

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

методические указания к лабораторным работам

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для обучающихся Самарского университета по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 38.03.01 Экономика, 38.03.02 Менеджмент, 38.03.05 Бизнес-информатика

Составители: *М.И. Гераськин,*
О.А. Кузнецова,
К.Ю. Орлова

САМАРА
Издательство Самарского университета
2021

УДК 338(075)
ББК 65.23я7

Составители: *М.И. Гераськин, О.А. Кузнецова, К.Ю. Орлова*

Рецензенты: д-р экон. наук, проф. Д. Ю. И в а н о в;
д-р экон. наук, проф. С. Г. С и м а г и н а

Математическая экономика: методические указания к лабораторным работам / составители: *М.И. Гераськин, О.А. Кузнецова, К.Ю. Орлова*. – Самара: Издательство Самарского университета, 2021. – 32 с.

Рассматриваются математические модели представления производственного процесса на основе аппарата производственных функций, математические методы оптимизации издержек производства и формирования производственной программы, оптимальной по критерию прибыльности коммерческой деятельности; анализируются математические модели потребительского выбора.

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика и другим экономическим направлениям очной, очно-заочной и заочной форм обучения.

УДК 338(075)
ББК 65.23я7

СОДЕРЖАНИЕ

1 Производственные функции: построение и анализ экономико-математических характеристик	4
2 Изолинии производственных функций	8
3 Функция издержек в долгосрочном периоде	10
4 Средние и предельные издержки в долгосрочном периоде	13
5 Функция издержек в краткосрочном периоде	14
6 Средние издержки в краткосрочном периоде.....	15
7 Оптимизация прибыли в условиях совершенной конкуренции.....	17
8 Оптимизация прибыли в условиях монополии.....	20
9 Оптимизация прибыли в условиях дуполии	23
10 Анализ функции полезности	26
11 Решение задачи потребительского выбора	28
Библиографический список	31

1 ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ: ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Цель работы: изучение методов построения производственных функций и анализа их экономико-математических характеристик.

Исходные данные к работе: 1) автотранспортная фирма за последние 5 лет характеризовалась следующими показателями хозяйственной деятельности (таблица 1).

Таблица 1. Коэффициенты производственных функций

Год выпуска	Объем перевозок, тонн · км	Количество автомобилей, ед.	Численность работников, чел.
1	1200/№	3	9
2	1700/№	5	10
3	2800/№	8	18
4	3500/№	10	22
5	4800/№	14	30

Определить объём перевозок в шестой год, если запланировано довести количество автомобилей до 20 единиц, численность работников до 35 человек.

2) железобетонный завод за последние 5 лет характеризовался следующими показателями хозяйственной деятельности (таблица 2).

Таблица 2. Коэффициенты производственных функций

Год выпуска	Объем бетона, тонн	Количество бетонных установок, единиц	Численность работников, чел.
1	500/№	1	3
2	900/№	2	10
3	1200/№	3	14
4	1400/№	4	20
5	1500/№	5	25

Определить объём производства бетона в шестой год, если запланировано довести количество установок до 8 единиц, численность работников до 35 человек.

В таблицах символом «№» обозначен номер варианта работы, соответствующий номеру студента в списке группы.

Задание: построить графики кривых выпуска, на основе которых выбрать вид производственной функции:

линейная

$$Q = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

или функция Кобба-Дугласа

$$Q = AX_1^\alpha X_2^\beta.$$

Определить коэффициенты функций методом наименьших квадратов, рассчитать и проанализировать основные экономико-математические параметры функций.

Порядок выполнения работы

1. Построить графики («точечные диаграммы») объемов выпуска от ресурсов, аналогичные кривым выпуска, по данным о затратах ресурсов и объемах продуктов, приведенных в таблицах задания.

2. Провести анализ графиков и выбрать вид производственной функции.

3. Для определения коэффициентов производственных функций сформировать следующие таблицы:

- *коэффициенты*: первоначальные значения (начальные приближения) задаются произвольно, например, равными 1 (таблица 3);

- *расчет отклонений* (таблица 4): столбцы Q_t , x_{1t} , x_{2t} , заполняются на основе данных задания в год t , а столбец $Q=Q(x_t)$ рассчитывается по формуле соответствующей производственной функции.

Таблица 3. Коэффициенты производственных функций

a_1	a_2	A	α	β
1	1	1	1	1

Таблица 4. Расчет суммы квадратов отклонений производственных функций от фактических значений

Год (t)	Q_t	x_{1t}	x_{2t}	$Q=Q(x_t)$	$(Q_t-Q(x_t))^2$
1					
2					
и т.д.					
					$\Sigma (Q_t-Q(x_t))^2$

4. С помощью надстройки «Поиск решения» процессора Excel (вкладка «Данные», группа «Анализ») минимизировать значение ячейки $\Sigma(Q_t - Q(x_t))^2$, варьируя ячейки коэффициентов $a_1, a_2, A, \alpha, \beta$.

5. Подставить найденные значения коэффициентов в выражения производственных функций.

6. Построить графики кривых выпуска (аналогично рисунку 1), задавая произвольные значения затрат ресурсов, сравнить графики с построенными ранее кривыми производственной функции.

Расчет значений для $K=const$

L	Q
0	0
1	306,67
...	
15	1148,65

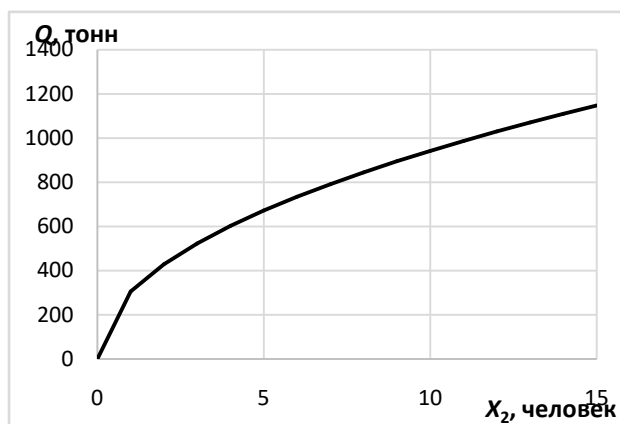


Рисунок 1. Кривая выпуска

7. Рассчитать планируемый объем выпуска продукта в 6-м году, используя планы затрат ресурсов, указанные в задании.

