МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

КУЙБЫШЕВ 1981

УДК 512.64 (075)

Методические указания составлены на основе раздела курса линейной алгебры «Системы линейных уравнений» с целью оказания помощи студентам в освоении этого раздела курса. Рассматриваются системы n линейных уравнений с n неизвестными, их решение методом Гаусса и Крамера, а также решение с помощью обратной матрицы. Изложена тема «Обратная матрица и ее вычисление». Для каждой темы даны краткие сведения из теории и необходимые определения; приведены примеры, упражнения и ответы к ним.

Методические указания предназначены для студентов вечернего отделения Куйбышевского авиационного института.

Составитель В. Ф. Ефремов

Рецензент Е. И. Железков

1. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Определение. Матрица, произведение которой слева и справа на матрицу A равно единичной матрице E, называется обратной для данной и обозначается символом A^{-1}.

Согласно определению имеем

$$A^{-1} A = A A^{-1} = E. \qquad (2)$$

Для того, чтобы матрица A имела себе обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т. е. $|A| \neq 0$.

Чтобы найти матрицу, обратную для данной матрицы A, необходимо:

1. Вычислить определитель матрицы A. Если $|A| \neq 0$, то обратная матрица существует и может быть найдена.

2. Найти все алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы.

3. Найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

4. Если обратная матрица найдена правильно, то выполняется условие (2), являющееся контрольным.

Пример 1. Найдите матрицу, обратную для данной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -18 & 4 \\ 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Вычислите определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -18 & 4 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = 54-52 = 2 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная, и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Найдите алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |-3| = -3;$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |4| = -4;$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |13| = -13;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |-18| = -18.$

3. По формуле (3) найдите:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -13 & -18 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

4. Проверьте правильность решения:

Согласно условию (2) имеем

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 13 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 & 4 \\ 13 & -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -54 + 52 & 12-12 \\ 13 \cdot (-18) + 18 \cdot 13 & 52-54 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие $A^{-1} A = E$ выполняется. Следовательно, обратная матрица найдена правильно.

Пример 2. Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдите матрицу A^{-1}.

Решение

1. Вычислите определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 0 & 25 \\ -5 & 1 & 7 \\ -17 & 0 & 34 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 \\ -17 & 34 \end{vmatrix} =$$

$$= -13\cdot 34 - (-17)\cdot 25 = 17\cdot(-26+25) = -17 \neq 0.$$

Матрица A^{-1} существует.

2. Алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 34; \quad A_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -25;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 51; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -34;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -13.$$

3. По формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 & 2 & -25 \\ 51 & 0 & -34 \\ 17 & -1 & -13 \end{pmatrix}$$

4. Проверка:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 & 2 & -25 \\ 51 & 0 & -34 \\ 17 & -1 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 68-10-75 & -102+2+100 & 136+14-150 \\ 102+0-102 & -153+0+136 & 204+0-204 \\ 34+5-39 & -51-1+52 & 68-7-78 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -17 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Обратная матрица вычислена правильно.

Пример 3. Найдите матрицу, обратную для данной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Решение

1. Определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = 442.$$

2. Алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = 76;\ A_{12} = 92;\ A_{13} = -156;\ A_{14} = -178;$$
$$A_{21} = 18;\ A_{22} = -48;\ A_{23} = 91;\ A_{24} = 237;$$
$$A_{31} = -12;\ A_{32} = 32;\ A_{33} = 13;\ A_{34} = 63;$$
$$A_{41} = 26;\ A_{42} = 78;\ A_{43} = -65;\ A_{44} = -247$$

3. По формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{442}\begin{pmatrix} 76 & 18 & -12 & 26 \\ 92 & -48 & 32 & 78 \\ -156 & 91 & 13 & -65 \\ -178 & 237 & 63 & -247 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

Найдите матрицы, обратные для данных матриц:

1. $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 17 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ответы:

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ 2. $A^{-1} = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 17 \end{pmatrix}$

3. $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 27 & 21 & -6 \\ -4 & -4 & 2 \\ -7 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

4. $A^{-1} = -\frac{1}{29}\begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & -1 & 14 \end{pmatrix}$

5. $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -4 & -1 & -13 \\ -2 & 4 & -2 \\ 8 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

6. $A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -4 \\ 9 & -6 & -9 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

7. $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 67 & 23 & -9 & -25 \\ 11 & 4 & -2 & -5 \\ 40 & 15 & -5 & -15 \\ -41 & -14 & 7 & 15 \end{pmatrix}$

8. $A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & -26 & 2 & -22 \\ 6 & -11 & -1 & -7 \\ 6 & -9 & -3 & -9 \\ -6 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

2. *СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ*

Системы m линейных уравнений с n неизвестными имеют вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

или в краткой форме:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные.

Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ — коэффициенты системы (1), они имеют 2 индекса: первый индекс обозначает номер уравнения, второй — номер неизвестного. Например, a_{ik} — коэффициент i-го уравнения при k-ом неизвестном.

Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены уравнений.

В общем случае число m уравнений не всегда совпадает с числом n неизвестных, т. е. может быть $m < n$ или $m > n$. В настоящем пособии мы ограничимся рассмотрением случая $m = n$.

Определение 1. Совокупность n действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которые при подстановке вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращают каждое из уравнений системы в тождество, называется решением системы линейных уравнений.

Определение 2. Решением системы линейных уравнений называется n-мерный вектор $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, координаты которого при подстановке вместо неизвестных обращают каждое из уравнений системы в тождество.

Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.

Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

Совместная система линейных уравнений, имеющая единственное решение, называется определенной.

Совместная система линейных уравнений, имеющая бесчисленное множество решений, называется неопределенной.

Две системы линейных уравнений с одними и теми же неизвестными назыьаются равносильными или эквивалентными, если каждое решение одной системы является решением другой, и наоборот.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования вида:

1) перестановка любых двух уравнений системы;

2) умножение любого уравнения системы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число, отличное от нуля;

4) отбрасывание уравнения, в котором все коэффициенты и свободные члены равны нулю.

При элементарных преобразованиях система линейных уравнений переходит в равносильную. Элементарные преобразования применяются при решении системы линейных уравнений метсдом Гаусса.

а) РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЕДИНИЧНОМУ БАЗИСУ (МЕТОД ГАУССА)

Рассмотрим систему (1). Пусть с помощью элементарных преобразований этой системы нам удалось исключить неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ и в результате r итераций преобразовать систему (1) к виду:

$$\begin{cases} x_1 + \ldots \qquad\qquad + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = f_1; \\ \quad x_2 + \ldots \qquad + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = f_2; \\ \qquad x_3 + \ldots + c_{3r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{3n}x_n = f_3; \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad x_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = f_r. \end{cases} \tag{2}$$

Переменная x_i называется базисной, если вектор—столбец коэффициентов при этой переменной в системе линейных уравнений является единичным вектором. В системе (2) коэффициенты при x_1 образуют единичный вектор $\{1, 0, 0, ..., 0\}$, коэффициенты при x_r образуют единичный вектор $\{0, 0, ..., 0, 1\}$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_r$ — базисные. О системе (2) говорят, что она приведена к единичному базису. Остальные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ называются свободными. Коэффициенты $f_1, f_2, ..., f_r$ — свободные члены.

Выразим базисные переменные через свободные переменные и свободные члены из системы (2):

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = f_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - c_{1r+2}x_{r+2} - ... - c_{1n}x_n; \\ x_2 = f_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - c_{2r+2}x_{r+2} - ... - c_{2n}x_n; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = f_r - c_{rr+1}x_{r+1} - c_{rr+2}x_{r+2} - ... - c_{rn}x_n. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Определение 1. Выражение (3) базисных переменных через свободные члены и свободные переменные называется общим решением системы (1).

Определение 2. Решение системы, полученное из общего решения при определенных значениях свободных переменных, называется частным решением.

Определение 3. Частное решение, соответствующее нулевым значениям свободных переменных, называется базисным решением.

При преобразовании системы (1) к виду (2) возможны следующие частные случаи:

1) Получается уравнение вида:

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0.$$

Это уравнение является линейно зависимым, т. е. линейной комбинацией остальных уравнений системы, и поэтому может быть отброшено. В этом случае система линейных уравнений имеет общее решение.

2) Получается уравнение вида:

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = f, \qquad f \neq 0.$$

Такому уравнению не может удовлетворить ни одна совокупность действительных чисел. Следовательно, в данном случае система уравнений несовместна. Поэтому при получении такого уравнения в ходе преобразований системы ее решение следует прекратить.

