ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Методические указания
к выполнению индивидуальных домашних заданий*

САМАРА 1995

Составитель Л. Н. П р о к о ф ь е в

УДК 517

Линейные операторы и эрмитовы формы в унитарном пространстве: Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. Л. Н. П р о к о ф ь е в. Самара, 1995. 40 с.

Содержатся теоретические сведения, решения типовых задач и варианты индивидуальных заданий (25 вариантов) по разделу линейной алгебры — линейным операторам и эрмитовым формам в унитарном пространстве. Могут быть использованы для организации самостоятельной работы студентов с целью экономии аудиторного времени.

Предназначены для студентов Самарского аэрокосмического университета (спец. 22.02). Выполнены на кафедре прикладной математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева

Рецензент А. А. К а л е н т ь е в

I. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение 1. Если

$$(f(x),\ y) = (x,\ \varphi(y)), \tag{1}$$

$x,\ y \in V$, где V — унитарное или евклидово пространство, то линейный оператор φ называется сопряженным по отношению к линейному оператору f:

φ обозн. f^*.

Теорема 1. Пусть f и φ — сопряженные операторы в унитарном пространстве V,

$$\left(e_1, e_2, \dots, e_n\right) \tag{2}$$

— ортономированный базис V, A — матрица оператора f в базисе (2), B — матрица оператора φ в базисе (2). Тогда $A = \overline{B}'$.

Доказательство. Запишем равенство (1) для пары базисных векторов $x = e_k,\ y = e_j$:

$$\left(f\left(e_k\right), e_j\right) = \left(e_k, \varphi\left(e_j\right)\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, e_j\right) = \left(e_k, \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\left(e_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{ij}}\left(e_k, e_i\right) \Leftrightarrow a_{jk} = \overline{b_{kj}} \Leftrightarrow A = \overline{B}'.$$

Замечание 1. Из доказательства теоремы ясно, что равенство $\left(f\left(e_k\right), e_j\right) = \left(e_k, \varphi\left(e_j\right)\right)$ равносильно равенству $A = \overline{B}'$.

З а м е ч а н и е 2. Если f и φ — сопряженные операторы в унитарном пространстве V, A и В — матрица операторов f и φ соответственно в базисе (2), то $A=\overline{B}^{'}$.

Теорема 2. В конечном унитарном пространстве V каждый линейный оператор обладает единственным сопряженным.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим в пространстве V ортонормированный базис (2). Пусть f — линейный оператор пространства V, $A = \left(a_{ik}\right)_n$ — матрица f в базисе (2).

Рассмотрим матрицу

$$B = \overline{A}^{'} = \left(\overline{a}_{ki}\right)_n. \qquad (3)$$

Этой матрице в базисе (2) соответствует оператор φ. Покажем, что $\varphi = f^*$. На основании замечания 1 к теореме 1 соотношение (3) равносильно соотношению

$$\left(f\left(e_k\right), e_j\right) = \left(e_k, \varphi\left(e_j\right)\right), \qquad (4)$$

т.е. соотношение (1) для базисных векторов выполняется. Возьмем произвольные два вектора

$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ и $y = \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n$

и рассмотрим скалярные произведения $(f(x), y)$ и $(x, \varphi(y))$:

$$\left(f(x), y\right) = \left(f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right), \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_j \left(f\left(e_k\right), e_j\right);$$

$$\left(x, \varphi(y)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_j \left(e_k, \varphi\left(e_j\right)\right).$$

Сравнивая эти соотношения и учитывая (4), будем иметь $\left(f(x), y\right) = \left(x, \varphi(y)\right)$, а значит, соотношение (1) выполняется для любой пары векторов x и y, т. е. у любого линейного оператора f существует сопряженный линейный оператор φ.

Докажем его единственность. Пусть ψ — линейный оператор такой, что

$$\left(f(x), y\right) = \left(x, \psi(y)\right) \qquad \forall\, x, y \in V,$$

тогда $\left(x, \varphi(y)\right) - \left(x, \psi(y)\right) = \left(x, \varphi(y) - \psi(y)\right) = 0.$

Это означает, что вектор $\varphi(y)-\psi(y)$ ортогонален любому вектору пространства V, поэтому $\varphi(y)-\psi(y)=\theta$, т.е. $\varphi(y)=\psi(y)\quad\forall\, y\in V$, что и означает: $\varphi=\psi$. Единственность доказана, **теорема доказана.**

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы справедливо и для евклидова пространства V. Доказательство для этого случая то же самое, следует лишь учесть, что $\overline{A}'=A'$, $\overline{\eta}_j=\eta_j$.

2. САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Определение 2. Линейный оператор f унитарного или евклидова пространства V называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным:

$$f=f^*,\ \text{т.е. } \big(f(x),y\big)=\big(x,f(y)\big)\quad \forall\, x,y\in V. \tag{5}$$

Теорема 3. Для того чтобы оператор f унитарного пространства был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в ортонормированном базисе была эрмитово-симметричной, т.е. $A=\overline{A}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $A=\overline{A}'$, т.е. $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$. В некотором ортонормированном базисе матрица A соответствует некоторому оператору f. Тогда $\overline{A}'$ будет соответствовать сопряженному оператору f^* в этом ортонормированном базисе, но так как $A=\overline{A}'$, то $f=f^*$, т.е. f — самосопряженный оператор. **Достаточность доказана.**

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть f — самосопряженный оператор $\left(f=f^*\right)$ и пусть A — его матрица в некотором ортонормированном базисе. Тогда матрица оператора f^* есть $\overline{A}'$. Но так как $f=f^*$, то $\overline{A}'=A$, а это значит, что A — эрмитово-симметричная матрица. Необходимость доказана, **теорема доказана.**

З а м е ч а н и е. Если V — евклидово пространство, то для самосопряженности линейного оператора f необходимо и достаточно, чтобы его матрица A в ортонормированном базисе была симметричной, т.е. $A = {}^{t}A$.

Теорема 4. Собственные значения самосопряженного оператора унитарного пространства вещественны.

Доказательство. Пусть x — собственный вектор самосопряженного оператора f, отвечающий собственному значению λ. Тогда

$$\big(f(x),x\big) = \big(x, f(x)\big) \Rightarrow (\lambda x, x) = (x, \lambda x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(x,x) = \overline{\lambda}(x,x) \overset{(x,x)\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \text{ – вещественное число.}$$

Теорема доказана.

Замечание. Если V — унитарное пространство, то все корни характеристического многочлена любого линейного оператора f принадлежат полю C и, значит, являются собственными значениями этого оператора. Если же V — евклидово пространство, то корни характеристического многочлена оператора f, не принадлежащие R не являются собственными значениями f, однако для самосопряженного оператора f евклидова пространства справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 4.

Теорема 4'. Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора f n-мерного евклидова пространства являются собственными значениями этого оператора, т.е. являются действительными числами.