8. Для функции Кобба-Дугласа в таблице, аналогичной таблице на рисунке 1, определить следующие экономико-математические параметры:

- среднюю производительность ресурсов AQ_{xi}

$$AQ_{x_2} = \frac{Q}{X_1} = AX_1^\alpha X_2^{\beta-1};$$

- предельную производительность ресурсов MQ_{xi}

$$MQ_{x_2} = \frac{\partial Q}{\partial X_2} = \beta AX_1^\alpha X_2^{\beta-1}.$$

9. Построить графики средней и предельной производительности производственных функций (аналогично рисунку 2), задавая произвольные значения затрат ресурсов; провести анализ графиков.

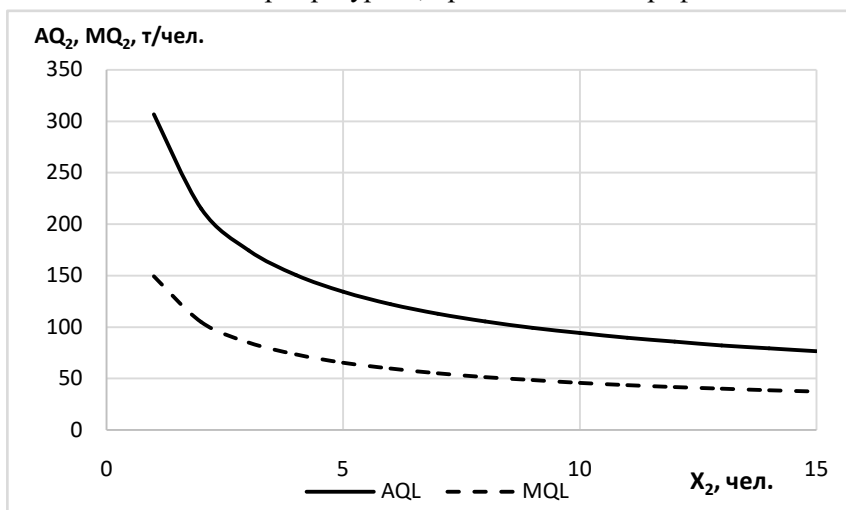


Рисунок 2. Кривые средних и предельных продуктов

10. Сделать выводы по проделанной работе о формах кривых выпуска для различных производственных функций, о способах планирования бизнеса с помощью производственных функций, о характере изменения предельных и средних продуктов и их значении для анализа бизнес-процессов.

2 ИЗОЛИНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Цель работы: освоение навыков построения и анализа основных кривых, для которых параметры производственных функций имеют постоянные значения.

Исходные данные к работе: производственные функции, полученные в результате выполнения лабораторной работы 1.

Задание: построить графики семейства изоквант для функции Кобба-Дугласа, определить выражение предельной нормы замены, записать уравнение изоклины и построить ее график; провести анализ графиков.

Порядок выполнения работы

1. Построить графики изоквант $X_2(X_1)$ аналогично рисунку 3 для функции Кобба-Дугласа при трех различных объемах производства Q_1, Q_2, Q_3 , соответствующих первому, второму и третьему годам работы предприятия по данным, приведенным в таблицах задания к лабораторной работе 1; расчет графиков проводить по формуле

$$X_2 = \sqrt[\beta]{\frac{Q}{A}} \frac{1}{X_1^{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

в табличном виде (аналогично таблице 4), используя коэффициенты эластичности, рассчитанные в лабораторной работе 1.

2. Провести анализ изоквант, сравнив их характер и положение, объяснить причины изменения особенностей этих графиков.

3. При указанных значениях коэффициентов эластичности записать формулу предельной нормы замещения ресурсов:

$$MRS_{X_1, X_2} = \frac{MQ_1}{MQ_2} = \frac{\alpha X_2}{\beta X_1}.$$

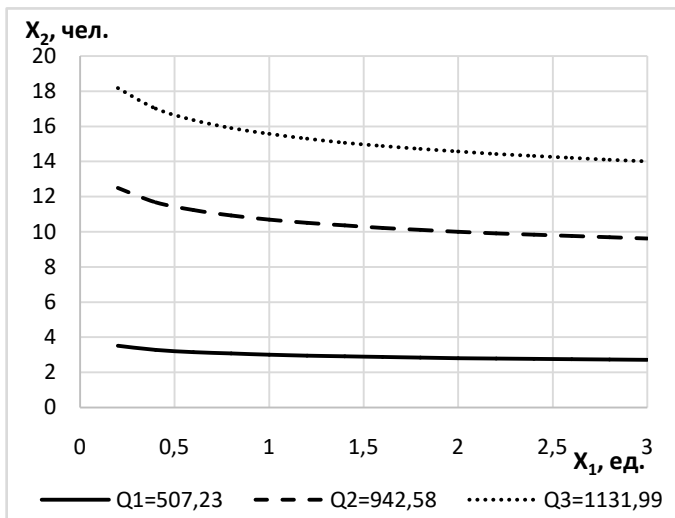


Рисунок 3. Карта изоквант

4. Построить три изоклины (аналогично рисунку 4), рассчитав три различных значения нормы предельной нормы технологического замещения ресурсов, основываясь на данных о затратах ресурсов, соответствующих первому, второму и третьему годам работы предприятия, приведенных в таблицах задания к лабораторной работе 1:

4.1. Вычислить три константы, подставив количество ресурсов, израсходованных в t -й год, в следующую формулу:

$$MRS'_{X_1 X_2} = \frac{\alpha X_2(t)}{\beta X_1(t)}.$$

4.2. построить три линии-изоклины, задавая произвольные значения X_1 , и вычисляя X_2 по следующей формуле:

$$X_2 = MRS'_{X_1 X_2} \frac{\beta}{\alpha} X_1,$$

где $t=1,2,3$ – годы работы предприятия.

