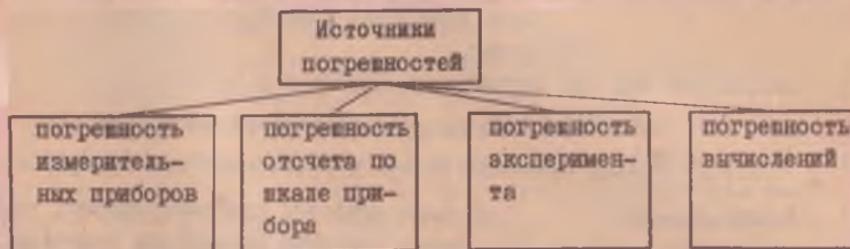


Рис. 3.4. Источники погрешностей

Погрешность измерительного прибора может содержать как случайную, так и систематическую составляющую [4]. Эта погрешность определяется классом точности прибора и указывается либо на самом приборе, либо в паспорте, прилагаемом к прибору.

Погрешность отсчета по шкале прибора может возникнуть как из-за того, что записываемый результат выражается конечным числом значащих цифр, так и из-за неопытности экспериментатора.

Погрешность эксперимента состоит так же из систематической и случайной составляющих.

Наконец, в процессе математической обработки результатов измерений могут появиться дополнительные погрешности, связанные с вычислением и округлением получаемых величин. В дальнейшем будем считать, что погрешность вычислений существенно меньше погрешностей прибора и эксперимента.

Сформулируем теперь задачу измерения.

3.4. Задача измерения

При измерении величины ставятся две задачи:

1. Найти число, наилучшим образом отражающее значение физической величины X_0 .

2. Определить величину погрешности измерения и вероятность, с которой она найдена.

В зависимости от преобладания случайной или систематической погрешностей решение этих задач будет различным. Поэтому рассмотрим раздельно три случая:

1. Систематическая погрешность известна и она существенно больше случайной погрешности.

2. Случайная погрешность измерения существенно больше систематической погрешности.

3. Случайная погрешность измерения является величиной сравнимой с систематической погрешностью.

Рассмотрим эти три случая применительно к прямым измерениям.

3.5. Обработка результатов прямых измерений

3.5.1. Оценка систематических погрешностей при измерениях

В этом случае задача измерения решается наиболее просто, так как число, наилучшим образом отражающее значение физической величины, находится путем одного измерения этой величины, погрешность измерения равна систематической погрешности, а вероятность, с которой она найдена, равна вероятности нахождения систематической погрешности. Например, надо произвести измерение длины какой-то детали штангенциркулем с ценой деления 0,05 мм. Систематическая погрешность этого прибора равна 0,05 мм. Измерения показали, что измеряемая длина детали незначительно (менее, чем на 0,05 мм) превышает 100 мм и при повторных измерениях практически не меняется. Поэтому можно сделать вывод, что систематическая погрешность прибора (0,05 мм) преобладает над случайной погрешностью измерения.

Отсюда число, наилучшим образом отражающее истинное значение физической величины, равно 100 мм. Пусть измерения проводятся при температуре 300 К. Следовательно, систематическая погрешность эксперимента, связанная с тепловым расширением линейки, равна:

$$\Delta = l_0 \alpha_T \Delta T = 100 \cdot 1,06 \cdot 10^{-5} (300 - 293) \approx 0,007 \text{ мм},$$

где l_0 - длина детали, α_T - коэффициент температурного расширения.

Эта величина много меньше, чем систематическая погрешность прибора, поэтому погрешность измерения будет равна 0,05 мм.

3.5.2. Оценка случайных погрешностей прямых измерений.

Гистограмма. Закон нормального распределения.

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Предположим, что при измерении выяснилось, что случайная погрешность меньше систематической. Очевидно, нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности — все равно результаты измерений не станут от этого заметно точнее, и, желая получить большую точность, нужно искать пути к уменьшению систематической погрешности. Наоборот, если случайная погрешность больше систематической, то именно случайную погрешность нужно уменьшать в первую очередь.

Поэтому рассмотрим случай, при котором систематическая погрешность существенно меньше случайной. При этом результаты отдельных измерений будут отличаться от истинного значения измеряемой величины как в большую, так и в меньшую сторону, то есть абсолютные погрешности отдельных измерений $\Delta X = X_0 - X$ могут быть и положительными, и отрицательными.

Как оценить величину погрешности серии измерений? На этот вопрос, если число измерений в серии достаточно велико (по крайней мере больше 20), отвечает классическая теория погрешностей, основанная на трех естественных предположениях, называемых постулатами Гаусса:

1. Погрешности измерений могут принимать непрерывный ряд значений.

2. Появление равных по величине, но противоположных по знаку погрешностей равновероятно.

3. Вероятность появления погрешности уменьшается с ростом ее абсолютной величины.

Используя постулаты Гаусса, рассмотрим решение первой задачи теории измерения о нахождении числа, наилучшим образом отражающего значение физической величины.

Проведем серию из n измерений некоторой физической величины. При этом мы получим следующие значения X_1, X_2, \dots, X_n . То есть, каждое значение будет получено с абсолютной погрешностью ΔX_i :

$$\Delta X_1 = X_0 - X_1$$

$$\Delta X_2 = X_0 - X_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta X_n = X_0 - X_n$$

Сложив почленно полученные равенства, будем иметь:

$$X_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta X_i. \quad (3.5)$$

При бесконечно большом числе измерений ($n \rightarrow \infty$), в силу постулатов Гаусса, среднее арифметическое значение абсолютной погрешности обратится в нуль:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta X_i = 0.$$

Поэтому истинное значение физической величины будет равно среднему арифметическому значению бесконечной серии измерений или математическому ожиданию случайной величины:

$$X_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X} = M(X).$$

При ограниченном числе измерений равенство (3.5) можно записать в виде:

$$X_0 = \bar{X} \pm \Delta X. \quad (3.6)$$

Таким образом, при ограниченном числе измерений измеряемая величина лежит внутри интервала $[\bar{X} - \Delta X, \bar{X} + \Delta X]$, определяемого погрешностью серии измерений ΔX . Для того, чтобы найти границы этого интервала, необходимо установить, с какой частотой появляются погрешности различной величины, то есть установить закон распределения погрешностей. Теория вероятностей помогает найти этот закон.

Разобьем полный интервал измерения переменной величины на более узкие интервалы и будем определять, с какой частотой появится погрешность в данном узком интервале.

При большом числе измерений относительная частота появления погрешностей в интервале имеет вид ступенчатой кривой (гистограммы), изображенной на рис. 3.5.

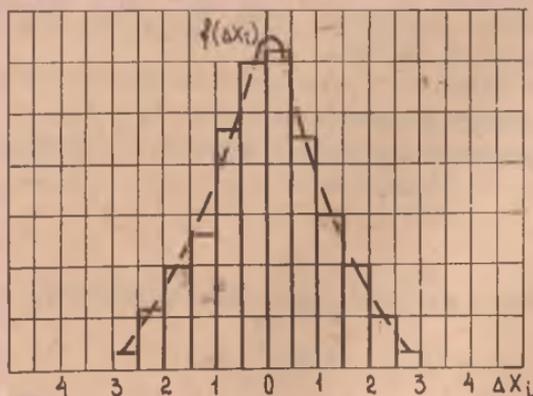


Рис. 3.5. Гистограмма появления погрешностей

На этом рисунке показано 12 узких интервалов. При стремлении ширины узкого интервала к нулю и числа измерений к бесконечности ломаная линия превращается в плавную кривую распределения погрешностей, описываемую соотношением:

$$f(\Delta X_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta X_i)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.7)$$

Функция $f(\Delta X_i)$ называется плотностью распределения вероятностей погрешности ΔX_i . Здесь e – основание натуральных логарифмов, σ – некоторый параметр распределения.

Приведенный закон называется законом нормального распределения Гаусса. Пример кривых Гаусса дан на рис. 3.6.

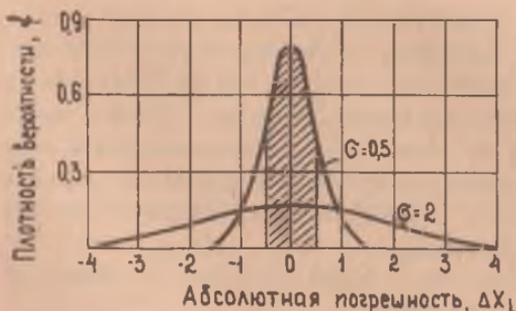


Рис. 3.6. Закон нормального распределения

В этом законе максимуму кривой соответствует

$$\Delta X_i = X_0 - X_i = 0.$$

Следовательно при бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины оказывается наиболее вероятным.

Входящий в закон распределения Гаусса параметр σ называется дисперсией. Эта величина характеризует разброс погрешностей. При большом значении дисперсии кривая расплывается. В случае $\sigma = 2$ большие отклонения от истинного значения измеряемой величины встречаются чаще, чем в случае $\sigma = 0,5$.

Величина σ зависит от условий измерений и может быть приближенно выражена через измеряемые величины.

Можно показать, что если число измерений очень велико ($n \rightarrow \infty$).

то величина дисперсии σ оказывается равной среднеквадратичной погрешности S отдельного измерения

$$\sigma_x^2 = S_x^2 = \frac{\sum (\Delta X_i)^2}{n}$$

При ограниченном числе измерений приближенным выражением для дисперсии распределения погрешностей результата серии измерений будет

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum (\Delta X_i)^2}{n(n-1)} \quad (3.8)$$

В этом случае погрешность отдельного измерения ΔX_i находится как разность между средним арифметическим значением и результатом данного измерения, то есть $\Delta X_i = \bar{X} - X_i$.