Доказательство. Предположим противное: $\lambda = \xi + i\eta$ $(\eta \neq 0)$ — корень характеристического многочлена. Подставляя λ_0 в систему для нахождения собственного вектора, получим систему

$$\begin{cases} (\lambda_o - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (\lambda_o - a_{nn})x_n = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

которая имеет ненулевое решение

$$\left(\xi_1 + i\eta_1,\ \xi_2 + i\eta_2, \ldots,\ \xi_n + i\eta_n\right),$$

так как определитель этой системы равен 0. Подставим это решение в систему (6) и перенесем в полученных равенствах члены с $\lambda_0 = \xi + i\eta$ в правые части. В результате получим следующие справедливые равенства:

$$\begin{cases} a_{11}(\xi_1 + i\,\eta_1) + a_{12}(\xi_2 + i\,\eta_2) + \ldots + a_{1n}(\xi_n + i\,\eta_n) = (\xi + i\,\eta)(\xi_1 + i\,\eta_1), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}(\xi_1 + i\,\eta_1) + a_{n2}(\xi_2 + i\,\eta_2) + \ldots + a_{nn}(\xi_n + i\,\eta_n) = (\xi + i\,\eta)(\xi_n + i\,\eta_n). \end{cases}$$

Отделяя в этих равенствах вещественные и мнимые части, придем к следующим двум системам равенств:

$$\begin{cases} a_{11}\,\xi_1 + \ldots + a_{1n}\,\xi_n = \xi\,\xi_1 - \eta\,\eta_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}\,\xi_1 + \ldots + a_{nn}\,\xi_n = \xi\,\xi_n - \eta\,\eta_n \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} a_{11}\,\eta_1 + \ldots + a_{1n}\,\eta_n = \xi\,\eta_1 + \eta\,\xi_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}\,\eta_1 + \ldots + a_{nn}\,\eta_n = \xi\,\eta_n + \eta\,\xi_n. \end{cases} \qquad (**)$$

Введем в рассмотрение векторы

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i \quad \text{и} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\, e_i \ .$$

Тогда соотношения $(*)$ и $(**)$ примут вид

$f(x) = \xi x - \eta y$,

$f(x) = \xi y + \eta x$, откуда

$\big(f(x), y\big) = \xi(x, y) - \eta(y, y)$,

$\big(x, f(y)\big) = \eta(x, x) + \xi(x, y)$.

Так как $\big(f(x), y\big) = \big(x, f(y)\big)$, то, вычитая из второго равенства первое, получим

$0 = \eta[(x, x) + (y, y)]$.

Так как $(x, x) + (y, y) \neq 0$, то $\eta = 0$.

Получили противоречие, которое доказывает, что характеристический многочлен может иметь только вещественные корни. **Теорема доказана.**

З а м е ч а н и е. Т.о., спектр самосопряженного оператора и в вещественном, и в комплексном линейном пространствах расположен на вещественной оси.

Лемма 1. Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем комплексных чисел C, а I — инвариантное подпространство пространства V. Тогда оператор f имеет в I хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. Пусть $\dim I = k$ и $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ — какой-либо базис I. Произвольный вектор $x \in I$ представляем в виде

$$x = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \ldots + x_k g_k \quad (7)$$

Так как I — инвариантное, то $f(g_i) \in I$ и поэтому

$$f(g_i) = a_{1i} g_1 + \ldots + a_{2i} g_2 + \ldots + a_{ki} g_k \qquad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

Здесь матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2k} \\ a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kk} \end{Vmatrix}$$

является матрицей оператора f пространства I в базисе $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$. Учитывая это, получаем

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} x_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i f(g_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{j=1}^{k} a_{ji} g_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i a_{ji}\right) g_j \quad (8)$$

Условие того, что x является собственным вектором оператора f, отвечающим собственному значению λ, т. е. равенство $f(x) = \lambda x$ в силу (7) и (8), можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ji} x_i\right) g_j = \lambda \sum_{j=1}^{k} x_j g_j .$$

Так как векторы $g_j \left(j = \overline{1,k}\right)$ линейно независимы, то последнее равенство возможно, если только

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ji} x_i = \lambda x_j \qquad \left(j = \overline{1,k}\right) \text{ или}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1k}x_k = 0, \\ -a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2k}x_k = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots + (\lambda - a_{kk})x_k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что существуют число $\lambda \in C$ и числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, не все равные 0, удовлетворяющие системе (9). Условием существования ненулевого решения однородной системы (9) является равенство

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} - a_{12} \ldots -a_{1k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -a_{k1} - a_{k2} \ldots \lambda - a_{kk} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Но (10) — уравнение степени k относительно λ с коэффициентами из поля C и потому имеет, по крайней мере, один (вообще говоря, комплексный) корень λ_o. Значит, существует такое число λ_o, что при $\lambda = \lambda_o$ система (9) имеет ненулевое решение $(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_k^o)$. Число λ_o является собственным значением, а вектор $x_o = x_1^o g_1 + x_2^o g_2 + \ldots + x_k^o g_k$ — собственный вектор из I оператора f, так как $f(x_0) = \lambda_0 x_0$, **что и тр.**

З а м е ч а н и е. Если I — инвариантное подпространство евклидова пространства V и f — самосопряженный оператор пространства V, то оператор f имеет в I хотя бы один собственный вектор.

Действительно, данный оператор f является самосопряженным оператором, действующим из I в I. Согласно теореме 4' все корни характеристического многочлена оператора f, действующего в I, являются вещественными. Поэтому существует вещественное число λ_o такое, что $|\lambda_o E - A| = 0$, т. е. определитель системы (9) равен 0. Т. о., система (9) при $\lambda = \lambda_o$ имеет ненулевое вещественное решение, определяющее координаты собственного вектора $x_o \in I$ и отвечающее собственному значению λ_o.

Лемма 2. Пусть f — самосопряженный оператор в n-мерном унитарном пространстве V, а e — его собственный вектор. Тогда совокупность V_1 векторов x, ортогональных e, есть $(n-1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно оператора f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что V_1 есть подпространство V. Пусть x — произвольный вектор из V. Представим его в виде

$$x = x_1 + (x - x_1), \text{ где } x_1 = \frac{(x,e)}{(e,e)}e.$$

Вектор x_1 принадлежит одномерному подпространству $I = L(e)$. Вектор $(x - x_1) \in V_1$, так как

$$(x - x_1, e) = (x,e) - (x_1,e) = (x,e) - (x,e) = 0.$$

Т. о., произвольный вектор $x \in V$ представляется в виде суммы двух векторов: $x_1 \in I$ и $x - x_1 \in V_1$, причем $I \cap V_1 = \{\theta\}$. Значит V есть прямая сумма подпространств , I и V_1. Так как V — n-мерное, I — одномерное пространства, то $\dim V_1 = n - 1$.

Покажем, что V_1 — инвариантно относительно f. Пусть $x \in V_1$, т. .е $(x,e) = 0$. Тогда

$$(f(x),e) = (x, f^*(e)) = (x, f(e)) = (x, \lambda e) = \lambda(x,e) = 0.$$

Это значит, что $f(x) \in V_1$, т. е. V_1 инвариантно относительно f.

З а м е ч а н и е. Если V — евклидово пространство, то утверждение леммы 2 справедливо. Доказательство то же самое.

Теорема 5. В n-мерном унитарном пространстве V существует ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора f пространства V. Матрица А оператора f в этом базисе диагональна и вещественна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 в V существует хотя бы один собственный вектор e_1 оператора f. Совокупность векторов из V, ортогональных вектору e_1 согласно лемме 2 образует $(n-1)$-мерное подпространство V_1, инвариантное относительно f. В этом подпространстве оператор f имеет хотя бы один собственный вектор e_2. Далее совокупность векторов из V_1, ортогональных e_2, образует $(n-2)$-мерное инвариантное подпространство V_2, в котором оператор f имеет по крайней мере один собственный вектор e_3 и т. д.