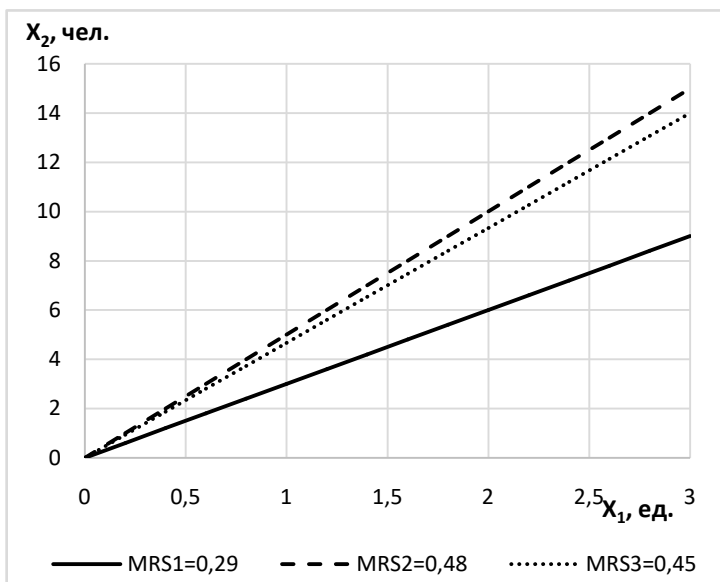


Рисунок 4. Карта изоклин

5. Провести анализ изоклин, сравнив эффективность замены в различные годы работы предприятия, объяснить причины изменения эффекта замены;

6. Сделать выводы по проделанной работе о формах и свойствах изоквант и изоклин для производственной функции Кобба-Дугласа, о способах планирования бизнеса с помощью изоквант и изоклин.

3 ФУНКЦИЯ ИЗДЕРЖЕК В ДОЛГОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

Цель работы: освоение навыков построения и анализа кривых издержек в долгосрочном периоде.

Исходные данные к работе: меховая фирма для изготовления шапок использует меховые шкурки по цене $800/(1+0,1N_0)$ руб. за шкурку и обратную кожу по цене $600/(1+0,1N_0)$ руб. за шкурку.

Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам равны $0,3/(1+0,05\text{№})$ и $0,5/(1+0,05\text{№})$ соответственно, $A=1$.

Задание: определить функции спроса на ресурсы и функцию издержек, если потребление ресурсов не ограничено и технология описывается функцией Кобба-Дугласа. Построить графики функций спроса на ресурсы и функции издержек.

Порядок выполнения работы

1. Записать задачу минимизации издержек в долгосрочном периоде, подставив исходные данные: цена шкурки – p_1 , цена кожи – p_2 , коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам - α , β соответственно.

2. Записать функцию Кобба-Дугласа в виде

$$Q = AX_1^\alpha X_2^\beta .$$

3. Записать функции спроса на ресурсы и функцию издержек для долгосрочного периода, подставив исходные данные в следующие формулы:

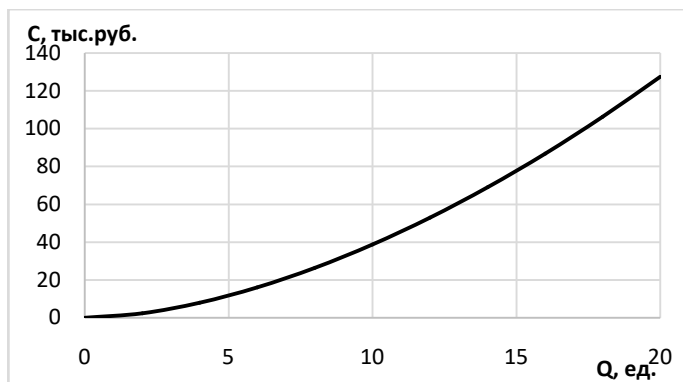
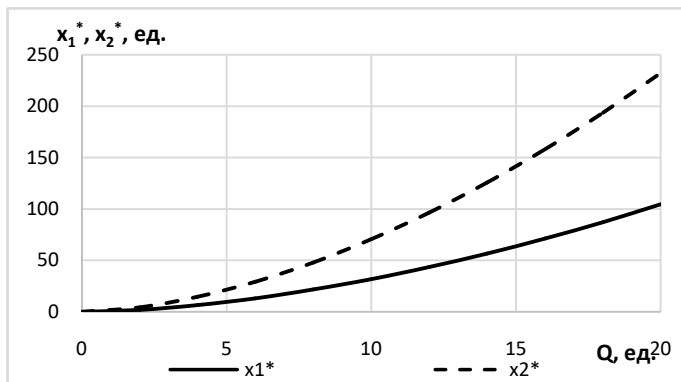
$$X_1^*(Q) = \left(A \left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right]^\beta \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad X_2^*(Q) = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \left(A \left[\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right]^\beta \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$C(Q) = DQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

где $D = p_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[A \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$.

4. Составить таблицу (рисунок 5), в которой рассчитать значения $X_1^*(Q)$, $X_2^*(Q)$, $C(Q)$ по вышеприведенным формулам. Переменной величиной является Q .

5. Построить графики аналогично рисунку 5.



Q	x_1^*	x_2^*	C
0	0	0	0
...			
10	31,77	70,60	38,73
...			
20	104,57	232,38	127,47

Рисунок 5. Функции спроса на ресурсы и функция издержек в долгосрочном периоде

6. Сделать выводы по проделанной работе о формах кривых спроса на ресурсы и кривой издержек для функции Кобба-Дугласа, о способах планирования бизнес-процессов с помощью этих кривых.

4 СРЕДНИЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ИЗДЕРЖКИ В ДОЛГОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

Цель работы: освоение навыков построения и анализа кривых средних и предельных издержек в долгосрочном периоде.

Исходные данные: использовать данные к работе 3.

Задание: определить функции средних и предельных издержек в долгосрочном периоде. Построить графики функций.

Порядок выполнения работы

1. При $r=\alpha+\beta$ записать функции средних и предельных издержек

$$AC_L(Q) = \frac{C_L(Q)}{Q} = DQ^{\frac{1}{r}-1},$$

$$MC_L(Q) = \frac{\partial C_L(Q)}{\partial Q} = \frac{1}{r} DQ^{\frac{1}{r}-1} = \frac{1}{r} AC_L(Q).$$

2. Подставить значения D и r из результатов работы 3.

3. Составить вспомогательную таблицу (рисунок 6), в которой рассчитать значения $AC_L(Q)$ и $MC_L(Q)$. Чтобы найти значения $MC_L(Q)$, следует значения $AC_L(Q)$ умножить на коэффициент $1/r$.

4. Построить графики $AC_L(Q)$ и $MC_L(Q)$ по столбцам таблицы, аналогично графикам на рисунке 6.

5. Сделать выводы по проделанной работе о характере изменения средних и предельных издержек при различных типах эффекта расширения масштаба, о способах планирования бизнес-процессов с помощью кривых средних и предельных издержек.