После того как выполнена серия измерений и получено среднее арифметическое значение этой серии, а так же определена дисперсия этих измерений, можно определить, насколько среднее арифметическое значение отличается от истинного значения измеряемой величины. Для этого в теории погрешностей пользуются понятиями доверительный интервал и доверительная вероятность. Эти понятия взаимосвязаны и определяются следующим образом.

Вероятность того, что среднее значение \bar{X} лежит в интервале $X_0 - \Delta X \leq \bar{X} \leq X_0 + \Delta X$, равна

$$\mathcal{L} = \int_{-\Delta X}^{+\Delta X} f(\Delta X_i) d\Delta X_i \quad (3.9)$$

и равна заштрихованной площади на рис. 3.6 ($\Delta X = 0,5$). Такой же, очевидно, будет и вероятность того, что истинное значение величины X_0 лежит в интервале $\bar{X} - \Delta X \leq X_0 \leq \bar{X} + \Delta X$. Очевидно, чем больший интервал мы берем, тем больше вероятность того, что измеряемая величина попадет в этот интервал. Таким образом, задаваясь одной из этих величин (например, вероятностью), можно вычислить другую (границы интервала, внутри которого находится значение измеряемой величины).

Доверительным интервалом погрешности ΔX называется интервал $[\bar{X} - \Delta X_{гр}, \bar{X} + \Delta X_{гр}]$, в пределах которого содержится истинное значение измеряемой величины с заданной вероятностью \mathcal{L} .

Доверительной вероятностью \mathcal{L} или надежностью результата серии измерений называется вероятность того, что истинное значение измеряемой величины содержится в доверительном интервале $[\bar{X} - \Delta X_{гр}, \bar{X} + \Delta X_{гр}]$.

Часто $\Delta X_{гр}$ представляют в виде $\Delta X_{гр} = K_A \cdot \sigma_{\bar{x}}$, где $\sigma_{\bar{x}}$ вычисляется по формуле (3.8), а K_A - коэффициент, зависящий только от доверительной вероятности, приведен в Приложении I.

Рассмотрим пример нахождения доверительной вероятности α по заданной величине $\Delta X_{гр}$. Возьмем $\Delta X_{гр} = \pm b_{\bar{x}}$. Чтобы найти доверительную вероятность α , нужно вычислить площадь под кривой, ограниченной ординатами $-b_{\bar{x}}$ и $b_{\bar{x}}$, то есть вычислить интеграл (3.9). Результаты таких вычислений позволяют найти $\alpha = 0,68$ (Приложение I). Если выбрать $\Delta X_{гр} = \pm 2 b_{\bar{x}}$, то $\alpha = 0,95$, при $\Delta X_{гр} = \pm 3 b_{\bar{x}}$, $\alpha = 0,997$. Это значит, что за пределы доверительного интервала попадает в первом случае 32% результатов измерений, во втором случае — 5%, а в третьем случае лишь 0,3%.

На рис. 3.7 приведены графики, характеризующие величину доверительной вероятности (заштрихованная площадь под кривой).

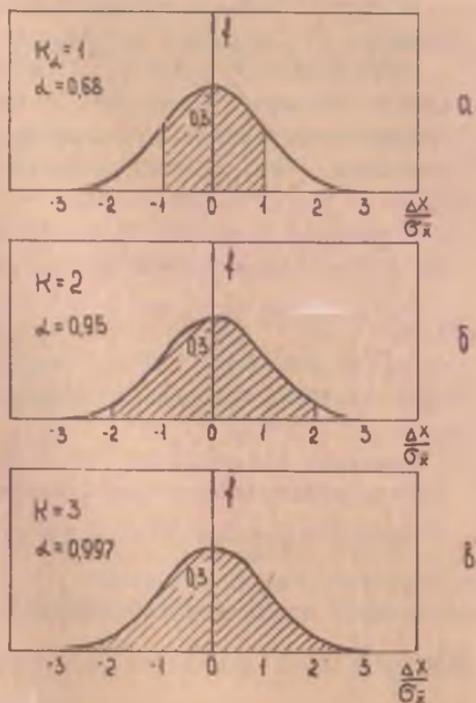


Рис. 3.7. Зависимость доверительной вероятности от величины доверительного интервала. Дисперсия распределения $b_{\bar{x}} = 1$

3.5.3. Распределение Стьюдента (Госсета)

Описанный метод вычисления погрешностей применим, как уже было сказано, при большом числе измерений. Если n не очень велико ($n < 20$), то среднеквадратичные оценки S_x^2 и $S_{\bar{x}}^2$ сами являются случайными величинами и в лучшем случае дают лишь представление о порядке дисперсий b_x^2 и $b_{\bar{x}}^2$. Поэтому при нахождении границ доверительного интервала мы не можем пользоваться коэффициентами $K_x = \frac{\Delta X_{rp}}{b_{\bar{x}}}$, так как $b_{\bar{x}}$ нам неизвестна.

Чтобы можно было пользоваться аналогичным методом оценки погрешностей при $n \leq 20$, пришлось ввести новый коэффициент. Он был впервые предложен в 1908 году английским математиком Госсетом, который установил, что при малых n случайные погрешности подчиняются другому распределению – распределению Стьюдента. (Госсет публиковал свои работы под псевдонимом "Стьюдент" – студент, поэтому открытое им распределение и коэффициент впоследствии стали называться распределением и коэффициентом Стьюдента). При $n > 20$ распределение Стьюдента очень мало отличается от распределения Гаусса.

Распределение Стьюдента позволяет по заданной величине доверительной вероятности \mathcal{L} найти границы доверительного интервала по формуле

$$\Delta X_{rp} = t_{\mathcal{L}}(n) S_{\bar{x}} \quad (3.10)$$

и, наоборот, по заданному значению ΔX_{rp} определить, с какой вероятностью истинное значение измеряемой величины будет лежать внутри интервала $[\bar{X} - \Delta X_{rp}, \bar{X} + \Delta X_{rp}]$.

Коэффициенты Стьюдента для различных n и различных доверительных вероятностей \mathcal{L} вычислены и приведены в Приложении I.

3.5.4. Порядок обработки результатов прямых измерений

1. Записать результат каждого измерения X_i в таблицу.
2. Вычислить среднее арифметическое значение серии из n измерений

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

3. Найти абсолютную погрешность отдельных измерений

$$\Delta X_i = \bar{X} - X_i.$$

4. Вычислить квадраты абсолютных погрешностей отдельных измерений

$$(\Delta X_i)^2.$$

5. Определить среднюю квадратичную погрешность результата серии измерений

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}{n(n-1)}}.$$

6. Задать значение надежности α .

7. Определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha}(n)$ для заданной надежности α и числа произведенных измерений n .

8. Найти границу доверительного интервала абсолютной погрешности

$$\Delta X_{гр} = t_{\alpha}(n) \cdot S_{\bar{x}}.$$

9. Окончательный результат записать в виде

$$X = \bar{X} \pm \Delta X_{гр}.$$

10. Вычислить относительную погрешность измерений

$$\mathcal{E}_{\bar{x}} = \frac{\Delta X_{гр}}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

Рассмотрим пример. Пусть мы имеем 5 результатов измерения диаметра цилиндра после расточки (таблица 3.1).

Таблица 3.1

№ П/П	d_i , мм	Δd_i , мм	$(\Delta d_i)^2$, мм ²
1	14,85	- 0,04	0,0016
2	14,80	0,01	0,0001
3	14,84	- 0,03	0,0009
4	14,81	0,00	0,0000
5	14,79	0,02	0,0004

Измерения проводились микрометром с ценой деления 0,01 мм.

1. Найдем среднее арифметическое значение этой серии

$$\bar{d} = \frac{14,85+14,80+14,84+14,81+14,79}{5} = 14,81 \text{ мм}.$$

2. Вычисляем абсолютную погрешность отдельных измерений и их квадраты (см. таблицу 3.1).

3. Определяем среднюю квадратичную погрешность результата серии измерений

$$S_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 \Delta d_i^2}{5 \cdot 4}} = 0,012 \text{ мм}.$$

4. Задаемся доверительной вероятностью $\mathcal{L} = 0,95$, с которой истинное значение величины d_0 должно лежать внутри найденного интервала.

По заданной вероятности $\mathcal{L} = 0,95$ и числу измерений $n = 5$, находим по таблице Приложение I, $t_{\alpha, n} = 2,8$.

5. Определяем границу доверительного интервала

$$\Delta d_{rp} = t_{\alpha, n} \cdot S_d = 2,8 \cdot 0,012 = 0,03 \text{ мм.}$$

6. Окончательный результат запишем в виде

$$d = \bar{d} \pm \Delta d_{rp} = (14,81 \pm 0,03) \text{ мм.}$$

7. Относительная погрешность при этом будет равна

$$\mathcal{E}_d = \frac{\Delta d_{rp}}{\bar{d}} \cdot 100\% = 0,2 \%$$

Примечание. В разделах 3.5.2 и 3.5.3 были рассмотрены случаи, при которых систематическая погрешность существенно превышала случайную или, наоборот, случайная погрешность существенно превышала систематическую. Однако в практике измерений могут иметь место случаи, при которых значение границы доверительного интервала ΔX_{rp} сравнимо с систематической погрешностью δ . В этом случае погрешность измерений вычисляют по формуле

$$\Delta X = \sqrt{\Delta X_{rp}^2 + \left(\frac{K_\alpha}{3}\right)^2 \delta^2}, \quad (3.11)$$

где $K_\alpha = t_\alpha(\infty)$ при соответствующей заданной доверительной вероятности \mathcal{L} .

В этом случае окончательный результат записывают в виде

$$X = \bar{X} \pm \Delta X,$$

а относительную погрешность вычисляют по формуле

$$\mathcal{E}_{\bar{X}} = \frac{\Delta X}{\bar{X}} \cdot 100\%.$$

3.6. Обработка результатов косвенных измерений

Предположим, что проводится косвенное измерение какой-то величины $y = F(x, z, u, t \dots)$ на основе прямых измерений величин $x, z, u, t \dots$. Требуется найти число, наилучшим образом отражающее значение физической величины y , а также определить величину погрешности измерения и вероятность, с которой она найдена. Для решения этой задачи существует два способа.