Следуя этим путем, мы получим искомую систему n попарно ортогональных собственных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Согласно теореме 4 соответствующие собственные значения вещественны. Ортогональную систему собственных векторов самосопряженного оператора f примем в качестве базиса в пространстве V: $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Так как $f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (i = \overline{1,n})$, то в выбранном базисе матрица A оператора f имеет диагональную структуру, причем диагональные элементы матрицы вещественны:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix} \tag{11}$$

Пусть $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Рассмотрим $\tilde{e}_i = \dfrac{e_i}{|e_i|}$, тогда

$f(\tilde{e}_i) = f\left(\dfrac{e_i}{|e_i|}\right) = \dfrac{1}{|e_i|} f(e_i) = \dfrac{1}{|e_i|} \lambda_i e_i = \lambda_i \dfrac{e_i}{|e_i|} = \lambda_i \tilde{e}_i$, т. е. матрица оператора f в ортонормированном базисе из собственных векторов этого оператора $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$ имеет также вид (11). **Теорема доказана.**

Следствие. Корню кратности m характеристического многочлена самосопряженного оператора f соответствует m линейно независимых собственных векторов.

Доказательство. Согласно теореме 5 существует базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид (11). В этом же базисе характеристическая матрица $\lambda E - A$ имеет вид

$$\lambda E - A = \begin{Vmatrix} \lambda - \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda - \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

где λ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ — собственные значения f. Пусть, например, λ_1 является корнем кратности m характеристического многочлена, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m$, но $\lambda_{m+1} \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq \lambda_1$. Тогда в матрице (12) первые m диагональных элементов при $\lambda = \lambda_1$ обращаются в 0, а остальные диагональные элементы отличны от 0. Поэтому $\operatorname{rang}(\lambda E - A) = n - m$. Отсюда следует, что система $(\lambda_1 E - A)X = 0$ имеет $n - (n - m) = m$ линейно независимых решений — собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1, **что и тр.**

Замечание. Утверждение теоремы 5 справедливо и для евклидова пространства V. Доказательство то же самое.

Теорема 6. Для того чтобы оператор f унитарного пространства V был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в V существовал ортонормированный базис, в котором матрица оператора диагональна и вещественна.

Доказательство.

Достаточность. Пусть матрица f в ортонормированном базисе $\left(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n\right)$ имеет вид (11), где λ_i — вещественны. Матрица сопряженного оператора f^* в этом ортонормированном базисе получается из матрицы оператора f транспонированием и заменой каждого элемента комплексно-сопряженным. Проделав это, убеждаемся, что

$$A_f^{\tilde{e}} = A_{f^*}^{\tilde{e}},$$

т. е. операторам f и f^* в одном и том же базисе отвечает одна и та же матрица. Значит, $f = f^*$.

Н е о б х о д и м о с т ь следует из теоремы 5. **Теорема доказана.**

Теорема 7. Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(\lambda_1$ и λ_2 - вещ.$)$. Тогда $(f(e_1), e_2) = \lambda(e_1, e_2)$, $(e_1, f(e_2)) =$ $= \lambda_2(e_1, e_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(e_1, e_2) = 0 \Rightarrow (e_1, e_2) = 0$, **что и тр.**

Теорема 5 позволяет дать следующую геометрическую интерпретацию самосопряженного оператора.

Пусть f — самосопряженный оператор унитарного или евклидова пространства V. Тогда в пространстве V существует n попарно ортогональных собственных единичных векторов, которые определяют в V n попарно ортогональных направлений. Каждому из таких направлений ставится в соответствие вещественное число λ_i (собственное значение f) и по каждому из этих направлений совершается сжатие или растяжение в $|\lambda_i|$ раз и, кроме того, отражение относительно $(n-1)$-мерного подпространства, ортогонального этому направлению, если соответствующее $\lambda_i < 0$.

3. УНИТАРНЫЙ ОПЕРАТОР

Определение 3. Если $\forall x, y$ унитарного (евклидова) пространства V $(f(x), f(y)) = (x, y)$, то оператор f называется унитарным (ортогональным).

Таким образом, унитарный и ортогональный операторы сохраняют скалярное произведение, а значит, и длину вектора.

Лемма. Если оператор f обратим слева $(g\,f = \varepsilon)$, то этот оператор обратим справа $(f\,g = \varepsilon)$ и, значит, $g = f^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g\,f = \varepsilon$ и $f(x) = \theta$, тогда $x = \varepsilon(x) = g\,f(x) = g(f(x)) = g(\theta) = \theta \Rightarrow \ker f = \{\theta\}$.

Пусть теперь $(e_1,\ldots,e_n)$ — базис. Если $f(e_1),\ldots,f(e_n)$ — линейно зависимая система векторов, т. е. $\alpha_1 f(e_1)+\ldots+\alpha_n f(e_n)=\theta$, где $(\alpha_1\ldots\alpha_n)\neq(0,\ldots 0)$, то для вектора $e=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n\neq\theta$ будет иметь место равенство $f(e)=\theta$. Следовательно, если $\ker f = \{\theta\}$, то $e=\theta$. Полученное противоречие доказывает, что векторы $f(e_1),\ldots,f(e_n)$ линейно независимы и составляют базис. В базисе $e_1'=f(e_1),\ldots,e_n'=f(e_n)$ семейство векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$ определяет оператор g, для которого $g(e_1')=e_1,\ldots,g(e_n')=e_n$ и, значит, $g\,f=\varepsilon$. Для этого же оператора g

$f\,g(e_1')=f(e_1)=e_1',\ldots,f\,g(e_n')=e_n'$ и, значит,

$f\,g(x)=x \ \ \forall x\in V$, т. е. $f\,g=\varepsilon$. Т. о., $g\,f=f\,g=\varepsilon$, т. е. $g=f^{-1}$, **что и тр.**

Теорема 8. Для того чтобы оператор f был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы $f\,f^*=f^*\,f=\varepsilon$, т. е. $f^*=f^{-1}$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть $f\,f^*=f^*\,f=\varepsilon$ и пусть $x,y\in V$. Тогда $(f(x),f(y))=(x,f^*\,f(y))=(x,y)$, т. е. f — унитарный оператор.

Необходимость. Пусть f — унитарный оператор, т. е. $\forall x,y\in V\ \ (f(x),f(y))=(x,y)$. Тогда

$$(f(x),f(y))=(x,f^*\,f(y))=(x,y)=(x,\varepsilon(y)).$$

Т. о., $(x,f^*\,f(y)-\varepsilon(y))=0$. Это равенство выполняется $\forall y\in V$ и $\forall x\in V$ только тогда, когда $f^*\,f(y)-\varepsilon(y)=\theta$, т. е. $f^*f(y)=\varepsilon(y)\,\forall y\in V$. Значит,

$$f^*f=\varepsilon,\ f\,f^*=\varepsilon,\ f^*=f^{-1}. \qquad (13)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы справедливо и для ортогонального оператора. Доказательство то же самое.

Выберем в пространстве V какой-нибудь ортонормированный базис и пусть f — некоторый унитарный оператор этого пространства. Если A — матрица оператора f, то матрица f^* есть $\overline{A}'$. Из соотношения (13) поэтому следует:

$$A\overline{A}' = \overline{A}'A = E. \tag{14}$$

Обратно: если в ортонормированном базисе матрица A какого-либо линейного оператора f удовлетворяет соотношениям (14), то оператор f удовлетворяет соотношениям (13) и, следовательно, является унитарным.

Определение 4. Матрица A, для которой $A\overline{A}' = \overline{A}'A = E$, называется унитарной.

Т. о., справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. Матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе является унитарной и обратно: если линейный оператор в некотором ортонормированном базисе имеет унитарную матрицу, то он является унитарным.

Определение 5. Матрица A, для которой $AA' = A'A = E$, называется ортогональной.