Q	AC	MC
0	0	0
2	1,22	2,09
4	2,00	3,45
6	2,68	4,61
8	3,30	5,67
10	3,87	6,66
12	4,42	7,59
14	4,93	8,48
16	5,43	9,33
18	5,91	10,16
20	6,37	10,95

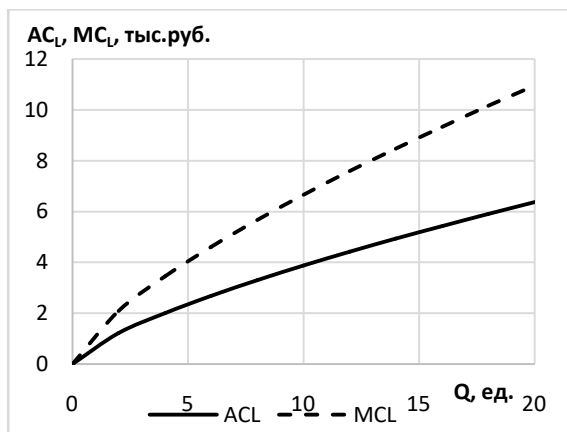


Рисунок 6. Средние и предельные издержки в долгосрочном периоде при $r < 1$

5 ФУНКЦИЯ ИЗДЕРЖЕК В КРАТКОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

Цель работы: освоение навыков построения и анализа кривых издержек в краткосрочном периоде.

Исходные данные: использовать данные к работе 3, кроме того, расход обратной кожи по условиям договора с поставщиком ограничен объемом $(5+0,01N_0)$ шкурок в месяц.

Задание: определить функции спроса на ресурсы и функцию издержек, если потребление одного из ресурсов ограничено (т.е. в краткосрочном периоде) и технология описывается функцией Кобба-Дугласа; построить графики функций спроса на ресурсы и функции издержек.

Порядок выполнения работы

1. Записать задачу минимизации издержек в краткосрочном периоде, подставив исходные: цена шкурки – p_1 , цена кожи – p_2 , коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам - α , β соответст-

венно, b_2 , – количество кожи, установленное условием договора поставки.

2. Рассчитать параметр функции издержек в краткосрочном периоде:

$$g = \left(\frac{1}{Ab_2^\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

3. Записать функции спроса на ресурсы и функцию издержек для краткосрочного периода, подставив исходные данные в следующие формулы:

$$X_1^*(Q) = gQ^{\frac{1}{\alpha}}, \quad X_2^*(Q) = b_2,$$
$$C_s(Q) = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}} + p_2 b_2.$$

4. Составить таблицу (рисунок 7), в которой рассчитать значения $X_1^*(Q)$, $X_2^*(Q)$, $C_s(Q)$ по вышеуказанным формулам. Переменной величиной является Q .

5. По столбцам таблицы построить графики (рисунок 7).

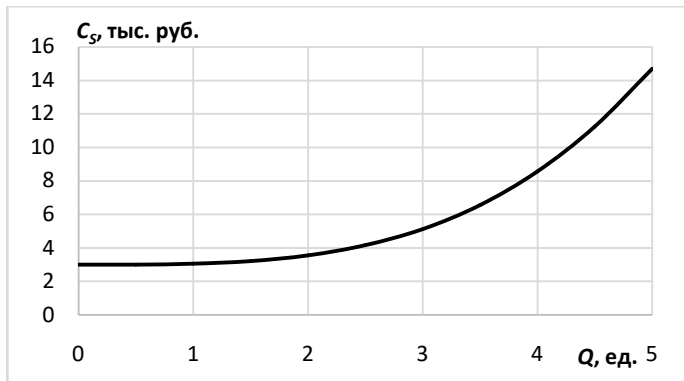
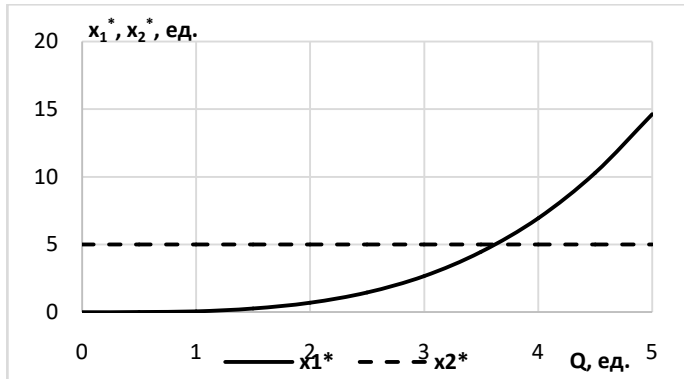
6. Сделать выводы по проделанной работе об особенностях краткосрочного периода планирования бизнес-процессов, о свойствах функций издержек в долгосрочном (работа 3) и краткосрочном периодах.

6 СРЕДНИЕ ИЗДЕРЖКИ В КРАТКОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

Цель работы: освоение навыков построения и анализа кривой средних издержек в краткосрочном периоде.

Исходные данные: использовать данные к работам 3 и 5.

Задание: определить функцию средних издержек. Построить график функции.



Q	x_1^*	x_2^*	C
0	0	5	3
		...	
1	0.07	5	3.05
		...	
5	14.62	5	14.70

Рисунок 7. Функции спроса на ресурсы и функция издержек в краткосрочном периоде

Порядок выполнения работы

1. Записать функции средних и предельных издержек, подставив исходные данные в следующие формулы:

$$AC_s(Q) = p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}-1} + \frac{p_2 b_2}{Q},$$

$$MC_s(Q) = \frac{1}{\alpha} p_1 g Q^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

2. Составить таблицу (рисунок 8), в которой рассчитать средние и предельные издержки при переменном значении Q .
3. По таблице построить график $AC_s(Q)$, $MC_s(Q)$.
4. Сделать выводы по проделанной работе об особенностях краткосрочного периода планирования бизнес-процессов, о свойствах функций средних издержек в долгосрочном (работа 4) и краткосрочном периодах.