Первый способ. Он применим, если систематические погрешности величин x, z, u, t, \dots либо устранены, либо пренебрежимо малы по сравнению со случайными.

Проводим прямые измерения величин X, Z, U, t, \dots

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

$$U_1, U_2, \dots, U_n$$

$$t_1, t_2, \dots, t_n$$

.....

Так как $X_i, Z_i, U_i, t_i \dots$ — случайные величины, то и

$y_i = F(X_i, Z_i, U_i, t_i, \dots)$ тоже являются случайными величинами.

Поэтому для каждой совокупности значений величин ($X_i, Z_i, U_i, t_i, \dots$) вычисляем величину y_i

$$y_1 = F(X_1, Z_1, U_1, t_1, \dots)$$

$$y_2 = F(X_2, Z_2, U_2, t_2, \dots)$$

.....

$$y_n = F(X_n, Z_n, U_n, t_n, \dots)$$

и полученный ряд значений y_i обрабатываем по правилам п.3.5.4, как и результат прямых измерений. Окончательный результат записываем в виде:

$$\bar{y} = \bar{y} \pm \Delta \bar{y}_{\text{пр.}}$$

где

$$\bar{y} = F(\bar{X}, \bar{Z}, \bar{U}, \bar{t}, \dots).$$

Пример. Нужно найти плотность материала цилиндра.

Расчетная формула

$$\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h} \quad (3.12)$$

Проводим прямые измерения массы m , диаметра D и высоты h цилиндра, в результате чего получаем для каждой из этих физических величин ряд результатов измерений:

$$m_1; m_2; \dots, m_n;$$

$$D_1; D_2; \dots, D_n;$$

$$h_1; h_2; \dots, h_n.$$

Подставляя каждую совокупность результатов измерений m, D и h в расчетную формулу (3.12), будем иметь:

$$\rho_1 = \frac{4m_1}{\pi D_1^2 h_1};$$

$$\rho_2 = \frac{4m_2}{\pi D_2^2 h_2};$$

.....

$$\rho_n = \frac{4m_n}{\pi D_n^2 h_n}.$$

Теперь, обрабатывая полученные значения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ по правилам, изложенным в п. 3.5.4, получим границы доверительного интервала $\pm \Delta \rho_{гр}$. Окончательный результат запишем в виде

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta \rho_{гр}$$

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\Delta \rho_{гр}}{\bar{\rho}} \cdot 100\%$$

Второй способ. Проводим прямые измерения величин x, z, u, t, \dots

$$x_1; x_2; \dots; x_n$$

$$z_1; z_2; \dots; z_n$$

$$u_1; u_2; \dots; u_n$$

$$t_1; t_2; \dots; t_n$$

Величины x, z, u, t, \dots обрабатываем по правилам п.3.5.4, как результат прямых измерений при одном и том же значении доверительной вероятности α .

Окончательный результат представляем в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{гр}$$

где $\bar{y} = F(\bar{x}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{t}, \dots)$.

Величина $\Delta y_{гр}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta y_{гр} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (\Delta x_{гр})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 (\Delta z_{гр})^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 (\Delta u_{гр})^2 + \dots} \quad (3.13)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial u}, \dots$ - частные производные функции $y = F(x, z, u, \dots)$ по переменным x, z, u, \dots , соответственно. Вычисленные при $x = \bar{x}, z = \bar{z}, u = \bar{u}, \dots$.

Частная производная от функции многих переменных по одной из них, например по x , находится как обычная производная, при этом все другие переменные z, u, \dots считаются постоянными.

Пример. Найдем плотность ρ по формуле (3.12). По известным нам правилам вычислим величины \bar{m}, \bar{D} и \bar{h} , а затем определим среднее значение плотности $\bar{\rho}$ по формуле:

$$\bar{\rho} = \frac{4\bar{m}}{\bar{x}\bar{D}^2\bar{h}}$$

Теперь найдем частные производные от

$$\rho = \frac{4m}{x D^2 h} \quad \text{по } m, D \text{ и } h.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{x D^2 h};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial D} = -\frac{4m \cdot 2}{x D^3 h} = -\frac{8m}{x D^3 h};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{x D^2 h^2}.$$

Подставив эти выражения в (3.13), получим

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{4}{x D^2 h}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8m}{x D^3 h}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{4m}{x D^2 h^2}\right)^2 \Delta h^2} \quad (3.14)$$

В некоторых случаях оказывается более удобным найти сначала относительную погрешность $\varepsilon_{\bar{\rho}} = \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}}$, а затем уже вычислять абсолютную $\Delta \rho = \varepsilon_{\rho} \bar{\rho}$. Покажем на нашем примере, как это делается.

Разделим обе части выражения (3.14) на $\rho = \frac{4m}{\pi D^2 h}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho} &= \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\pi D^2 h}{4m} \sqrt{\left(\frac{4}{\pi D^2 h}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8m}{\pi D^3 h}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{4m}{\pi D^2 h^2}\right)^2 \Delta h^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{4\pi D^2 h}{\pi D^2 h 4m}\right)^2 \Delta m^2 + \left(\frac{8m \pi D^2 h}{\pi D^3 h 4m}\right)^2 \Delta D^2 + \left(\frac{4m \pi D^2 h}{\pi D^2 h^2 4m}\right)^2 \Delta h^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2} = \end{aligned}$$

где ε_m , $\varepsilon_{\bar{D}}$ и $\varepsilon_{\bar{h}}$ — относительные погрешности измерения величин m , \bar{D} и \bar{h} , уже вычисленные нами при обработке результатов измерения величин m , D и h .

Вычислив ε_{ρ} , найдем абсолютную погрешность измерения плотности

$$\Delta \rho = \varepsilon_{\rho} \bar{\rho}.$$

после чего окончательный результат измерения запишем

$$\rho = \bar{\rho} \pm \Delta \rho.$$

3.6.1. Вычисление погрешности косвенных измерений с помощью логарифмирования функции

Если функцию $A = f(x; y; z \dots)$ представить в виде

$$A = x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \cdot z^{\gamma},$$

то можно предложить еще один метод обработки результатов косвенных измерений. Он вытекает из следующих соображений.

По определению относительная погрешность $\varepsilon_A = \frac{\Delta A_{гр}}{A}$.

С другой стороны, $\frac{d}{dx}(\ln A) = \frac{dA}{A}$. Правые части этих равенств одинаковы и здесь напрашивается способ определения относительной погрешности с помощью логарифмирования:

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \frac{\Delta A_{гр}}{A} = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \Delta x_{гр}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 \Delta y_{гр}^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \Delta z_{гр}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \Delta x_{гр}^2 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 \Delta y_{гр}^2 + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \Delta z_{гр}^2 + \dots} \end{aligned}$$

Величину $\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x}$ можно записать так

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\ln A).$$

Аналогично $\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln A)$; $\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\ln A)$ и т.д.

Тогда

$$\varepsilon_A = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln A\right)^2 \Delta x_{гр}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln A\right)^2 \Delta y_{гр}^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \ln A\right)^2 \Delta z_{гр}^2 + \dots}$$

Если $A = x^\alpha \cdot y^\beta \cdot z^\gamma$, то $\ln A = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z$

(α , β и γ могут быть как положительными, так и отрицательными): $\frac{\partial}{\partial x} \ln A = \frac{\alpha}{x}$, $\frac{\partial}{\partial y} \ln A = \frac{\beta}{y}$; $\frac{\partial}{\partial z} \ln A = \frac{\gamma}{z}$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_A &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 \Delta x_{гр}^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 \Delta y_{гр}^2 + \left(\frac{\gamma}{z}\right)^2 \Delta z_{гр}^2} = \\ &= \sqrt{\alpha^2 \left(\frac{\Delta x_{гр}}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{\Delta y_{гр}}{y}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{\Delta z_{гр}}{z}\right)^2} = \quad (3.15) \\ &= \sqrt{\alpha^2 \varepsilon_x^2 + \beta^2 \varepsilon_y^2 + \gamma^2 \varepsilon_z^2}. \end{aligned}$$

Так как предварительно мы уже провели обработку прямых измерений и нам известны относительные погрешности при измерении x , y , z , то прежде сначала найти относительную погрешность косвенного измерения ε_A по формуле (3.14), а уже после этого подсчитать абсолютную погрешность, то есть границы доверительного интервала:

$$\Delta A_{гр} = \varepsilon_A \cdot \bar{A}.$$

3.6.2. Приближенные методы вычисления погрешностей косвенных измерений

Первый способ. Для нахождения абсолютной погрешности (доверительного интервала) функции нескольких переменных функцию надо продифференцировать по каждой из переменных, считая остальные постоянными. Дифференциал заменить на знак погрешности (дельта) и знаки выбрать таким образом, чтобы абсолютная величина погрешности была максимальной.

Пример. $V = \frac{\pi R^2 h}{4} = \mathcal{K} R^2 h$,

где V - объем, R - радиус, h - высота

$$dV = 2\mathcal{K} R h dR + \mathcal{K} R^2 dh$$

$$\Delta V = 2\mathcal{K} R h \Delta R + \mathcal{K} R^2 \Delta h.$$

Второй способ. Для нахождения относительной погрешности функции нескольких переменных функцию надо прологарифмировать, затем продифференцировать, значок дифференциала заменить на значок погрешности (дельта) и знаки выбрать таким образом, чтобы абсолютная величина получаемой относительной погрешности была максимальной.