Теорема 9'. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе является ортонормированной и обратно: если линейный оператор в некотором ортонормированном базисе имеет ортогональную матрицу,то он является ортогональным.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

Теорема 10. Унитарный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ — ортонормированный базис в унитарном пространстве V и f — какой-нибудь унитарный оператор этого пространства. Так как унитарный оператор не меняет длин векторов и переводит ортогональные системы в ортогональные, то система векторов $\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right)$ будет снова ортонормированным базисом в пространстве V. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы справедливо и для ортогонального оператора.

Теорема 11. Если некоторый линейный оператор унитарного пространства V переводит некоторый ортонормированный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в ортонормированный базис $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$, то преобразование f является унитарным.

Доказательство. Возьмем в V произвольные векторы $a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$.

Имеем $(a, b) = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{\beta}_n$,

$$(f(a), f(b)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i), \sum_{i=1}^{n} \beta_i f(e_i) \right) = \alpha_1 \overline{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n \overline{\beta}_n .$$

Т. о., $(f(a), f(b)) = (a, b)$, т. е. оператор f является унитарным, **что и тр.**

Замечание. Аналогично доказывается, что линейный оператор евклидова пространства, переводящий ортонормированный базис в ортонормированный, является ортогональным.

Из теорем 10 и 11 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 12. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса унитарного (евклидова) пространства к другому ортонормированному базису этого пространства является унитарной (ортогональной) и обратно: если один из базисов ортонормированный, а матрица перехода является унитарной (ортогональной), то другой базис также является ортонормированным.

Для доказательства достаточно заметить, что матрица перехода от одного базиса к другому совпадает с матрицей линейного оператора, переводящего первый базис во второй.

Теорема 13. Собственные значения унитарного оператора по модулю равны 1.

Доказательство. Пусть x — собственный вектор унитарного оператора f, отвечающий собственному значению λ. Тогда $f(x) = \lambda x$ и $(f(x), f(x)) = (x, x)$. Тогда $(f(x), f(x)) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \overline{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2 (x, x)$. Отсюда $|\lambda|^2 = 1$, $|\lambda| = 1$, **что и тр.**

Т. о., спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности комплексной плоскости.

З а м е ч а н и е. Собственные значения ортогонального оператора равны $\pm\ 1$.

Действительно, $\left(f(x), f(x)\right) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 (x, x)$, откуда $\lambda^2 = 1$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭРМИТОВО-СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Рассмотрим эрмитово-симметричную матрицу A порядка n. Будем рассматривать A как матрицу самосопряженного оператора f в некотором ортонормированном базисе $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ n-мерного унитарного пространства V:

$$\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right) = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) A. \tag{15}$$

В пространстве V существует ортонормированный базис $\left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right)$, в котором матрица оператора f диагональна и вещественна (теорема 5). Обозначим эту матрицу через Λ. Тогда

$$\left(f\left(e'_1\right), f\left(e'_2\right), \ldots, f\left(e'_n\right)\right) = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right) \Lambda. \tag{16}$$

Далее, существует унитарная матрица $U = \left(u_{ij}\right)_n$, которая преобразует ортонормированный базис $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ в ортонормированный базис $\left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right)$:

$$\left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right) = \left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) U,$$

откуда

$$\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right) U^{-1}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (15), получим

$$\left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), \ldots, f\left(e_n\right)\right) = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right) U^{-1} A.$$

Обозначим $U^{-1} = \left(u^{o}_{ij}\right)_n$.

Так как $\left(f(e_1), f(e_2),\ldots, f(e_n)\right) \overset{(17)}{=} \left(f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u^{o}_{i1} e'_i\right),\ldots, f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u^{o}_{in} e'_i\right)\right) =$

$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u^{o}_{i1} f(e'_i),\ldots, \sum\limits_{i=1}^{n} u^{o}_{in} f(e'_i)\right) = \left(f(e'_1),\ldots, f(e'_n)\right)U^{-1}$, то

$$\left(f(e'_1),\ldots, f(e'_n)\right) = (e'_1,\ldots,e'_n)U^{-1}AU. \tag{18}$$

Сравнивая (16) и (18), имеем

$$\Lambda = U^{-1}AU \quad \text{или} \quad \Lambda = \overline{U}' AU, \tag{19}$$

откуда $A = U\Lambda U^{-1}$ или $A = U\Lambda \overline{U}'$, **что и тр.**

Замечание. Если A — симметричная вещественная матрица порядка n, то для нее найдется ортогональная матрица U такая, что

$\Lambda = U^{-1}AU$ или $\Lambda = U'AU$.

Доказательство аналогично.

Пример 1. Для эрмитово-симметричной матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4. \end{Vmatrix}$$

Найти такие унитарную матрицу U и диагональную вещественную матрицу Λ, чтобы

$\Lambda = \overline{U}' AU$.

Решение. Будем рассматривать A как матрицу самосопряженного оператора f в некотором ортонормированном базисе $(e_1, e_2,\ldots,e_n)$ унитарного пространства.

Построим ортонормированный базис из собственных векторов оператора f. Найдем для этого собственные значения оператора.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & i & 0 \\ -i & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 8\right) -$$

характеристический многочлен, корнями которого являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Найдем теперь соответствующие собственные векторы. Для этого решим систему

$$(\lambda E - A)X = 0$$

дважды: при $\lambda = 2$ и при $\lambda = 4$.

При $\lambda = \lambda_1 = 2$ получаем систему

$$\begin{cases} -\xi_1 + i\,\xi_2 \qquad = 0, \\ -i\,\xi_1 - \xi_2 \qquad = 0, \\ \qquad\qquad -2\,\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Например, вектор $f_1 = (i,1,0)$ будет собственным.

При $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 4$ получим систему

$$\begin{cases} \xi_1 + i\,\xi_2 + 0\,\xi_3 = 0, \\ -i\,\xi_1 + \xi_2 + 0\,\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Корню кратности 2 соответствуют два линейно независимых собственных вектора.

Такими векторами, например, будут

$f_2 = (-i,1,0)$ и $f_3 = (0,0,1)$.

Векторы f_2 и f_3 ортогональны. Если бы были найдены неортогональные решения системы, то следовало бы применить процесс ортогонализации к системе векторов f_2, f_3.

Т. о., векторы f_1, f_2, f_3 составляют ортогональный базис из собственных векторов. Нормируя эти векторы, мы получим векторы

$$\tilde{e}_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\tilde{e}_3 = \frac{f_3}{|f_3|} = (0,0,1),$$

которые составляют ортонормированный базис из собственных векторов оператора f. Матрицей перехода от базиса " $\tilde{e}$" к базису " $\tilde{\tilde{e}}$ " является унитарная матрица

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В новом базисе " $\tilde{\tilde{e}}$" матрица Λ оператора f имеет вид

$$\Lambda = \overline{U}^{\prime} AU = \begin{Vmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix},$$ **что и тр.**

Пример 2. Для данной симметричной матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Найти такие диагональную матрицу Λ и ортогональную матрицу U, чтобы $\Lambda = U^{\prime} AU$.

Решение. Симметричную матрицу A можно рассматривать как матрицу самосопряженного оператора f в некотором ортонормированном базисе (e_1, e_2, e_3).

$$\varphi(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda - 8 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 21\lambda^2 + 135\lambda - 243 =$$

характеристический многочлен, корнями которого (собственными значениями оператора f) будут $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$.

Найдем соответствующие собственные векторы. При $\lambda = 3$ однородная система $(\lambda_1 E - A)X = 0$ примет вид

$$\begin{Vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{rang}(\lambda_1 E - A) = 2.$$

Решением полученной системы является, например, ненулевой вектор $f_1 = (2, -1, 1)$.