3) Если при исключении неизвестных окажется, что $r = n$, то система является определенной и имеет единственное (базисное) решение:

$$x_1 = f_1, \quad x_2 = f_2, \quad \ldots, \quad x_n = f_n.$$

Для решения системы линейных уравнений методом Гаусса удобно все преобразования производить над расширенной матрицей системы, составленной из коэффициентов при неизвестных и свободных членах. Для контроля правильности арифметических действий к расширенной матрице справа приписывается контрольный столбец, который заполняется при расчете элементов расширенной матрицы. Сумма элементов строк расширенной матрицы должна совпадать со значением соответствующего элемента в контрольном столбце, если вычисления произведены правильно. В противном случае следует произвести пересчет и устранить ошибку.

Пример 1. Решите следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 10; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение

Полная схема решения системы имеет вид:

$$1\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \quad 2\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 10 & 15 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$3\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 10 & 15 \\ 0 & -5 & 8 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim \quad 4\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 8 & 4 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$5\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \quad 6\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$7\ \left(\begin{array}{rrr|r||r} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \quad 8\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 3. \end{array}$$

Ответ: Решением системы является вектор $\vec{x} = \{1; 4; 3\}$.

Поясним схему и последовательность приведенного решения.

1. Составлена расширенная матрица системы. Столбец свободных членов в расширенной матрице отделен чертой.

2. К расширенной матрице справа приписан контрольный столбец, отделенный от нее двойной чертой. Элементы контрольного столбца подсчитаны как суммы элементов соответствующих строк расширенной матрицы. Последующие преобразования проводятся над расширенной матрицей, содержащей контрольный столбец.

3. На месте первого столбца матрицы образован единичный вектор—столбец. При этом первая строка переписана без изменения, а новые вторая и третья строки матрицы получены суммированием этих строк из предыдущей матрицы 2 с первой строкой, умноженной соответственно на (—2) и на (—3). Элементы контрольного столбца при этой итерации остались прежними, так как соответствующим элементом первой строки, выбранной в качестве ключевой, является 0. По этой же причине не изменился и столбец свободных членов в расширенной матрице. С помощью контрольного столбца убеждаемся, что элементы второй и третьей строк расширенной матрицы вычислены правильно:

$$0 - 5 + 10 + 10 = 15;$$
$$0 - 5 + 8 + 4 = 7.$$

4. Вторая строка матрицы 3 умножена на $\left(-\frac{1}{5}\right)$, в результате чего образована единица во втором столбце этой строки.

5. На месте второго столбца образован единичный вектор—столбец. При этом вторая строка матрицы 4 была умножена на (—2) и на 5, а результаты были просуммированы соответственно с первой и третьей строками этой матрицы. Вторая строка переписана без изменения как ключевая.

6, 7. На месте третьего столбца матрицы образован последний единичный вектор—столбец. При этом сначала была образована единица в третьей строке матрицы 6 (делением на (—2) третьей строки матрицы 5), а затем были образованы нули во второй и первой строках третьего столбца. В итоге исходная система линейных уравнений оказалась приведенной к единичному базису 7.

8. Для удобства окончательных расчетов контрольный столбец опущен.

Таким образом, в данном примере оказалось, что $r = n = 3$, $f_1 = 1$, $f_2 = 4$, $f_3 = 3$. Следовательно, согласно третьему частному случаю, система имеет базисное решение

$$\vec{x} = \{1; 4; 3\}.$$

Пример 2. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -11; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

Здесь и далее условимся выделять элемент ключевой ключевой строки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c} 5 & 1 & -4 & -11 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ -3 & -1 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 0 & -9 & -9 & -36 & -54 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & 20 & 30 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c} 0 & -9 & -9 & -36 & -54 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 3 \\ x_2 = 4 - x_3. \end{cases}$$

Таким образом, здесь реализуется первый частный случай. Переменные x_1 и x_2 — базисные, переменная x_3 — свободная. Следовательно, имеем общее решение системы. Возможными частными решениями этой системы могут быть, например, векторы $\{-3; 4; 0\}$, $\{0; 1; 3\}$ и т. д.

Ответ: Система имеет общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3; \\ x_2 = 4 - x_3. \end{cases}$$

Пример 3. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2; \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 = 14; \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -13 & 14 & -2 \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & -2 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -10 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -8 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 7 & -14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & -8 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, имеем второй случай. Уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -4$ не может удовлетворить ни одна совокупность действительных чисел. Следовательно, данная система решений не имеет, так как является несовместной.