Пример. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$, где ρ - плотность, m - масса, a - линейный размер, V - объем

$$\ln \rho = \ln m - 3 \ln a; \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm}{m} - 3 \frac{da}{a};$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \left(\frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta a}{a} \right) 100\%.$$

3.6.3. Порядок обработки результатов косвенных измерений

1. Все величины, входящие в зависимость для нахождения искомой величины, измерить и обработать по правилам, изложенным в п. 3.5.4 (обработки результатов прямых измерений). При этом для всех величин задать одно и то же значение доверительной вероятности α .

2. Выбрать наиболее удобный метод определения погрешности косвенных измерений. В соответствии с выбранным методом найти абсолютную погрешность результата $\Delta y_{гр}$ и относительную погрешность

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y_{гр}}{y} 100\%.$$

3. Окончательный результат записать в виде

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{гр},$$

где

$$\bar{y} = y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots).$$

Примечание. При косвенных измерениях, также как и при прямых измерениях, не всегда удается исключить систематическую погрешность прибора. Тогда для $\Delta y_{гр}$ нужно подставлять не случайные погрешности измерений, а полные погрешности, с учетом приборных систематических погрешностей (3.11).

3.7. Правила приближенных вычислений

Как было отмечено в п.3, одним из источников погрешностей является округление чисел при вычислениях. С другой стороны необоснованное увеличение точности вычислений приводит к возрастанию трудоемкости обработки результатов и, в ряде случаев, не приводит к уменьшению погрешностей измерений. Поэтому точность обработки числового материала должна быть согласована с точностью самих измерений.

Количество значащих цифр в окончательной записи результата измерений определяется величиной абсолютных погрешностей. Однако погрешность при определении абсолютных погрешностей довольно велика, поэтому обычно значение абсолютной погрешности округляется до одной значащей цифры, а при особо точных измерениях — до двух значащих цифр. Ошибка, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок меньше суммарной ошибки измерений, то есть в промежуточных вычислениях погрешностей достаточно оставлять только две значащие цифры.

При отбрасывании лишних значащих цифр необходимо руководствоваться следующими правилами округлений:

1. Если первая отбрасываемая цифра больше пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая цифра меньше пяти, то последняя цифра остается без изменений.

2. Если отбрасываемая цифра пять, а последующих цифр младших разрядов нет или они неизвестны, то сохраняемая четная цифра увеличивается на единицу.

3. Запись чисел необходимо выполнять по возможности в нормализованной форме, например, число 264 записывается так $2,64 \cdot 10^2$, число 0,012 — $1,2 \cdot 10^{-2}$. При округлении целых чисел все цифры, отброшенные при округлении, заменяются множителем 10^n . При округлении десятичных дробей цифры, стоящие после запятой, просто отбрасываются, нулями их заменять нельзя, так как нуль в конце десятичной дроби характеризует точность.

4. При сложении и вычитании все слагаемые округляются до сомнительной цифры, стоящей в самом высшем разряде, а затем выполняется операция.

5. При умножении и делении в полученном результате будет столько значащих цифр, сколько в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр. Поэтому следует предварительно округлить все числа до сомнительной цифры, стоящей в самом высшем разряде, а затем выполнить операцию.

6. При возведении в степень и извлечении корня у приближенного числа должно быть оставлено значащих цифр столько, сколько их в основании.

7. При логарифмировании в мантиссе приближенного числа берется столько значащих цифр, сколько их в логарифмируемом числе.

3.8. Графическое представление результатов измерений

На практике большое распространение получили графики, изображающие функциональную зависимость искомой величины от одной, либо от двух переменных в двумерной системе координат. Чтобы построить график, необходимо.

1. Провести ряд измерений искомой величины при нескольких значениях переменной (большое значение имеет выбор числа экспериментальных точек, то есть совокупности численных значений аргумента и функции). В местах перегибов, минимумов, максимумов, крутых скачков число точек должно быть большим, чем в областях плавного изменения функции. Поэтому перед началом работы следует провести несколько предварительных измерений по всему диапазону изменения переменных, чтобы составить общее представление об исследуемой зависимости и наметить план эксперимента.

2. Установить интервал изменения аргумента и функции и выбрать масштаб по осям координат. Рекомендуется выбирать масштаб, кратный 10^n , $2 \cdot 10^n$, $5 \cdot 10^n$, где n – любое целое число, положительное или отрицательное. Например, $1 \text{ см} - 20 \text{ Ом}$ или $1 \text{ см} - 5 \cdot 10^{-1} \text{ А}$. Выбор масштаба $1 \text{ см} - 30 \text{ Ом}$ или $1 \text{ см} - 4 \cdot 10^{-2} \text{ А}$ следует считать неудачным. Такой график трудно построить и неудобно использовать в дальнейшей работе.

Начало отсчета следует выбирать так, чтобы отрезки по осям координат, которые определяются форматом листа миллиметровки, несколько перекрывали интервалы изменения аргумента и функции.

3. Нанести на поле графика экспериментальные точки. Если проведено несколько серий измерений, то рекомендуется точки каждой серии отмечать условными значками – кружочками, треугольниками, квадратами и т.д.

4. Построить график исследуемой функции, который в подавляющем большинстве случаев должен представлять собой плавную, непрерывную кривую. При этом необходимо следить, чтобы число точек под кривой и над ней было по возможности одинаково. Описанный способ построения графиков существенно сглаживает "шум" эксперимента, обусловленный наличием случайных погрешностей, однако требует от экспериментатора некоторых предварительных представлений о возможном ходе искомой зависимости.

5. Если на графике для сравнения с экспериментом приводят теоретическую кривую, то точки, по которым ее проводят, выбирают по своему усмотрению. Наносить их нужно без нажима, лучше всего карандашом,

чтобы при необходимости можно было стереть. Экспериментальные же данные следует отмечать жирными хорошо выделяющимися точками, сначала тоже карандашом.

6. Если на графике имеется теоретическая кривая, то плавную кривую через экспериментальные точки можно не проводить.

7. Оценить погрешность полученного графического представления искомой зависимости. Для выполнения этой операции можно воспользоваться методом обработки при прямых измерениях, применяя его к нескольким экспериментальным точкам, выбираемым на кривой в характерных участках, например, в начале кривой, в точках перегиба, экстремумов, в конце кривой. При этом в качестве среднего арифметического берется точка, лежащая непосредственно на кривой.

Запись полученных погрешностей может даваться либо в численном виде, особенно когда погрешность почти постоянна по всей кривой, либо отмечается непосредственно на графике в соответствующих точках в виде отрезков прямой, длина которых равна погрешности (с учетом масштаба). Последний способ часто применяется для указания на графике разброса экспериментальных точек.

На рис.3.8 приведен пример выполнения такого графика.

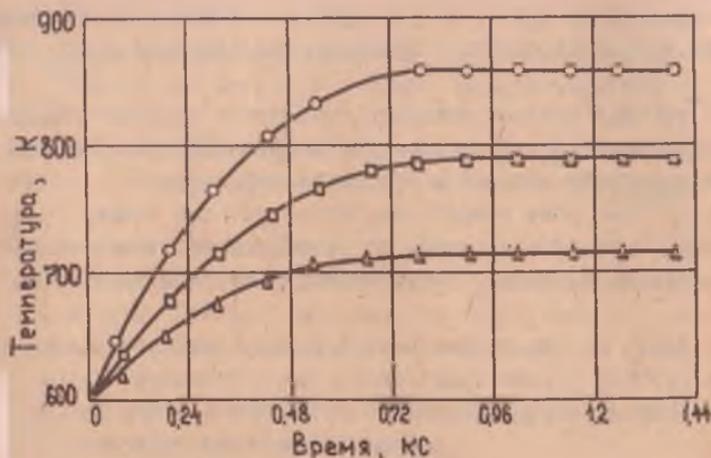


Рис. 3.8. Температура покрытия TiN в зависимости от величины потенциала смещения и времени напыления на подложку ХН70Ю. Режим напыления: $J_p = 130A$, $B = 1,8 мТл$, $P_{N_2} = 10 мПа$, $o-U_c = 150В$, $□-U_c = 80В$, $Δ-U_c = 20В$

4. Метод наименьших квадратов

На практике часто проводятся эксперименты, целью которых является исследование зависимости некоторой величины y от величины t или параметров этой зависимости, если ее вид заранее известен. При исследовании неизвестных зависимостей возможны как систематические, так и случайные погрешности. Систематические связаны с выбором вида зависимости, случайные — с процессами измерений. Для уменьшения влияния случайных погрешностей измерений применяется метод наименьших квадратов, позволяющий определять параметры выбранной (или известной) зависимости, при которой отклонение от экспериментальных данных является в некотором смысле минимальным.

Пусть в результате эксперимента мы получили ряд измерений величины y : y_1, y_2, \dots, y_n , соответствующих значениям аргумента t_1, t_2, \dots, t_n , которые могут быть представлены на графике в виде точек $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$ (рис. 4.1), и нам необходимо установить эмпирическую зависимость между y и t .

Очевидно, если соединить последовательно все эти точки, то получим ломаную линию, которая ничего общего не будет иметь с искомой зависимостью $y = f(t)$. Это следует хотя бы из того, что форма этой ломаной линии не будет воспроизводиться при повторных сериях измерений. Измеренные значения y_i будут в общем случае смещены относительно искомой кривой $y = f(t)$ как в сторону больших, так и в сторону меньших значений, вследствие статистического разброса (рис. 4.1).

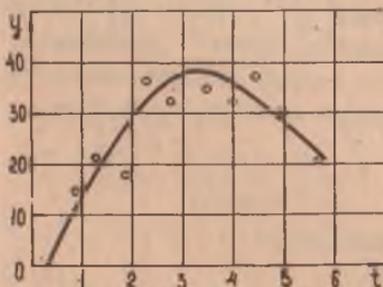


Рис. 4.1. Кривая $y = f(t)$, построенная по значениям (t_i, y_i) методом наименьших квадратов

Задача состоит в том, чтобы по данным экспериментальным точкам провести кривую (не ломаную), которая проходила бы как можно ближе к истинной функциональной зависимости $y = f(t)$. Теория вероятности показывает, что наилучшим приближением будет такая кривая (или прямая) линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от точек до кривой будет минимальной. Этот метод и называется методом наименьших квадратов. Сущность этого метода состоит в следующем.