При $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 9$ однородная система $(\lambda_2 E - A)X = \theta$ примет вид

$$\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \operatorname{rang}(\lambda_2 E - A) = 1.$$

Корню кратности 2 характеристического многочлена соответствуют два линейно независимых решения системы. Такими решениями, например, будут

$f_2 = (1, 2, 0)$ и $f_3 = (-1, 0, 2)$.

Так как векторы f_2 и f_3 не ортогональны, то применив к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта, получим ортогональную систему векторов:

$$f'_2 = (1, 2, 0),\ f'_3 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 2\right).$$

Рассмотрим базис из векторов

$$c_1 = f_1 = (2, -1, 1), c_2 = f'_2 = (1, 2, 0), c_3 = \frac{5}{2} f'_3 = (-2, 1, 5).$$

Базис (c_1, c_2, c_3) является ортогональным, но не нормированным.

Нормируя базис по формулам $\tilde{e}_i = \dfrac{c_i}{|c_i|}$, $i = 1, 2, 3$, получим векторы

$$\tilde{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \tilde{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ \tilde{e}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right),$$

составляющие ортонормированный базис из собственных векторов оператора f.

Матрица перехода от базиса " e " к базису " $\tilde{e}$ " имеет вид

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{Vmatrix}$$

и является ортогональной.

Матрица Λ оператора f в базисе " $\tilde{e}$ " имеет вид

$$\Lambda = U' A U = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{Vmatrix},$$ **что и тр.**

II. ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ В КОМПЛЕКСНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Пусть V — комплексное линейное пространство.

Определение 6. Числовая функция $f\ (x)$, $x \in V$ называется линейной формой первого (второго) рода, если:

а) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in V$,

б) $f(\alpha x) = \alpha f(x) \ \left(f(\alpha x) = \overline{\alpha} f(x)\right) \ \forall\, x \in V$ и $\forall\ \alpha \in C$.

Если $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — базис V, $x \in V$, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

Пусть $a_i = f(e_i)$ $(i = \overline{1,n})$. Для любой линейной функции $f(x)$ первого (второго) рода имеет место формула

$$f(x) = a_1 \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n \quad \left(f(x) = a_1 \bar{\xi}_1 + \ldots + a_n \bar{\xi}_n\right).$$

2. ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ

Определение 7. Числовая функция $f(x, y)$ от двух аргументов $x, y \in V$ называется эрмитово-билинейной формой, если она является линейной 1-го рода от x при каждом фиксированном значении y и линейной формой 2-го рода от y при каждом фиксированном значении x, т. е. если:

1) $f(x + z, y) = f(x, y) + f(z, y)$,
2) $f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$,
3) $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$,
4) $f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y)$.

Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — произвольный базис V,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \text{ и } y = \sum_{k=1}^{n} \eta_k e_k \text{ —}$$

произвольные векторы из V. Тогда для эрмитово-билинейной формы $f(x, y)$ имеем

$$f(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \xi_i \bar{\eta}_k, \tag{20}$$

где $a_{ik} = f(e_i, e_k)$.

Определение 8. Матрица $A = \left(a_{ij}\right)_n$, где $a_{ij} = f\left(e_i, e_j\right)$, называется матрицей эрмитово-билинейной формы $f\ (x,\ y)$ в базисе $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$.

Равенство (20) можно записать в матричном виде:

$$f(x,y) = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right) A \begin{Vmatrix} \overline{\eta}_1 \\ \overline{\eta}_2 \\ \vdots \\ \overline{\eta}_n \end{Vmatrix}. \tag{20'}$$

З а м е ч а н и е. Если линейное пространство V является действительным, то эрмитово-билинейные формы переходят в билинейные, т. е. в формы линейные 1-го рода по каждому из аргументов.

Определение 9. Эрмитово-билинейная форма $f\ (x,\ y)$ называется симметричной эрмитово-билинейной формой, если $\forall\ x, y \in V$:

$$f(y,x) = \overline{f(x,y)}. \tag{21}$$

Для симметричной эрмитово-билинейной формы

$$a_{ik} = f\left(e_i, e_k\right) = \overline{f\left(e_k, e_i\right)} = \overline{a_{ki}},\ \text{т. е.}$$

матрица A формы $f\ (x,\ y)$ в базисе $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ после транспонирования и замены элементов на комплексно-сопряженные переходит в себя, т. е. $A = \overline{A}'$.

Определение 10. Матрица A, для которой $A = \overline{A}'$, называется эрмитово-симметричной.

Т. о., матрица симметричной эрмитово-билинейной формы является эрмитово-симметричной.

Справедливо и **обратное утверждение:**

Пусть матрица $A = \left(a_{ij}\right)_n$ эрмитово-билинейной формы $f\ (x,\ y)$ эрмитово-симметрична, т. е. $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$. Тогда

$$f(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\overline{\eta_k}=\sum_{i,k=1}^{n}\overline{a_{ki}}\,\overline{\eta}_k\xi_i=$$

$$=\overline{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki}\eta_k\overline{\xi}_i}=\overline{f(y,x)},\quad \text{т.е. } f(x,y)\text{ –}$$

симметричная эрмитово-билинейная форма.

Пусть, например, $f(x,y)=\xi_1\overline{\eta}_1-i\xi_1\overline{\eta}_2+i\xi_2\overline{\eta}_1+2\xi_2\overline{\eta}_2$.

Эта форма является симметричной эрмитово-билинейной, т. к. $f(x,y)=\overline{f(y,x)}$.

Матрица $A=\begin{Vmatrix}1 & -i\\ i & 2\end{Vmatrix}$ этой формы является эрмитово-симметричной матрицей.

Теорема 14. Пусть эрмитово-билинейная форма $f(x, y)$ в базисе $(e_1,\ldots,e_n)$ пространства V имеет матрицу $A=(a_{ik})_n$, а в базисе $(e'_1,\ldots,e'_n)$ — матрицу $B=(b_{ik})_n$ и C — матрицу перехода от первого базиса ко второму, т. е. $(e'_1,\ldots,e'_n)=(e_1,\ldots,e_n)C$. Тогда

$$B=C'A\overline{C}. \tag{22}$$

Доказательство.

$$f(x,y)=(\xi_1,\ldots,\xi_n)A\begin{Vmatrix}\overline{\eta}_1\\ \vdots\\ \overline{\eta}_n\end{Vmatrix},$$

$$f(x,y)=(\xi'_1,\ldots,\xi'_n)B\begin{Vmatrix}\overline{\eta}'_1\\ \vdots\\ \overline{\eta}'_n\end{Vmatrix} \tag{23}$$

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi_n\end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix}\xi'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi'_n\end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix}\eta_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \eta_n\end{Vmatrix} = C\begin{Vmatrix}\eta'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \eta'_n\end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Vmatrix}\overline{\eta}_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \overline{\eta}_n\end{Vmatrix} = \overline{C}\begin{Vmatrix}\overline{\eta}'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \overline{\eta}'_n\end{Vmatrix}, \ (\xi_1,\dots,\xi_n) = (\xi'_1,\dots,\xi'_n)C'$$

$$f(x,y) = (\xi'_1,\dots,\xi'_n)C'A\overline{C}\begin{Vmatrix}\overline{\eta}'_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \overline{\eta}'_n\end{Vmatrix}. \tag{24}$$

Сравнивая (23) и (24), получаем (22), **что и тр.**

Определение 11. Эрмитово-квадратичной формой в пространстве V называется функция от одного аргумента $x \in V$, которая получается из эрмитово-билинейной формы (не обязательно симметричной) $f(x, y)$ заменой y на x.