Q	ACS	MCS
0		0,00
0,5	6,01	0,04
1	3,05	0,18
...		
5	2,94	7,80

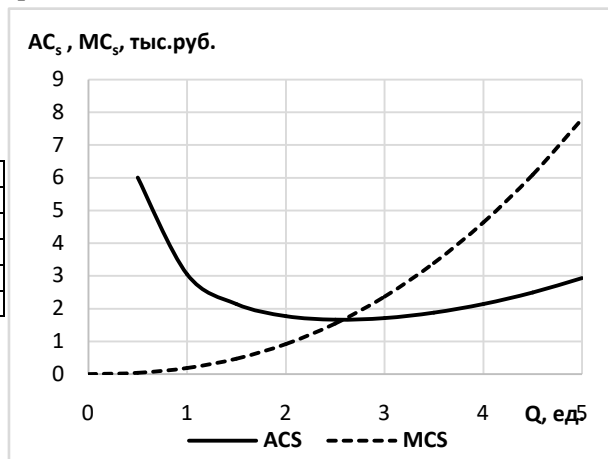


Рисунок 8 – Средние и предельные издержки в краткосрочном периоде

7 ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ В УСЛОВИЯХ СОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Цель работы: освоение способов определения оптимального выпуска продукции и максимальной прибыли фирмы на рынке совершенной конкуренции. Построение и анализ графиков функций дохода, издержек и прибыли фирмы.

Исходные данные к работе: фирма по производству линолеума использует пластмассу по цене $(6+0,05N_0)$ руб. за кг и краси-

тель по цене $(8+0,05N_0)$ руб. за кг и продает товар по цене $(100+N_0)$ руб. за кв. м. Коэффициенты эластичности выпуска по ресурсам равны $0,3 \cdot (1+0,01N_0)$ и $0,5/(1+0,01N_0)$ соответственно, $A=1$. Если фирма действует в краткосрочном периоде, то расход пластмассы по условиям договора с поставщиком ограничен объемом $(1000+N_0)$ кг в месяц.

Задание: определить функции спроса на ресурсы, оптимальный объем выпуска и максимальное значение прибыли.

Порядок выполнения работы

1. Определить оптимальный объем выпуска фирмы в долгосрочном периоде Q_L^* , подставив исходные данные в формулу:

$$Q_L^* = A \frac{1}{1-(\alpha+\beta)} \left(\frac{p_0 \alpha}{p_1} \right)^{\frac{\alpha}{1-(\alpha+\beta)}} \left(\frac{p_0 \beta}{p_2} \right)^{\frac{\beta}{1-(\alpha+\beta)}}.$$

2. Определить оптимальный объем выпуска фирмы в краткосрочном периоде Q_S^* , подставив исходные данные в формулу:

$$Q_S^* = A \frac{1}{1-\beta} b_1^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \left(\beta \frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

3. Рассчитать параметры D , g подставив исходные данные в формулы:

$$D = p_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[A \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad g = \left(\frac{1}{A b_1^\alpha} \right)^\beta.$$

4. Найти максимальные значения прибыли фирмы в долгосрочном периоде Π_L^* и в краткосрочном периоде Π_S^* , подставив исходные данные в формулу:

$$\Pi^* = R^*(Q^*) - C(Q^*),$$

где $R^*(Q^*) = p_0 Q^*$, $C_L(Q^*) = D(Q^*)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$, $C_S(Q^*) = p_1 b_1 + p_2 g(Q^*)^{\frac{1}{\beta}}$.
 Подставить в эти формулы значения оптимальных объемов выпуска фирмы, найденные в пп. 1 и 2.

5. Построить графики функций дохода, издержек и прибыли фирмы (рисунок 9) по формулам:

$$R(Q) = p_0 Q,$$

$$C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad C_S(Q) = p_1 b_1 + p_2 g Q^{\frac{1}{\beta}},$$

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q),$$

задавая Q переменной величиной. Диапазон значений Q следует выбирать так, чтобы была видны точки пересечения кривых $R(Q)$, $C(Q)$, а также зоны прибыли и убытка.

6. Сделать выводы по проделанной работе о различии способов расчета оптимального объема продаж и прибыли в долгосрочном и краткосрочном периодах, о преимуществах и проблемах планирования бизнес-процессов в различных периодах.

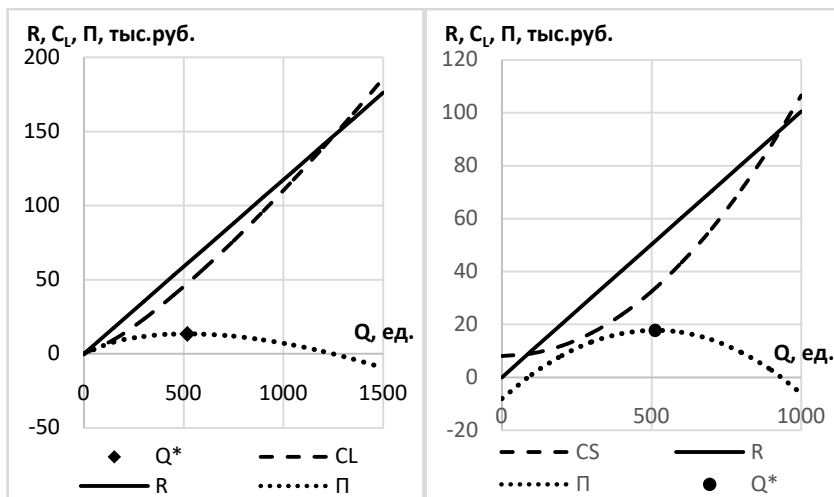


Рисунок 9. Анализ прибыли фирмы в долгосрочном и краткосрочном периодах

8 ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ В УСЛОВИЯХ МОНОПОЛИИ

Цель работы: освоение способов определения оптимального выпуска продукции фирмы на монопольном рынке при различных эффектах расширения масштаба производства. Построение и анализ графиков функций дохода, издержек и прибыли.

Исходные данные к работе: фирма-монополист сотовой связи оплачивает эфир (1-й ресурс) по цене $(300+N_0)$ руб. в час и труд операторов – 2-й ресурс, причем ставка оплаты труда одного сотрудника $(0,06+0,01N_0)$ руб. Цена определяется выражением: $1000-0,1Q$ (руб. за час связи).

Задание: определить оптимальный объем выпуска в случае $A=1$ и а) при убывающей отдаче от расширения масштаба $\alpha=0,1$; $\beta=0,4$; б) при отсутствии эффекта расширения масштаба $\alpha=0,4$; $\beta=0,6$. Найти оптимальный с точки зрения прибыли объём выпуска и максимальную прибыль. Построить графики дохода, издержек в долгосрочном периоде, прибыли.