Предположим, что искомая зависимость выражается функцией $y = f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$, где A_1, A_2, \dots, A_m - параметры. Значения этих параметров определяются так, чтобы точки y_i располагались по обе стороны кривой $y = f(t)$ как можно ближе к последней, то есть чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений y_i от функции $y = f(t)$ была бы наименьшей. Это соответствует предположению, что разброс точек y_i относительно кривой $y = f(t)$ подчиняется закону нормального распределения. Как отмечалось выше, мерой этого разброса является дисперсия σ^2 или ее приближенное выражение - средний квадрат отклонений

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [y_j - y(t_j)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [y_j - f(t_j)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta y_j^2. \quad (4.1)$$

Причем требование минимального разброса соответствует требованию минимального значения этого среднего квадрата.

Как известно, функция $f(A)$ принимает минимальное значение при $A = A_{\min}$, если ее первая производная $\frac{df}{dA} = 0$, а вторая производная $\frac{d^2f}{dA^2} > 0$. Эти же условия необходимы и для функции многих переменных. Только в этом случае берутся частные производные функции по каждому из параметров A_i . Причем при вычислении частных производных по одному из параметров другие принимаются постоянными.

Таким образом, из условий минимума мы получаем систему уравнений для определения наилучших значений параметров:

$$\frac{\partial S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n [y_j - f(t_j)] \frac{\partial f(t)}{\partial A_i} = 0, \quad (4.2)$$

где $i = 1, 2, 3 \dots m$; $m < n$.

Обычно форму зависимости $y = f(t, A_1, A_2, \dots, A_n)$ задают в виде полинома

$$f(t) = A_0 + A_1(t) + \dots + A_m t^m = \sum_{i=0}^m A_i t^i, \quad m < n-1 \quad (4.3)$$

или в виде любой другой системы линейно независимых функций $\varphi_k(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \varphi_1(t) + A_2 \varphi_2(t) + \dots + A_m \varphi_m(t) = \\ &= \sum_{i=1}^m A_i \varphi_i(t), \quad m < n, \end{aligned} \quad (4.4)$$

достаточно хорошо передающей общий ход зависимости $y = f(t)$, который можно установить по расположению точек (t_i, y_i) на рис. 4.1.

В случае выбора $f(t, A_1, \dots, A_m)$ в виде (4.3) уравнение (4.2) принимает вид

$$\frac{\partial S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \sum_{k=0}^m A_k t_j^k) t_j^i = 0, \quad (i=0, 1, \dots, m), \quad (m < n-1).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \sum_{k=0}^m A_k t_j^k) t_j^i = 0$$

или
$$\sum_{k=0}^m A_k \sum_{j=1}^n t_j^{k+i} = \sum_{j=1}^n y_j t_j^i, \quad (4.5)$$

где $(i = 0, 1, \dots, m), (m+1 < n)$.

В случае выбора разложения $f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$ в форме (4.4) уравнение (4.2) принимает вид:

$$\frac{\partial S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n [y_j - \sum_{k=1}^m A_k \psi_k(t_j)] \psi_i(t_j) = 0 \quad \text{при} \quad m < n.$$

Тогда
$$\sum_{j=1}^n [y_j - \sum_{k=1}^m A_k \psi_k(t_j)] \psi_i(t_j) = 0.$$

Откуда
$$\sum_{k=1}^m A_k \sum_{j=1}^n \psi_k(t_j) \psi_i(t_j) = \sum_{j=1}^n y_j \psi_i(t_j), \quad (4.6)$$

где $(i = 1, 2, 3, \dots, m), (m < n)$.

Решение этих систем линейных уравнений позволяет однозначно определить коэффициенты A_i разложения $y = f(t)$.

Изложенный выше способ применения метода наименьших квадратов можно обобщить и на некоторые случаи нелинейных зависимостей $f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$ от параметров, например, для

$$y = f(t, a, \gamma) = a e^{-\gamma t}. \quad (4.7)$$

В этом случае целесообразно искать не минимум суммы квадратов отклонений функций $\sum_{j=1}^n [y_j - y(t_j)]^2$, а минимум суммы квадратов отклонений логарифмов этих же функций

$$\sum_{j=1}^n [\ln y_j - \ln(\alpha e^{-\gamma t_j})]^2,$$

что приводит к уравнениям
$$\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma t_j) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma t_j) t_j = 0.$$

То есть к системе уравнений

$$\begin{cases} -\gamma \sum_{j=1}^n t_j + n \ln \alpha = \sum_{j=1}^n \ln y_j \\ -\gamma \sum_{j=1}^n t_j^2 + \sum_{j=1}^n t_j \ln \alpha = \sum_{j=1}^n t_j \ln y_j. \end{cases} \quad (4.8)$$

Решение (4.8) позволяет найти значения параметров γ и $\ln \alpha$:

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{j=1}^n t_j\right)\left(\sum_{j=1}^n \ln y_j\right) - n \sum_{j=1}^n t_j \ln y_j}{n \sum_{j=1}^n t_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)^2}, \quad (4.9)$$

$$\ln \alpha = \frac{\left(\sum_{j=1}^n t_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \ln y_j\right) - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)\left(\sum_{j=1}^n t_j \ln y_j\right)}{n \sum_{j=1}^n t_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)^2}.$$

Рассмотрим применение вышеизложенного метода на конкретных примерах.

4.1. Нахождение параметров линейной зависимости вида $y(t) = a + bt$

Пусть в процессе шлифования какой-то детали происходит ее удлинение под действием температуры, выделяемой в зоне обработки.

При измерении длины детали (ℓ) в зависимости от температуры (T) были получены следующие результаты, приведенные в таблице 4.1.

Таблица 4.1

i	T_i	$\ell_{i,m}$	T_i^2	$T_i \ell_i$	$\ell(T_i)_{\text{выч}}$	$\Delta \ell_i$	$\Delta \ell_i^2 \cdot 10^4$
1	293	86,70	85849,0	25403,1	86,65	+0,05	25
2	294,8	88,03	86907,04	25951,24	88,21	-0,18	324
3	303,2	90,32	91930,24	27385,02	89,97	+0,35	1225
4	308	91,15	94864,0	28074,2	91,53	-0,38	1444
5	313,1	93,26	98031,61	29199,71	93,18	+0,08	64
6	317,9	94,90	101060,41	30168,71	94,74	+0,16	256
7	323	96,33	104329,0	31114,59	96,40	-0,07	49
Сумма	2153	640,69	662971,30	197296,57	-	+0,01	3387
Среднее	307,57	91,53	94710,18	28185,22	-	-	-

Найдем температурную зависимость длины детали. Будем искать ее в виде

$$\ell = \ell_0 + \alpha t, \quad (4.10)$$

где α - коэффициент линейного расширения в м/град.

Применяя метод наименьших квадратов, найдем параметры l_0 и α этой зависимости. Потребуем, чтобы сумма квадратов отклонений измеренной длины детали от вычисленной по соотношению (4.10) была наименьшей:

$$- \sum_{i=1}^n (l_i - l_0 - \alpha t_i)^2 = \min. \quad (4.11)$$

Из этого условия, дифференцируя его сначала по l_0 , а затем по α , получаем уравнения

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n (l_i - l_0 - \alpha t_i) &= 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n t_i (l_i - l_0 - \alpha t_i) &= 0. \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{cases} n l_0 + \alpha \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n l_i \\ (\sum_{i=1}^n t_i) l_0 + \alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i l_i. \end{cases} \quad (4.12)$$

Из первого уравнения выразим l_0 .

$$l_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i - \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{l} - \alpha \bar{t}$$

и, подставляя это выражение для l_0 во второе уравнение (4.12), получим соотношение

$$n \bar{t} (\bar{l} - \alpha \bar{t}) + \alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i l_i. \quad (4.13)$$

Из (4.13) определим α :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i l_i - n \bar{t} \bar{l}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n \bar{t}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i l_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i l_i - \bar{t} \sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t} \sum_{i=1}^n t_i}. \end{aligned}$$

После этого находим l_0 :

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \frac{\sum_{i=1}^n t_i l_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n l_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n l_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right) - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i l_i \right)}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения численные значения из табл. 4.1, получим

$$\alpha = \frac{197296,57 - 307,57 \cdot 640,69}{662971,30 - 307,57 \cdot 2153} = 0,31 \text{ м/град},$$

$$\ell_0 = \frac{91,53 \cdot 662971,30 - 307,57 \cdot 197296,57}{662971,30 - 307,57 \cdot 2153} = 80,1 \text{ м}.$$

Таким образом окончательно будем иметь

$$\ell = 80,1 + 0,31 T. \quad (4.14)$$

График зависимости (4.14) и экспериментальные точки представлены на рис. 4.2.

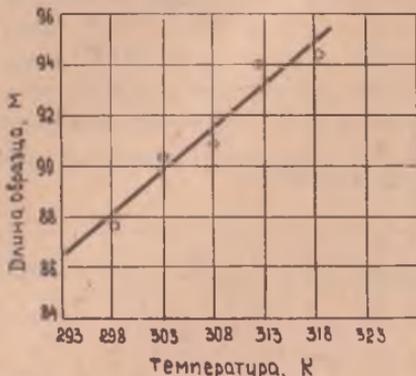


Рис. 4.2. Зависимость длины образца от температуры

На рис. 4.2 точки соответствуют результатам измерений, а линия — теоретической (эмпирической) кривой.