В n-мерном комплексном линейном пространстве с базисом $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ эрмитово-квадратичная форма через координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ вектора x запишется в виде

$$f(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\xi_i\,\overline{\xi}_k, \tag{25}$$

где $a_{ik} = f(e_i, e_k)$ — комплексные числа.

Определение 12. Если эрмитово-билинейная форма $f(x,y)$ симметрична, то соответствующая эрмитово-квадратичная форма называется **симметричной эрмитово-квадратичной формой.**

Симметричная эрмитово-квадратичная форма $f(x, x)$ принимает лишь вещественные значения, т. к. из (21) следует, что $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$.

З а м е ч а н и е 1. Понятие скалярного произведения (x, y) в комплексном линейном пространстве вводилось нами как симметричная эрмитово-билинейная форма. Поэтому (x,x) — вещественное число.

З а м е ч а н и е 2. В действительном линейном пространстве всякую квадратичную форму можно считать эрмитовой.

В отличие от билинейной формы в действительном линейном пространстве, эрмитово-билинейная форма определяется однозначно по соответствующей ей эрмитово-квадратичной форме, **не обязательно симметричной.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x, y)$ — эрмитово-билинейная (не обязательно симметричная) форма.

$$f(x+y,x+y)+i\,f(x+i\,y,x+i\,y)-$$
$$-f(x-y,x-y)-i\,f(x-i\,y,x-i\,y)=$$

$$=f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)+$$
$$+i\,f(x,x)-f(y,x)+f(x,y)+$$

$$+f(y,y)-f(x,x)+f(y,x)+$$
$$+f(x,y)-f(y,y)-i\,f(x,x)+f(x,y)-$$

$$-f(y,x)-f(y,y)=4\,f(x,y),$$

откуда

$$f(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+y,x+y)+i\,f(x+i\,y,x+i\,y)-$$

$$-f(x-y,x-y)-i\,f(x-iy,x-iy)],$$

что и тр.

3.ПРИВЕДЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ ЭРМИТОВО-КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Теорема 15. Симметричная эрмитово-квадратичная форма

$$f(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,\overline{x}_k=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,A\begin{Vmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \overline{x}_n\end{Vmatrix}=$$

$$= \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\right) A' \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}, \text{ где } A = \overline{A'},$$

всегда может быть приведена посредством унитарного преобразования координат

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = U \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{Vmatrix}, \text{ где } U^{-1} = \overline{U'},$$

к каноническому виду:

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \bar{\xi}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left|\xi_i\right|^2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (вещественные числа).

Доказательство. Пусть эрмитово-симметричная матрица A' — матрица самосопряженного оператора f' в некотором ортонормированном базисе. Справедливость теоремы вытекает из того, что эрмитово-симметричная матрица A' унитарно подобна диагональной матрице Λ' (формула (19)), на диагонали которой расположены собственные значения матрицы A (собственные значения A' равны собственным значениям A):

$$\Lambda' = U^{-1} A' U \Leftrightarrow, \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda = \Lambda' = U' A \overline{U}. \tag{28}$$

В самом деле: матрица U является матрицей перехода к новому ортонормированному базису, в котором матрицей f' является $\Lambda' = \Lambda$.

Так как правые части (22) и (28) совпадают при $C=U$, то в новом базисе матрица $f(x,x)$ совпадает с матрицей $\Lambda' = \Lambda$. Следовательно, в новом базисе симметричная эрмитово-квадратичная форма $f(x, x)$ имеет вид

$$f(x,x) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \lambda_2 |\xi_2|^2 + \ldots + \lambda_n |\xi_n|^2. \tag{29}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если формула (22) была бы неизвестна, то доказательство могло быть продолжено следующим образом: из (27) $\Rightarrow$

$$A' = U \Lambda' U^{-1} \Rightarrow A' = U \Lambda' \overline{U'},$$

$$f(x,x) = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) A' \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) U \Lambda' \overline{U'} \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} =$$

$$= (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n) \overline{U}' U \Lambda' \overline{U}' U \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{Vmatrix} = (\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n) \Lambda' \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{Vmatrix} =$$

$$= (\xi_1, \ldots, \xi_n) \Lambda' \begin{Vmatrix} \overline{\xi}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\xi}_n \end{Vmatrix},$$ **что и тр.**

З а м е ч а н и е 2. Квадратичная форма в евклидовом пространстве

$$f(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{Vmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{x}_n \end{Vmatrix},$$ где $A = A'$,

всегда может быть приведена посредством ортогонального преобразования координат

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix} = U \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{Vmatrix}, \text{ где } U^{-1} = U^{*},$$

к каноническому виду:

$$f(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (действительные числа).

Идея доказательства та же.

Из (29) следует, что симметричная эрмитово-квадратичная форма не отрицательна (положительно определенная) тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы этой формы не отрицательны (положительны).

Пример 3. Симметричная эрмитово-квадратичная форма

$$f(x,x) = 2|x_1|^2 + i x_1 \bar{x}_2 - i x_2 \bar{x}_1 + 2|x_2|^2$$

записана в ортонормированном базисе 2-мерного унитарного пространства V. Найти ортонормированный базис, в котором данная квадратичная форма имеет диагональный вид.

Решение.

$A = \begin{Vmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{Vmatrix}$ — матрица данной формы.

Матрицу $A^{*} = \begin{Vmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{Vmatrix}$ будем рассматривать как матрицу самосопряженного оператора f^{*} в данном ортонормированном базисе (e_1, e_2). Построим ортонормированный базис из собственных векторов оператора f^{*}. Найдем собственные значения f^{*}:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & i \\ -i & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \ \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1.$$

Соответствующие собственные векторы найдем, решая систему

$$\begin{Vmatrix} \lambda - 2 & i \\ -i & \lambda - 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

дважды: при $\lambda = \lambda_1 = 3$ и $\lambda = \lambda_2 = 1$.

Пусть $\lambda = 3$. Тогда будем иметь систему

$$\begin{Vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 + i\,\xi_2 = 0.$$

Например, вектор $f_1 = (1, i)$ — собственный.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда

$$\begin{Vmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow -\xi_1 + i\,\xi_2 = 0.$$

Например, вектор $f_2 = (i, 1)$ — собственный.

Векторы f_1 и f_2 ортогональны, (f_1, f_2) — ортогональный базис пространства V.

Тогда векторы

$$\tilde{e}_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

составляют ортонормированный базис из собственных векторов оператора f'.

Матрица перехода от базиса " e " к базису " $\tilde{e}$ " имеет вид

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}.$$

Матрица U является унитарной: $U^{-1} = \overline{U'} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}.$

В этом новом базисе матрица Λ квадратичной формы $f(x, x)$ и оператора f' имеет один и тот же вид:

$$\Lambda = \overline{U'}\, A' U = U' A \overline{U} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Симметричная эрмитово-квадратичная форма $f(x, x)$ в базисе $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ имеет канонический вид:

$f(x,x) = 3|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$, $(*)$ **что и тр.**

Связь между старыми и новыми координатами вектора x выражается следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\,\xi_2), \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\,\xi_1 + \xi_2). \end{cases} \quad (**)$$

Подставим $(**)$ в выражение для квадратичной формы:

$$f(x,x) = 2\frac{1}{2}(\xi_1 + i\,\xi_2)(\bar{\xi}_1 - i\,\bar{\xi}_2) + i\frac{1}{2}(\xi_1 + i\,\xi_2)(-i\,\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2) -$$

$$- i\frac{1}{2}(i\,\xi_1 + \xi_2)(\bar{\xi}_1 - i\,\bar{\xi}_2) + 2\frac{1}{2}(i\,\xi_1 + \xi_2)(-i\,\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2) =$$

$$=\left|\xi_1\right|^2-i\,\xi_1\bar{\xi}_2+i\,\xi_2\bar{\xi}_1+\left|\xi_2\right|^2+$$

$$+\frac{i}{2}\left(-i\left|\xi_1\right|^2+\xi_1\bar{\xi}_2+\xi_2\bar{\xi}_1+i\left|\xi_2\right|^2\right)-$$

$$-\frac{i}{2}\left(i\left|\xi_1\right|^2+\xi_1\bar{\xi}_2+\xi_2\bar{\xi}_1-i\left|\xi_2\right|^2\right)+\left|\xi_1\right|^2+$$

$$+i\,\xi_1\bar{\xi}_2-i\,\xi_2\bar{\xi}_1+\left|\xi_2\right|^2=$$

$$=3\left|\xi_1\right|^2+\left|\xi_2\right|^2.$$

Т. о., $f(x,x)=3\left|\xi_1\right|^2+\left|\xi_2\right|^2.\qquad (***)$

Выражения (*) и (***) совпали, что и должно быть при правильном решении.