Порядок выполнения работы

1. По виду функции цены услуги (обратная функция спроса на услугу)

$$p(Q) = p_0 + \bar{p}Q$$

определить параметры p_0 и \bar{p} , сравнив вид этой функции с исходными данными.

2. Рассчитать оптимальный объем продаж монополиста в следующих случаях:

2.1. При убывающей отдаче от расширения масштаба в условиях монополии используется формула

$$Q^* = \frac{P_0}{2D - 2\bar{p}}.$$

2.2. При отсутствии эффекта от расширения масштаба в условиях монополии используется формула

$$Q^* = \frac{D - p_0}{2\bar{p}}.$$

Коэффициент $D = p_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[A \left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \right)^\beta \right]^{-\frac{1}{\alpha+\beta}}$ принимает раз-

личные значения в случаях 2.1 и 2.2.

3. Построить графики функций дохода, издержек и прибыли фирмы (рисунок 10, 11) по формулам:

$$R(Q) = p_0 Q,$$

$$C_L(Q) = DQ^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q),$$

задавая Q переменной величиной. Диапазон значений Q следует выбирать так, чтобы были видны точки пересечения кривых $R(Q)$, $C(Q)$, а также зоны прибыли и убытка.

4. Сделать выводы: 1) о выборе формулы для расчёта оптимального объёма выпуска монополиста; 2) о форме кривой дохода монополиста; 3) о форме кривых издержек при разных эффектах расширения масштаба производства; 4) о максимальной прибыли для разных эффектов расширения масштаба производства.

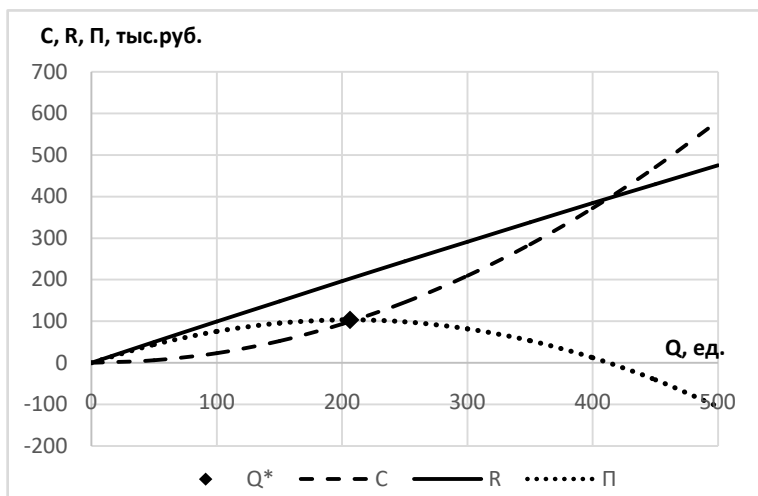


Рисунок 10. Кривые дохода, издержек и прибыли при отрицательном эффекте расширения масштаба производства

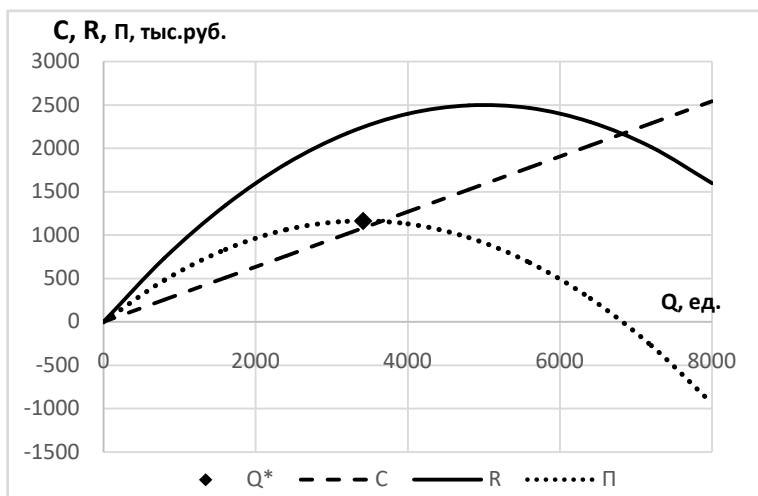


Рисунок 11. Кривые дохода, издержек и прибыли при отсутствии эффекта расширения масштаба производства

9 ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛИ В УСЛОВИЯХ ДУПОЛИИ

Цель работы: анализ результатов различных стратегий фирм на рынке олигополии. Определение объёмов выпуска и прибыли каждой фирмы, совокупной прибыли на рынке. Сравнение результатов и выбор наиболее эффективного варианта поведения олигополистов.

Исходные данные к работе: две фирмы сотовой связи работают в условиях дуополии; функции издержек (за год) описываются выражением $C_i=cQ_i+d$, $i=1,2$, $c=(0,4+0,01\text{№})$ руб. (за млрд минут), $d=(70+0,1\text{№})$ млрд руб.; функция спроса, выражающая стоимость минуты трафика, имеет вид $p_0=a-b(Q_1+Q_2)$, где $a=(2+0,01\text{№})$ рублей, $b=0,001$ рублей за млрд минут.

Задание: в случае дуополии Курно построить кривые реакции фирм, определить равновесные объёмы выпуска и сумму прибыли каждой фирмы при этом объёме. Решить эту задачу, если первая фирма (лидер) считает, что конкурент (ведомый) реагирует в соответствии с гипотезой Курно. Решить задачу, если обе фирмы (лидеры) предполагают, что конкурент реагирует в соответствии с гипотезой Курно. Решить задачу в условиях кооперативной дуополии.

Порядок выполнения работы

1. Построить кривые реакции (рисунок 12) первой и второй фирм по формулам:

1.1. Модель Курно

$$Q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_2}{2}, Q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_1}{2}.$$

1.2. Модель равновесия Стэкельберга

$$Q_1 = \frac{a-c}{1,5b} - \frac{Q_2}{1,5}, Q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{Q_1}{2}.$$

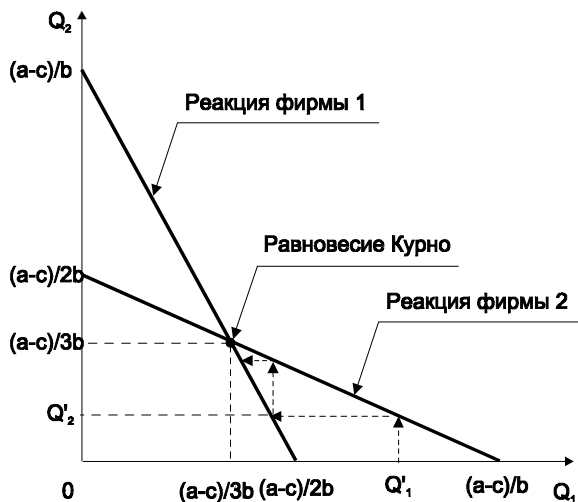


Рисунок 12. Равновесие Курно.