4.2. Нахождение параметров квадратичной зависимости вида $y(t) = a + bt + ct^2$

Требуя, чтобы сумма квадратов отклонений имела минимальное значение

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2)^2 = \min,$$

и дифференцируя это соотношение по a , b и c , получаем соответственно уравнения:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) t_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) t_i^2 = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n t_i + c \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i^3 = \sum_{i=1}^n t_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i^3 + c \sum_{i=1}^n t_i^4 = \sum_{i=1}^n t_i^2 y_i. \end{cases} \quad (4.15)$$

Из этой системы можно определить значения параметров a, b и c .

Если один из параметров зависимости равен нулю, то система уравнений для этого случая может быть получена из первого и третьего уравнений, полагая в них $b = 0$:

$$\begin{cases} n \cdot a + c \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i^4 = \sum_{i=1}^n t_i^2 y_i. \end{cases} \quad (4.16)$$

Из (4.16) находим c и a :

$$\begin{cases} c = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n t_i^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2}, \\ a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n t_i^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2}. \end{cases} \quad (4.17)$$

4.3. Общий случай выравнивания опытных кривых способом наименьших квадратов

В научно-исследовательской работе приходится статистически обрабатывать данные единичных значений (α), которые отличаются друг от друга не на постоянную величину (ΔX).

Пусть имеются данные о выпуске деталей и всех затратах на их изготовление.

Таблица 4.2

Группа выпуска деталей в тыс. штук (X)	Затраты на изготовление (\bar{y}) деталей					Всего затрат в тыс. руб. $n \bar{y}_x$	Число заводов	Сред. расходы на один завод \bar{y}_x
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5			
2	24	26	19	-	20	89	4	22,25
4	14	3	13	8	4	42	5	8,4
9	12	-	7	3	10	32	4	8,0
18	-	5	8	-	-	13	2	6,5
Сумма	50	34	47	11	34	176	15	11,73

Для того, чтобы выравнить y по X способом наименьших квадратов, прежде всего определим форму зависимости y от X .

Вычислим \bar{y} для каждого значения X по формуле $\bar{y} = \frac{\sum y}{n}$.

Таблица 4.3

X	2	4	9	18
\bar{y}_x	22,25	8,4	8,0	6,5

Изобразив данные таблицы 4.3 графически, мы делаем предположение, что форма зависимости гиперболическая (рис.4.3). На рис.4.3 точками изображены опытные данные, а линией - теоретическая кривая.

Для выравнивания применим формулу гиперболы

$$y = \frac{a}{x} + b,$$

где a - общезаводские расходы, b - прямые расходы по изготовлению каждой детали (стоимость материалов, сдельная оплата труда и т.д.)

Выравнивание произведем с помощью нормальных уравнений:

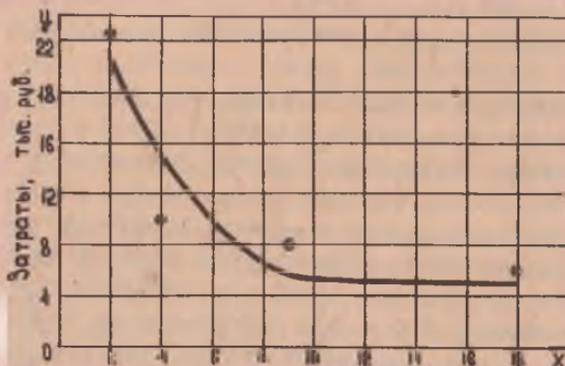
$$nb + a \sum \frac{1}{x} n. = \sum \bar{y}_n n,$$

$$b \sum \frac{1}{x} n + a \sum \frac{1}{x^2} n = \sum \bar{y}_x \frac{1}{x} n.$$

Составим вспомогательную таблицу 4.4 для нахождения параметров a и b .

Таблица 4.4

x	\bar{y}_x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{\bar{y}_x}{x}$	n	$n \frac{1}{x}$	$n \frac{1}{x^2}$	$n \bar{y}_x$	$\frac{n \bar{y}_x}{x}$
2	22,85	0,50	0,250	11,13	4	2,00	1,0	89,0	44,50
4	8,40	0,25	0,062	2,10	5	1,25	0,310	42,0	10,50
9	8,00	0,11	0,012	0,88	4	0,44	0,048	32,0	3,55
18	6,50	0,05	0,003	0,36	2	0,11	0,006	13,0	0,72
Сумма					15	3,80	1,364	176,0	59,27



Количество деталей, тыс. штук

Рис. 4.3. Зависимость затрат от количества выпускаемых деталей

Подставляя в нормальные уравнения полученные табличные значения, получим

$$15b + 3,8a = 176$$

$$3,8b + 1,364a = 59,27,$$

откуда $a = 35,4, \quad b = 2,76.$

Искомое уравнение гиперболы будет

$$y = 2,76 + 35,4 \frac{1}{x}.$$

Вычисляя каждую ординату гиперболы, получим

Таблица 4.5

x	2	4	9	18
y	20,46	11,56	6,7	4,66

Таким образом, теоретическая кривая на рис. 4.3 представлена уравнением гиперболы $y = 2,76 + 35,4 \frac{1}{x}$.

Из рис. 4.3 следует, что гипербола в данном случае хорошо отражает эмперические данные.

5. Анализ производственных погрешностей методами математической статистики

Обеспечение требуемой точности деталей, узлов и агрегатов является одной из главных задач технологии производства летательных аппаратов. Строгие допуски на теоретические контуры планера и на взаимное расположение его агрегатов обусловлены необходимостью сохранения летных характеристик самолета. Нарушение заданной точности внешних контуров ведет к ухудшению характеристик самолета и увеличивает лобовое аэродинамическое сопротивление, уменьшает скорость, дальность полета и так далее.

Точность размеров изделий необходима также для того, чтобы обеспечить сочленение и сборку деталей в узлах, узлов в агрегаты, то есть для обеспечения взаимозаменяемости изделий. Это наиболее частое назначение точностных параметров изделий, без выполнения которых нельзя без излишней подгонки или подбора сочленить изделия друг с другом. Точность и взаимозаменяемость взаимосвязаны. Согласно определению точность выражается соответствием полученного действительного размера A_d заданному проектному A_n , то есть мерой точности является разность $A_d - A_n = \Delta A$, которая называется производственной погрешностью.

Для анализа точности геометрических параметров изделий применяют аппарат размерных цепей, который характеризует взаимное расположение поверхностей деталей или взаимное расположение деталей в узле. Отдельные размеры, входящие в размерную цепь, называются звеньями размерной цепи. Звено размерной цепи, возникающее в результате реализации всех других, называется замыкающим размером размерной цепи. Точность замыкающих размеров при сборке вне приспособлений характеризуется сборочными технологическими размерными цепями.

5.1. Производственные погрешности и их классификация

Производственные погрешности вызываются многочисленными и разнообразными причинами, наиболее характерные из которых могут быть сведены в следующие группы [5]:

1. Погрешности оборудования.
2. Колебание режима работы.
3. Погрешности инструмента.
4. Недостатки рабочего приспособления.
5. Неоднородность материала изделия.
6. Погрешности рабочего, связанные с настройкой оборудования и установкой инструмента, установкой и закреплением детали, регулировкой режима работы и так далее.

Для того, чтобы обоснованно решать задачи по расчету размерных цепей и, исходя из заданного допуска на замыкающий размер, назначить допуски на размеры составляющих звеньев, надо иметь нормативные данные по точности различных технологических процессов и операций.

В наибольшей степени этот вопрос изучен применительно к операциям механической обработки — точению, фрезерованию, сверлению, развертыванию и др. Это объясняется тем, что именно механической обработкой изготавливаются детали, из которых собираются сложные и точные узлы и механизмы, выполняющие свои служебные функции только благодаря правильному расчету и выполнению допусков на размеры сочленяемых поверхностей деталей. Механическая обработка обеспечивает высокую степень точности деталей вплоть до первого класса. Погрешности механической обработки могут составлять лишь сотые доли миллиметра.

Значительно меньшую точность размеров обеспечивают операции листовой штамповки, используемые для изготовления подавляющего большинства деталей самолетов. Главным источником погрешностей при штамповке деталей являются упругие деформации, которые проявляют себя после снятия внешних деформирующих сил. Поводки деталей после разгрузки (пружинение) могут доходить до нескольких миллиметров. Доводка размеров до требуемой точности производится или специальной калибрующей операцией, или путем ручной доработки. Поэтому оптимальным допуском на размеры деталей в этом случае считается допуск $\pm 0,5$. Более высокие требования по точности сопряжены с большими затратами труда.

Еще менее изученными являются точностные характеристики сборочных операций: сварки, клепки, болтовых соединений. Источником погрешностей при выполнении этих операций являются деформации, возникающие в результате неравномерного нагрева (при сварке), местных пластических деформаций (при клепке), возникновения напряжений при установке болтов с натягом. Погрешности, возникающие при различных видах соединений, зависят от размеров изделий и могут доходить до нескольких миллиметров, устранение которых иногда производится правкой.

Операционные погрешности различных технологических процессов определяют экспериментально, путем замеров действительных размеров партии деталей. Чем больше деталей подвергается обмеру, тем более объективные данные можно получить о точностных показателях процесса. Экспериментальные данные лежат в основе различных методов исследования действительных погрешностей обработки деталей и их сборки. Замеры большого числа деталей дают возможность определить поле погрешностей, характер рассеивания погрешностей в этом поле, центр группирования погрешностей, медиану или моду вариационного ряда, среднее квадратичное отклонение, что дает достаточно полную точностную характеристику данного технологического процесса и позволяет прогнозировать точность процессов.

Для установления влияния на точностные характеристики какой-либо технологической операции используется известный нам уже статистический метод, в основе которого лежит построение практических и теоретических кривых распределения (рассеивания) размеров деталей [6].