Пример 4. Квадратичная форма записана в ортонормированном базисе 2-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная форма имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид:

$$f(x,x)=-4x_1^2+10x_1x_2-4x_2^2.$$

Решение. Матрица A квадратичной формы в данном ортонормированном базисе (e_1,e_2) имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix}-4 & 5\\ 5 & -4\end{Vmatrix}.$$

Будем считать матрицу A матрицей самосопряженного оператора f в базисе (e_1,e_2).

Построим ортонормированный базис из собственных векторов оператора f:

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda+4 & -5\\ -5 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda^2+8\lambda-9\ —$$

— характеристический многочлен, корнями которого являются: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=-9$. Соответствующие собственные векторы находим, решая систему

$$\begin{Vmatrix} \lambda+4 & -5 \\ -5 & \lambda+4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$

дважды: при $\lambda = \lambda_1$ и при $\lambda = \lambda_2$.

Пусть $\lambda = 1$. Тогда система эквивалентна одному уравнению $\xi_1 - \xi_2 = 0$.

Вектор $f_1(1;1)$ — собственный, отвечающий $\lambda = 1$.

Пусть $\lambda = -9$. Тогда система эквивалентна одному уравнению $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Вектор $f_2(-1;1)$ — собственный, отвечающий $\lambda = -9$.

Векторы

$$\tilde{e}_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ и } \tilde{e}_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

составляют ортонормированный базис из собственных векторов преобразования *f*. Матрица прехода от базиса " e " к базису " $\tilde{e}$ " имеет вид

$$U = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица ортогональна, т. е. $U^{-1} = U'$.

В любом базисе " $\tilde{e}$ " матрицы преобразования f и данной квадратичной формы совпадают и имеют вид

$$\Lambda = U'AU = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, квадратичная форма в базисе $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ имеет вид

$f(x,x) = 1\xi_1^2 - 9\xi_2^2$, **что и тр.**

Ясно, что $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Vmatrix}$, $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2. \end{cases}$

Подставляя выражения старых координат через новые, получим

$$f(x,x) = -4\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2 +$$
$$+10\frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2) - 4\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2 =$$
$$= -2(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) + 5(\xi_1^2 - \xi_2^2) -$$
$$-2(\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) = \xi_1^2 - 9\xi_2^2,$$

что и должно быть.

Замечания к примерам. Ясно, что искомый канонический базис определен неоднозначно.

4. УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Для заданной эрмитово-симметричной матрицы A найти такие унитарную матрицу U и диагональную вещественную матрицу Λ, чтобы

$$\Lambda = \overline{U}' A U.$$

1) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2-i & 0 \\ 2+i & 0 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{Vmatrix}$ 2) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{Vmatrix}$ 3) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{Vmatrix}$

4) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$ 5) $A = \begin{Vmatrix} 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 2-i \\ 0 & 2+i & 0 \end{Vmatrix}$ 6) $A = \begin{Vmatrix} -1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

7) $A = \begin{Vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 9 & -1-i \\ 0 & -1+i & 0 \end{Vmatrix}$ 8) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -2i & 2i \\ 2i & 1 & i \\ -2i & -i & 1 \end{Vmatrix}$ 9) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{Vmatrix}$

10) $A=\begin{Vmatrix}2&0&i\\0&3&0\\-i&0&2\end{Vmatrix}$ 11) $A=\begin{Vmatrix}1&i&2i\\-i&1-2i\\-2i&2i&1\end{Vmatrix}$ 12) $A=\begin{Vmatrix}1&3+4i\\3-4i&1\end{Vmatrix}$

13) $A=\begin{Vmatrix}1&2+2i\\2-2i&3\end{Vmatrix}$ 14) $A=\begin{Vmatrix}7&2-i\\2+i&3\end{Vmatrix}$ 15) $A=\begin{Vmatrix}4&2+i\\2-i&0\end{Vmatrix}$

16) $A=\begin{Vmatrix}2&1+i\\1-i&3\end{Vmatrix}$ 17) $A=\begin{Vmatrix}-5&0&0\\0&3&-i\\0&i&3\end{Vmatrix}$ 18) $A=\begin{Vmatrix}1&i&i\\-i&1&1\\-i&1&1\end{Vmatrix}$

19) $A=\begin{Vmatrix}4&0&0\\0&3&i\\0&-i&3\end{Vmatrix}$ 20) $A=\begin{Vmatrix}2&0&i\\0&2&0\\-i&0&3\end{Vmatrix}$ 21) $A=\begin{Vmatrix}1&-2i&2i\\2i&1&i\\-2i&-i&1\end{Vmatrix}$

22) $A=\begin{Vmatrix}1&3-4i\\3+4i&1\end{Vmatrix}$ 23) $A=\begin{Vmatrix}3&2+2i\\2-2i&1\end{Vmatrix}$

24) $A=\begin{Vmatrix}3&2-i\\2+i&7\end{Vmatrix}$ 25) $A=\begin{Vmatrix}0&i\\-i&0\end{Vmatrix}$.

З а д а ч а 2. Для данной симметричной матрицы A найти такие диагональную матрицу Λ и ортогональную матрицу U, чтобы $\Lambda=U'AU$.

1) $A=\begin{Vmatrix}-2&2&-3\\2&2&2\\-3&2&-2\end{Vmatrix}$ 2) $A=\begin{Vmatrix}2&-4&-2\sqrt{2}\\-4&3&\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}&\sqrt{2}&2\end{Vmatrix}$ 3) $A=\begin{Vmatrix}-4&2&-2\\2&1&2\\-2&2&-4\end{Vmatrix}$

4) $A=\begin{Vmatrix}10&-5&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-5&14&-\frac{5\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{5\sqrt{2}}{2}&7\end{Vmatrix}$ 5) $A=\begin{Vmatrix}\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\\2&-5&-2\\-\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\end{Vmatrix}$

6) $A=\begin{Vmatrix}1&2&\sqrt{2}\\2&1&-\sqrt{2}\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&2\end{Vmatrix}$ 7) $A=\begin{Vmatrix}0&-\sqrt{3}&-2\\-\sqrt{3}&2&2\sqrt{3}\\-2&2\sqrt{3}&-3\end{Vmatrix}$

8) $A = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & 1 \end{Vmatrix}$ 9) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 2\sqrt{2} \\ 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$

10) $A = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$ 11) $A = \begin{Vmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 2 \end{Vmatrix}$

12) $A = \begin{Vmatrix} 5 & -2 & -\sqrt{2} \\ -2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$ 13) $A = \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix}$

14) $A = \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ 15) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{Vmatrix}$

16) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$ 17) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$

18) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$ 19) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$

20) $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$ 21) $A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{Vmatrix}$

22) $A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$ 23) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$ 24) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$

25) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

З а д а ч а 3. Симметричная эрмитово-квадратичная форма записана в ортонормированном базисе n-мерного унитарного пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная форма имеет канонический вид, и записать этот канонический вид (искомый базис определен неоднозначно).