1.3. Модель неравновесия Стэкельберга

$$Q_1 = \frac{a-c}{1,5b} - \frac{Q_2}{1,5}, \quad Q_2 = \frac{a-c}{1,5b} - \frac{Q_1}{1,5}.$$

1.4. Кооперативная дуополия

$$Q_1 + Q_2 = \frac{a-c}{2b}.$$

Построение линий реакций (прямых) выполнять, задавая равными нулю поочередно Q_1 и Q_2 , а вторую переменную вычисляя по формуле уравнения реакции.

2. Определить объёмы продаж первой и второй фирм в условиях равновесия по формулам

2.1. Модель Курно

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{3b}.$$

2.2. Модель равновесия Стэкельберга:

$$Q_1^* = \frac{a-c}{2b}, Q_2^* = \frac{a-c}{4b}.$$

2.3. Модель неравновесия Стэкельберга:

$$Q_1^* = \frac{a-c}{2,5b}, Q_2^* = \frac{a-c}{2,5b}.$$

2.4. Кооперативная дуополия

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a-c}{4b}.$$

Графически такое равновесие определяется точкой пересечения кривых реакций.

3. Найти прибыль каждой фирмы по формулам

3.1. Равновесие Курно

$$\Pi_1^K = \Pi_2^K = \frac{(a-c)^2}{9b} - d.$$

3.2. Равновесие Стэкельберга

$$\Pi_1^C = \frac{(a-c)^2}{8b} - d, \Pi_2^C = \frac{(a-c)^2}{16b} - d.$$

3.3. Неравновесие Стэкельберга

$$\Pi_1^{CH} = \Pi_2^{CH} = \frac{2(a-c)^2}{25b} - d.$$

3.4. Кооперативная дуополия, при которой определяется сумма прибыли двух фирм

$$\Pi^\Sigma = \frac{(a-c)^2}{4b} - 2d.$$

4. Сделать выводы об эффективности различных ситуаций на рынке дуополии.

10 АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Цель работы: анализ возможности применения различных видов функции полезности для описания предпочтений покупателей.

Исходные данные к работе: Покупатель потребляет товарный набор из двух товаров: а) турпоездка и речной круиз; б) костюм и обувь. Предпочтения потребителя описываются а) логарифмической функцией полезности с коэффициентами $a_1=2(1+0,01\text{№})$, $a_2=3(1+0,01\text{№})$, $x_{10}=1$, $x_{20}=1$; б) степенной функцией полезности с коэффициентами $A=10+0,1\text{№}$, $b_1=0,3$, $b_2=0,7$, $x_{10}=1+0,01\text{№}$, $x_{20}=1+0,02\text{№}$.

Задание: построить графики кривых полезности первого товара для различных функций. Рассчитать предельные полезности товаров, если их количества равны $x_1=2+\text{№}$, $x_2=2+2\text{№}$. Построить кривые безразличия при значениях полезности 5, 7, 9.

Порядок выполнения работы:

1. Записать логарифмическую функцию полезности и степенную функцию полезности, подставив исходные данные в следующие формулы:

$$U = a_1 \ln(x_1 - x_{01}) + a_2 \ln(x_2 - x_{02}),$$

$$U = (x_1 - x_0)^{b_1} \cdot (x_2 - x_0)^{b_2}.$$

2. Построить графики (рисунок 13) кривых полезности первого товара для этих функций, для чего задать количество второго товара равным $x_2=20(1+0,01\text{№})$, и рассчитать полезность по этим формулам, при переменном значении x_1 . В случае логарифмической функции принимать в расчетах $x_1 > x_{10} + 1$.

3. Рассчитать предельные полезности товаров по формулам

3.1. Логарифмическая функция полезности

$$MU_1 = \frac{a_1}{x_1 - x_{10}}, MU_2 = \frac{a_2}{x_2 - x_{20}}.$$

3.2. Степенная функция полезности

$$MU_1 = Ab_1(x_1 - x_{10})^{b_1-1}(x_2 - x_{20})^{b_2},$$

$$MU_2 = Ab_2(x_1 - x_{10})^{b_1}(x_2 - x_{20})^{b_2-1}.$$

Подставить в эти формулы исходные данные и количества выбранных потребителем товаров $x_1=2+№$, $x_2=2+2№$.

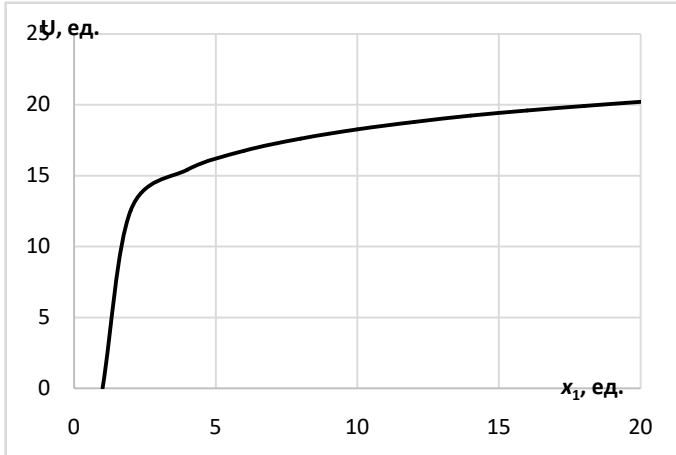


Рисунок 13. Логарифмическая функция полезности

4. Построить графики (рисунок 14) кривых безразличия для этих функций по следующим формулам:

4.1. Логарифмическая функция полезности

$$x_2 = \exp\left(\frac{U - a_1 \ln(x_1 - x_{10})}{a_2}\right) + x_{20}.$$

4.2. Степенная функция полезности

$$x_2 = \left(\frac{U}{A(x_1 - x_{10})^{b_1}}\right)^{\frac{1}{b_2}} + x_{20}.$$

Графики строить при переменном значении x_1 . В случае логарифмической функции принимать в расчетах $x_1 > x_{10} + 1$. Подставлять в эти формулы значения полезности $U_1=5$, $U_2=7$, $U_3=9$.