Поясним сущность метода на примере исследования точностной характеристики процесса группового раскроя пакета листов по шаблону на раскройном радиально-фрезерном станке (рис. 5.1). Копировальная втулка 3 перемещается по контуру шаблона фрезерования 2, все время находясь с ним в контакте; нижняя режущая часть фрезы 4 образует канавку, которая отделяет детали 1 от общего пакета листов 5, размер $A_{ш.ф.}$ шаблона фрезерования 2 копируется таким образом на детали 1 размером A , который является замыкающим звеном размерной цепи.

Задача сводится к тому, чтобы определить точностную характеристику данной операции путем измерения действительного размера $A_д$ и определения производственных погрешностей относительно заданного размера. Примем проектный размер $A_{п} = 200_{-0,4}$ мм, число обследуемых деталей 100 штук, тогда наибольший предельный размер будет равен 200 мм, наименьший — 199,6 мм, поле допуска $\delta_A = 0,4$ мм. После измерений деталей (погрешность измерения не учитываем) их следует распределить по действительному размеру $A_д$ по отдельным интервалам и подсчитать, сколько их оказалось в каждом интервале. Все поле рассеивания размера A разделим на девять равных интервалов через каждые 0,05 мм. Количество деталей в каждом интервале, отнесенное ко всем измеренным деталям, характеризует частоту попадания размера $A_д$ в данный интервал. Результаты измерений представлены в табл. 5.1.

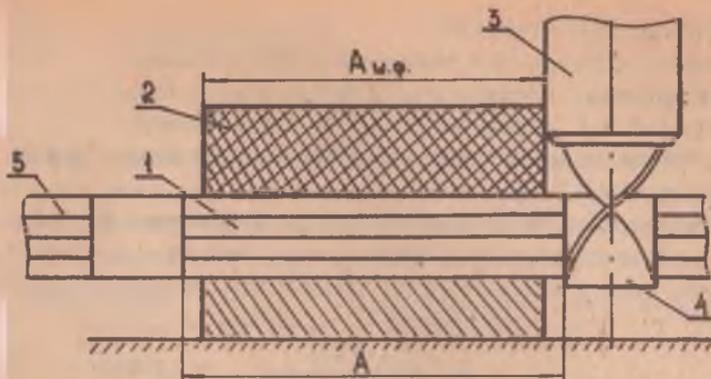


Рис. 5.1. Групповой раскрой листов фрезерованием на радиально-фрезерном станке:
 1—детали; 2—шаблон фрезерования; 3—капировальная втулка;
 4—пальцевая фреза; 5—пакет листов; А и.ф. — размер шаблона фрезерования; А — размер деталей.

Таблица 5.1

Результаты измерений деталей

Интервал размеров A_g , мм	Частота y , шт	Средний размер A интервала, мм	Произведение $A_g \cdot y$	$(A_{гф} - A)^2$	$(A_{гф} - A_g)^2 y$
200,05-200,00	2	200,025	400,050	0,0408	0,0816
200,00-199,95	5	199,975	999,875	0,0231	0,1155
199,95-199,90	12	199,925	2399,100	0,0104	0,1248
199,90-199,85	19	199,875	3797,625	0,0027	0,0513
199,85-199,80	23	199,825	4595,875	0,0000	0,0001
199,80-199,75	20	199,775	3995,500	0,0023	0,0461
199,75-199,70	12	199,725	2396,700	0,0096	0,1152
199,70-199,65	4	199,675	798,700	0,0219	0,0876
199,65-199,60	3	199,625	598,875	0,0392	0,1176

На рис.5.2 дано графическое изображение рассеивания размеров. Ступенчатая диаграмма, состоящая из прямоугольников с шириной, равной величине интервала, и высотой, равной частоте, называется гистограммой распределения (рассеивания). Если концы прямоугольников соединить прямыми или плавными линиями, мы получим практическую кривую распределения размера A_g .

С увеличением числа измерений и числа интервалов при сокращении их полей получается плавная кривая распределения, которая более объективно представляет характер рассеивания размеров деталей.

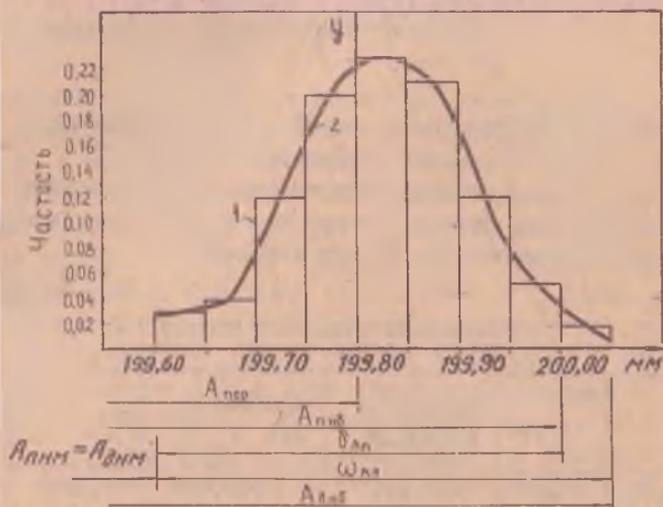


Рис. 5.2. Кривая распределения (рассеивания) размеров деталей: 1 - ступенчатая, 2 - практическая, $A_{д.нб}$, $A_{д.нм}$, $\omega_{ад}$ - действительные наибольший, наименьший размеры, поле погрешностей действительного размера, $A_{п.нб}$, $A_{п.сп}$, $A_{п.нм}$, $\delta_{пд}$ - проектные наибольший, средний, наименьший размеры, поле допуска

Начало координат на рис. 5.2 соответствует среднему проектному размеру $A_{п.сп} = 199,80$ мм.

На основе практической кривой распределения определяются параметры, характеризующие точность технологического процесса.

I. Поле рассеивания размеров, численно равное полю операционных погрешностей размера A_g :

$$\omega_{ад} = A_{д.нб} - A_{д.нм} = 0,45 \text{ мм.}$$

В нашем случае поле действительных погрешностей больше поля допуска $\delta_{An} = 0,4$ мм. Из диаграммы видно, что две детали размером $A_g > 200$ мм выходят за пределы поля допуска и их следует доработать.

2. Центр группирования или центр рассеивания размеров характеризует интервал размеров, попадание в который при изготовлении деталей упомянутой операцией имеет наибольшую вероятность. Положение центра группирования определяется средним значением действительных размеров:

$$A_{d.c.p.} = \frac{A_{d1} Y_1 + A_{d2} Y_2 + A_{d3} Y_3 + \dots + A_{dk} Y_k}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_k} \quad (5.I)$$

В нашем примере $A_{d.c.p.} = 199,823$ мм.

Центр группирования, как правило, не совпадает с серединой поля рассеивания ω_{Ad} , а также с серединой поля допуска δ_{An} , заданного проектом, и положение которого совпадает с началом координат кривой распределения.

Центр группирования размеров является весьма важной точностной характеристикой процесса: с течением времени положение его может изменяться, например, в связи с износом фрезы и шаблона фрезерования.

Несимметричность кривой рассеивания характеризуется разностью

$$A_{d.c.p.} - \frac{A_{2\sigma} + A_{3\sigma}}{2} = 0,002 \text{ мм,}$$

которая представляет собой смещение центра группирования с середины поля рассеивания. Большое значение имеет также соответствие центра группирования размеров среднему проектному размеру $A_{n.c.p.}$, выраженному разностью

$$A_{d.c.p.} - A_{n.c.p.} = A_{d.c.p.} - \frac{A_{n.нб} + A_{n.нм}}{2} = 0,023 \text{ мм.}$$

Эта разность характеризует смещение центра группирования с середины поля допуска на размер A_n . Совпадение этих центров гарантирует лучшие точностные показатели процесса. При существенном несовпадении во всех возможных случаях необходимо корректировать положение центра группирования, приближая его к середине поля допуска путем изменения звеньев размерной цепи, например, путем замены копировальной втулки или доработывая контур шаблона фрезерования, а также применяя другие виды настройки технологического процесса на требуемый размер.

Следовательно, кроме условия $\omega_{Ad} \leq \delta_{An}$

необходимо еще согласование расположения поля погрешностей с расположением поля допуска.

3. Среднее квадратичное отклонение σ размеров от центра группирования (от $A_{д.ср}$) характеризует интенсивность рассеивания размеров около центра группирования; оно определяется уравнением

$$\sigma = \sqrt{\frac{(A_{д1} - A_{д.ср})^2 \cdot y_1 + (A_{д2} - A_{д.ср})^2 \cdot y_2 + \dots + (A_{дк} - A_{д.ср})^2 \cdot y_k}{y_1 + y_2 + \dots + y_k}} \quad (5.2)$$

Чем больше частота попадания размеров в зону, близкую к центру поля рассеивания, тем меньше абсолютное значение среднего квадратичного отклонения.

Практическая кривая распределения может быть аппроксимирована теоретической кривой распределения. Широкой практикой исследования случайных величин показано, что рассеивание производственных погрешностей стабильного технологического процесса может быть представлено так называемыми кривыми нормального распределения, определяемыми уравнением Гаусса:

$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5.3)$$

Параметр σ в этом уравнении фиксирует абсциссу, при которой кривая изменяет знак кривизны; он равен среднему квадратичному отклонению точек кривой от оси симметрии (центра группирования).

При использовании закона нормального распределения предельные отклонения случайной величины от центра группирования обычно выражают в долях среднего квадратичного отклонения и ограничивают обычно величинами $x = \pm 3\sigma$ (рис. 5.3). При этих значениях 99,73% отклонений случайной величины попадает в область внутри установленных пределов и 0,27% выходят из них.