1) $|x_1|^2 + (3-4i)x_1\bar{x}_2 + (3+4i)x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(n = 2)$,

2) $3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 - 5|x_3|^2 - i\,x_1\bar{x}_2 + i\,x_2\bar{x}_1$ $(n = 3)$

3) $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 +$
$+i\,x_1\bar{x}_3 - i\,x_3\bar{x}_1 + i\,x_2\bar{x}_3 - i\,x_3\bar{x}_2$ $(n = 3)$,

4) $3|x_1|^2 - i\,x_1\bar{x}_2 + i\,x_2\bar{x}_1 + 3|x_2|^2 + 4|x_3|^2$ $(n = 3)$,

5) $3|x_1|^2 + (2+2i)x_1\bar{x}_2 + (2-2i)x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2$ $(n = 3)$,

6) $3|x_1|^2 + (2-i)x_1\bar{x}_2 + (2+i)x_2\bar{x}_1 + 7|x_2|^2$ $(n = 2)$,

7) $i\,x_1\bar{x}_2 - i\,x_2\bar{x}_1$ $(n = 2)$,

8) $3|x_1|^2 + (1-i)x_1\bar{x}_2 + (1+i)x_2\bar{x}_1 + 2|x_2|^2$ $(n = 2)$,

9) $(2+i)x_1\bar{x}_2 + (2-i)x_2\bar{x}_1 + 4|x_2|^2$ $(n = 2)$,

10) $2|x_1|^2 + i\,x_1\bar{x}_3 + 3|x_2|^2 - i\,x_3\bar{x}_1 + 2|x_3|^2$ $(n = 3)$

11) $|x_1|^2 + i\,x_1\bar{x}_2 + 2i\,x_1\bar{x}_3 - i\,x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 -$

$-2i\,x_2\bar{x}_3 - 2i\,x_3\bar{x}_1 + 2i\,x_3\bar{x}_2 + |x_3|^2 \ (n=3),$

12) $-5|x_1|^2 + 3|x_2|^2 - i\,x_2\bar{x}_3 + i\,x_3\bar{x}_2 + 3|x_3|^2 \ (n=3),$

13) $|x_1|^2 + i\,x_1\bar{x}_2 + i\,x_1\bar{x}_3 - i\,x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 +$

$+x_2\bar{x}_3 - i\,x_3\bar{x}_1 + x_3\bar{x}_2 + |x_3|^2 \ (n=3),$

14) $4|x_1|^2 + 3|x_2|^2 + i\,x_2\bar{x}_3 - i\,x_3\bar{x}_2 + 3|x_3|^2 \ (n=3),$

15) $2|x_1|^2 + i\,x_1\bar{x}_3 + 2|x_2|^2 - i\,x_3\bar{x}_1 + 3|x_3|^2 \ (n=3),$

16) $|x_1|^2 - 2i\,x_1\bar{x}_2 + 2i\,x_1\bar{x}_3 + 2i\,x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 +$

$+i\,x_2\bar{x}_3 - 2i\,x_3\bar{x}_1 - i\,x_3\bar{x}_2 + |x_3|^2 \ (n=3),$

17) $|x_1|^2 + (3+4i)x_1\bar{x}_2 + (3-4i)x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 \ (n=2),$

18) $|x_1|^2 + (2+2i)x_1\bar{x}_2 + (2-2i)x_2\bar{x}_1 + 3|x_2|^2 \ (n=2)$

19) $7|x_1|^2 + (2-i)x_1\bar{x}_2 + (2+i)x_2\bar{x}_1 + 3|x_2|^2 \ (n=2),$

20) $4|x_1|^2 + (2+i)x_1\bar{x}_2 + (2-i)x_2\bar{x}_1 \ (n=2),$

21) $2|x_1|^2 + (1+i)x_1\bar{x}_2 + (1-i)x_2\bar{x}_1 + 3|x_2|^2 \ (n=2),$

22) $-i\,x_1\bar{x}_2 + i\,x_2\bar{x}_1 - (i+1)x_2\bar{x}_3 +$

$+(-1+i)x_3\bar{x}_2 + 9|x_2|^2 \ (n=3),$

23) $9|x_1|^2 + (1+i)x_1\bar{x}_2 + (-1+i)x_2\bar{x}_1 -$

$-i\,x_2\bar{x}_3 + i\,x_3\bar{x}_2 \ (n=3),$

24) $-2i\,x_1\bar{x}_2 + 2i\,x_2\bar{x}_1 + (2-i)x_2\bar{x}_3 + (2+i)x_3\bar{x}_2 \ (n=3),$

25) $(2-i)x_1\bar{x}_2+(2+i)x_2\bar{x}_1-2i\,x_2\bar{x}_3+2i\,x_3\bar{x}_2$ $(n=3)$.

З а д а ч а 4. Квадратичная форма записана в ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная форма имеет канонический вид, и записать этот канонический вид (искомый базис определяется неоднозначно).

1) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+x_2^2-$

$-2x_2x_3-2x_2x_4+x_3^2-2x_3x_4+x_4^2$,

2) $2x_1^2-4x_1x_2+9x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$,

3) $2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$,

4) $3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$,

5) $3x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2-8x_2x_3+3x_3^2$,

6) $x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+8x_1x_4+$

$+4x_2^2-2x_2x_4-6x_3x_4+x_4^2$,

7) $2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2^2-6x_2x_3+$

$+2x_2x_4+6x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$,

8) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_2^2-x_3^2-x_4^2$,

9) $3x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-x_3^2+4x_3x_4-4x_4^2$,

10) $x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2$,

11) $4x_1^2+4x_1x_2-12x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+9x_3^2$,

12) $-3x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$,

13) $-2x_1^2+5x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$,

14) $5x_1^2+4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-2\sqrt{2}x_1x_3+4\sqrt{2}x_2x_3$

15) $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\frac{2}{3}x_1x_2+\frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$,

16) $5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$,

17) $x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$,

18) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+\frac{4}{3}x_1x_2+\frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$,

19) $2x_2^2-3x_3^2-2\sqrt{3}x_1x_2-4x_1x_3+4\sqrt{3}x_2x_3$,

20) $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2+2\sqrt{2}x_1x_3-2\sqrt{2}x_2x_3$,

21) $\frac{3}{2}x_1^2-5x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+4x_1x_2-x_1x_3-4x_2x_3$,

22) $10x_1^2+14x_2^2+7x_3^2-10x_1x_2-\sqrt{2}x_1x_3-5\sqrt{2}x_2x_3$,

23) $-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_3-4x_1x_3+4x_2x_3$,

24) $2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-8x_1x_2-4\sqrt{2}x_1x_3+2\sqrt{2}x_2x_3$,

25) $-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. — М.: Наука, 1973.

2. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

3. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1979.

4. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЭРМИТОВЫ ФОРМЫ
В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Составитель *Прокофьев Леонтий Николаевич*

Редактор Т. К. Кретинина
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. И. Щелокова
Компьютерная верстка О. А. Карасева

Подписано в печать 15.03.96. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,32.
Усл. кр.-отт. 2,44. Уч.-изд. л. 1,64.
Тираж 200 экз. Заказ 86.

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного аэрокосмического
университета.443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.