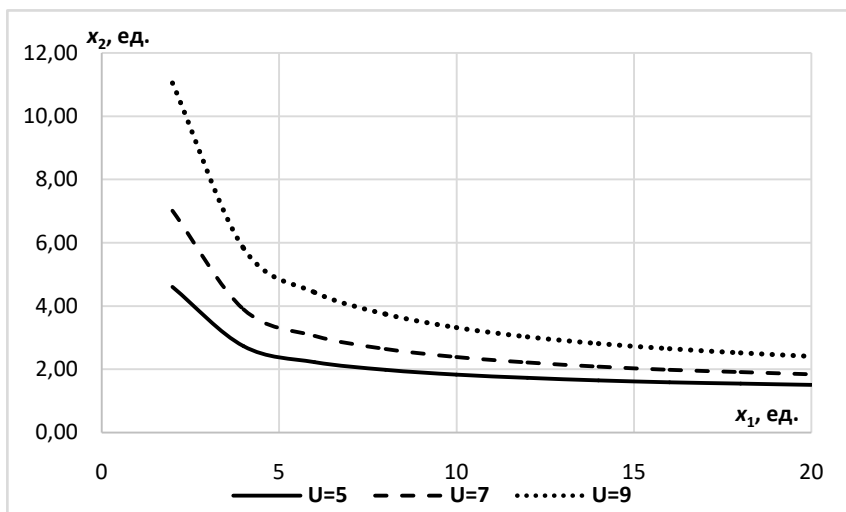


Рисунок 14. Кривые безразличия

5. Сделать выводы по результатам работы о характере кривых полезности для различных функций полезности, о значении предельных полезностей для анализа выбора покупателя, о свойствах кривых безразличия и эффекта замены.

11 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

Цель работы: изучение методов исследования поведения потребителя в процессе выбора и приобретения товаров при различных функциях полезности, описывающих предпочтения покупателей.

Исходные данные к работе: использовать данные работы 10, причем в случае а) цены товаров равны 5 тыс. руб. и 9 тыс. руб., выделенный на эти цели годовой доход составляет $(70+N_0)$ тыс. руб.; в случае б) цены товаров равны 10 тыс. руб. и 3 тыс. руб., выделенный на эти цели годовой доход составляет $(50+N_0)$ тыс. руб.

Порядок выполнения работы

1. Подставить в уравнение бюджетной линии

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

исходные данные, т.е. p_1 , p_2 – цены товаров, I – доход покупателя.

2. Графически решить задачу потребительского выбора. На плоскости товаров с картой кривых безразличия, построенной в результате выполнения работы 10, построить бюджетную линию, используя уравнение этой линии в явном виде:

$$x_2 = \frac{I}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Затем, изменяя значение полезности U для одной из кривых безразличия, подобрать такое положение этой кривой, при которой существует единственная точка касания с бюджетной линией (рисунки 15).

3. Найти аналитическое решение задачи потребительского выбора, для чего решить систему уравнений

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, \\ \frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1(x_1)}{MU_2(x_2)}. \end{cases}$$

Во второе уравнение подставить выражения предельных полезностей товаров, найденные в работе 1, а также цены товаров. Затем использовать функцию «Поиск решения» табличного процессора Excel, в которой изменяемыми ячейками являются переменные x_1, x_2 , а уравнения являются ограничениями.

4. Сделать выводы по проделанной работе о свойствах оптимального потребительского выбора.

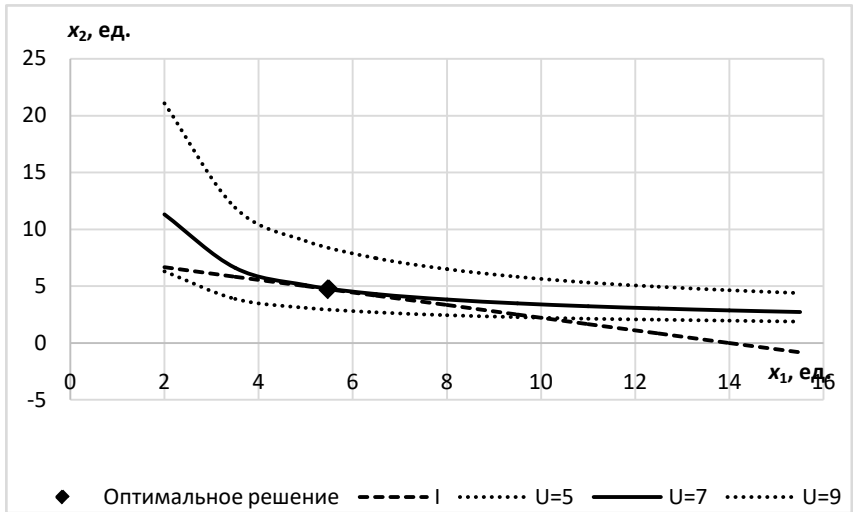


Рисунок 15. Графическое решение задачи потребительского выбора

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ашманов, С.А. Введение в математическую экономику: учебник / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. Гальперин, В.М. Микроэкономика: учебник в 3-х т. / В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев, В.И. Моргунов. – СПб.: Экономическая школа, 2008.
3. Гераськин, М.И. Математическая экономика: учебник / М.И. Гераськин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2011. – 176 с.
4. Гришанов, Г.М. Математические основы экономической теории производства: учебное пособие / Г.М. Гришанов, М.И. Гераськин. – Самара: Изд-во СГАУ, 2001. – 102 с.
2. Замков, О.О. Математические методы в экономике [Текст]: учебник / О.О.Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1998. – 368 с.
3. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория [Текст]: учебник / М. Интрилигатор. – М.: Прогресс, 1975. – 605 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Методические указания к лабораторным работам

Составители:

***Гераськин Михаил Иванович
Кузнецова Ольга Александровна
Орлова Кристина Юрьевна***

Редактор И.И. Спиридонова
Компьютерная верстка И.И. Спиридоновой

Подписано в печать 17.11.2021. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 2,0.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. – 29(РЗМ) /2021.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.