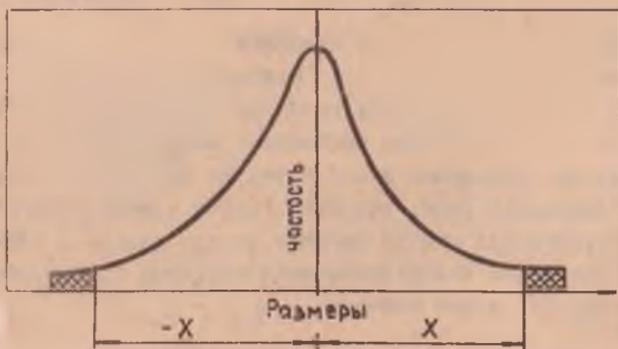


Рис. 5.3. Теоретическая кривая, характеризующая нормальный закон распределения

При этом величина заштрихованной части (точнее две заштрихованные площадки) теоретической кривой нормального рассеивания или, другими словами, соответствующая ей доля отклонений случайной величины, выходящая за пределы $+X$ и $-X$, может быть определена из равенства:

$$p = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (5.4)$$

После подстановки $x/\sigma = t$ в (5.4) получим:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \quad (5.5)$$

Для нахождения интеграла (5.5) можно использовать таблицу, приводимую почти в каждом курсе теории вероятностей.

Следует отметить, что каждая производственная погрешность является суммой случайных и систематических погрешностей.

Систематические погрешности обнаруживаются в ходе производства, т.е. при сравнении распределения погрешностей в последовательно изготовленных партиях продукции. Это показывает, что задача определения параметров распределения случайных погрешностей тесно связана с задачей обнаружения систематических погрешностей и их устранением.

Случайные производственные погрешности, как уже отмечалось, обладают тремя характеризующими их свойствами:

1. Чем меньше по абсолютной величине случайная погрешность, тем чаще она встречается в производственном процессе, то есть малые погрешности вероятнее больших.

2. Одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку (положительные и отрицательные) случайные погрешности обычно одинаково возможны и поэтому встречаются в производственном процессе одинаково часто.

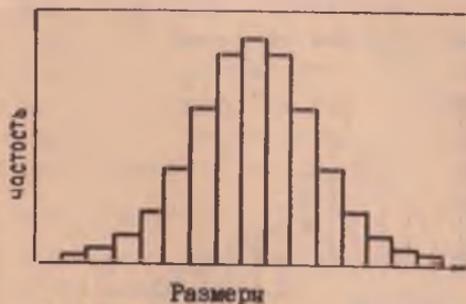


Рис. 5.4. Систематическая погрешность отсутствует

3. Абсолютная величина случайной погрешности не превосходит некоторой величины, называемой предельной погрешностью. Распределение количественного параметра изделия при наличии только случайных погрешностей будет симметричным относительно центра группирования в силу второго свойства. Из симметричности распределения следует, что математическое ожидание случайной погрешности будет равно нулю.

При наличии же систематических погрешностей центр распределения будет смещен и само распределение может оказаться асимметричным. Это положение можно проиллюстрировать графиками рис. 5.4 и 5.5.

При исследовании производственных погрешностей трудно провести резкую грань между случайными и систематическими погрешностями. Незначительные по величине систематические погрешности могут оказаться незаметными и перейти в категорию случайных.

Кроме того, подразделение на случайные и неслучайные не является абсолютным и неизменным, а существенным образом зависит от уровня техники производственного процесса и ряда других обстоятельств. Например, влияние температуры охлаждающей жидкости на точность размеров шлифуемых изделий еще недавно не учитывалось, и этот фактор относился к категории случайных. Новые же модели станков снабжены специальными устройствами для поддержания температуры поливочной жидкости на постоянном уровне. Поэтому при работе на таких станках погрешности, вызванные влиянием температуры охлаждающей жидкости, можно отнести к неслучайным.

Такой процесс производства, в котором все производственные погрешности относятся только к случайным, мы будем называть устойчивым, стабильным процессом производства.

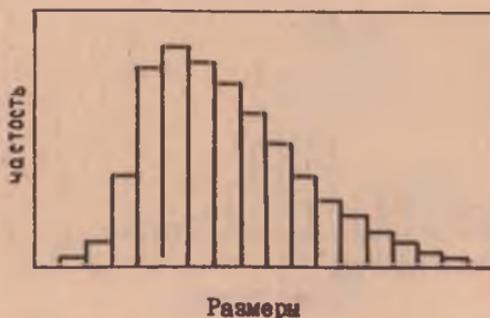


Рис.5.5. Присутствуют случайные и систематические погрешности

Стабильный процесс производства определяется прежде всего постоянством во времени средних и дисперсии распределения количественных параметров изделий и практической невозможностью уменьшения дисперсий производственных погрешностей без изменения технологического процесса.

Задача стабилизации производственного процесса сводится к обнаружению систематических погрешностей и к устранению вызывающих их причин.

Математическая статистика позволяет определить распределение случайных производственных погрешностей и установить, какие отклонения от этого распределения должны быть отнесены к погрешностям систематическим. Выясним статистико-математическую сущность проблемы обнаружения систематических погрешностей и установления их возможных причин. Рассмотрим крупносерийное или массовое производство какой-либо детали. Пусть измеряемым количественным параметром является размер (например, диаметр детали).

Произведем точные измерения (каким-либо измерительным прибором) в нескольких последовательных партиях деталей. Вычислим средние размеры и дисперсии в каждой партии. При стабильном процессе производства эти средние и дисперсии не будут существенно отличаться между отдельными партиями.

При наличии же систематических погрешностей мы будем иметь либо существенное смещение средних во времени, либо увеличение дисперсии.

Методы математической статистики позволяют установить существенность различия средних или дисперсий, то есть решить вопрос о наличии систематических погрешностей. Но это оказывается недостаточным. Для того чтобы обнаружить характер систематических погрешностей, надо знать закон распределения случайных погрешностей, а также какие отступления от средних размеров и как часто они могут происходить за счет случайных причин. Если мы обнаружим, что большие отступления от средних встречаются значительно чаще, чем это может быть объяснено наличием случайных погрешностей, то это будет свидетельствовать о наличии систематических погрешностей.

закон распределения случайных погрешностей, а также какие отступления от средних размеров и как часто они могут происходить за счет случайных причин. Если мы обнаружим, что большие отступления от средних встречаются значительно чаще, чем это может быть объяснено наличием случайных погрешностей, то это будет свидетельствовать о наличии систематических погрешностей.

Л и т е р а т у р а

1. Венцель Е.С. Теория вероятностей. - М.:Наука, 1965.-247 с.
2. ГОСТ 16263-70. Метрология - термины.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. - М.: Наука, 1970. - 104 с.
4. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. - М.:Издательство Московского университета, 1977. - 112 с.
5. Длин А.М. Математическая статистика в технике. - М.:Советская наука, 1958. - 466 с.
6. Горбунов М.Н. Основы технологии производства самолетов. -М.: Машиностроение, 1976. - 258 с.

Приложение

Таблица коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha}(n)$ и Гаусса $K_{\alpha}(n)$

n	α						
	0,1	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
2	0,16	1	2	6,3	12,7	63,7	636,6
3	0,14	0,82	1,3	2,9	4,3	9,9	31,6
4	0,14	0,77	1,3	2,4	3,2	5,8	12,9
5	0,13	0,74	1,2	2,1	2,8	4,6	8,6
6	0,13	0,73	1,2	2,0	2,6	4,0	6,9
10	0,13	0,70	1,1	1,8	2,3	3,3	4,8
20	0,13	0,69	1,1	1,7	2,1	2,9	3,9
30	0,13	0,68	1,1	1,7	2,0	2,8	3,7
40	0,13	0,68	1,1	1,7	2,0	2,7	3,6
60	0,13	0,68	1,0	1,7	2,0	2,7	3,5
∞	0,13	0,67	1,0	1,6	2,0	2,6	3,3

Введение	3
1. Основное содержание математической статистики	4
2. Некоторые понятия теории вероятностей	5
2.1. Плотность вероятности	7
2.2. Математическое ожидание случайной величины	7
2.3. Законы распределения вероятностей	8
3. Применение математической статистики при обработке эксперимен- тальных данных	8
3.1. Элементарные сведения об измерениях	8
3.2. Погрешности при измерениях и их классификация	10
3.3. Источники погрешностей	13
3.4. Задача измерения	13
3.5. Обработка результатов прямых измерений	14
3.5.1. Оценка систематических погрешностей при измерениях	14
3.5.2. Оценка случайных погрешностей прямых измерений. Гистограмма. Закон нормального распределения. Довери- тельный интервал и доверительная вероятность	15
3.5.3. Распределение Стьюдента (Госсета)	20
3.5.4. Порядок обработки результатов прямых измерений	20
3.6. Обработка результатов косвенных измерений	22
3.6.1. Вычисление погрешности косвенных измерений с помощью логарифмирования функции	25
3.6.2. Приближенные методы вычисления погрешностей косвенных измерений	26
3.6.3. Порядок обработки результатов косвенных измерений	27
3.7. Правила приближенных вычислений	27
3.8. Графическое представление результатов измерений	29
4. Метод наименьших квадратов	31
4.1. Нахождение параметров линейной зависимости вида $y(t) = a + bt$	34
4.2. Нахождение параметров квадратичной зависимости вида $y(t) = a + bt + ct^2$	36
4.3. Общий случай выравнивания опытных кривых способом на- именьших квадратов	37

5. Анализ производственных погрешностей методами математической статистики	40
5.1. Производственные погрешности и их классификация.	40
Л и т е р а т у р а	50
Приложение Таблица коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha}(n)$ и Гаусса $K_{\alpha}(n)$	51

Составитель Виталий Алексеевич Барвинок

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
В ПРОИЗВОДСТВЕ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Техн. редактор Н.М.К а х е н в к
Корректор Н.С.К у п р и я н о в а

Подписано в печать 22.05.84. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 2,5. Уч.-изд.л. 2,0. Т. 600 экз. Заказ № 4234
Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.
Обл.тип.им. В.П.Мяги, г. Куйбышев, Вещека, 60.