Пример 4. Решите методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -2; \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{rrrr|r||r} 5 & -2 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -2 & 7 \\ -2 & -3 & -4 & -2 & 2 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r||r} 11 & 0 & -3 & 5 & 27 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 7 & 0 & -10 & 7 & 41 & 45 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r||r} 11 & 0 & -3 & 5 & 27 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & -10 & 7 & 41 & 45 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 13 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r||r} 11 & 0 & 0 & 8 & 27 & 46 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 17 & 41 & 65 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 13 & 22 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r||r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 15 & 0 & 1 & 0 & 13 & 29 \\ -15 & 0 & 0 & 1 & -13 & -27 \\ 78 & 1 & 0 & 0 & 78 & 157 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r||r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: $\vec{x} = \{1;\ 0;\ -2;\ 2\}$.

Упражнения

Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

1. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 4x_4 = 3; \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + 1; \\ x_4 = x_2 - x_3. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

Ответ: Система несовместна.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 0x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 + 2; \\ x_4 = 5 - x_3 + x_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1; \\ -5x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -2; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 3; \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

Ответ: Система несовместна

5. $\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 6; \\ -10x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -2; \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ -10x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -8. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_2 = 3x_1 - x_4; \\ x_3 = x_4 + 2 - x_1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8; \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 3 - 2x_2$; $x_3 = x_2 + 5$.

7. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Ответ: $\vec{x} = \{2; 3; 1\}$.

8. $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 11; \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -11. \end{cases}$

Ответ: $\vec{x} = \{2; 1; -2\}$.

9. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4; \\ -5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -11; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$

Ответ: $\vec{x} = \{3; 0; 0; 2\}$.

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -13; \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -12. \end{cases}$

Ответ: $\vec{x} = \{-2; 1; 1; 2\}$.

б) РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4)$$

Эта система линейных уравнений может быть компактно записана в виде одного матричного уравнения:

$$AX = B, \quad (5)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица системы (4).

X и B — матрицы—столбцы:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

Если матрица A невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$, то матричное уравнение (5) имеет единственное решение

$$X = A^{-1}B, \quad (6)$$

определяющее решение исходной системы линейных уравнений (4). Следовательно, для того чтобы решить систему n линейных уравнений с n неизвестными, необходимо найти для матрицы системы обратную ей матрицу A^{-1} и по формуле (6) определить решение системы.

Пример 1. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = -17; \\ -5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 22; \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -15. \end{cases}$$

Решение

В примере 3 (с. 4) было найдено:

$$A^{-1} = \frac{1}{442}\begin{pmatrix} 76 & 18 & -12 & 26 \\ 92 & -48 & 32 & 78 \\ -156 & 91 & 13 & -65 \\ -178 & 237 & 63 & -247 \end{pmatrix}$$

Решение имеет вид (6), где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 22 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$X = \frac{1}{442}\begin{pmatrix} 76\cdot 1 + 18\cdot(-17) - 12\cdot 22 + 26\cdot(-15) \\ 92\cdot 1 - 48\,(-17) + 32\cdot 22 + 78\cdot(-15) \\ -156\cdot 1 + 91\cdot(-17) + 13\cdot 22 - 65\cdot(-15) \\ -178\cdot 1 + 237\cdot(-17) + 63\cdot 22 - 247\cdot(-15) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{442}\begin{pmatrix} 76 - 306 - 264 - 390 \\ 92 + 816 + 704 - 1170 \\ -156 - 1547 + 286 + 975 \\ -178 - 4029 + 1386 + 3705 \end{pmatrix} = \frac{1}{442}\begin{pmatrix} -884 \\ 442 \\ -442 \\ 884 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \{-2;\ 1;\ -1;\ 2\}.$$

Упражнения

Решите с помощью обратной матрицы следующие системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{1;\ -2;\ 1\}$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{3;\ -4;\ 2\}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{-1;\ 1;\ 2\}$.

4. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{2;\ -3;\ -1\}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 2; \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{-1;\ 1;\ -1\}$.

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{2;\ 0;\ -3;\ 1\}$.

в) РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными (4). Определитель, составленный из коэффициентов системы, называется определителем системы и имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Здесь $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$ — определители, полученные из определителя системы заменой соответствующего столбца коэффициентов при неизвестных столбцом свободных членов.

Решение системы (4) определяется формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1}{D};\quad x_2 = \frac{D_2}{D};\ \ldots;\quad x_n = \frac{D_n}{D}. \qquad (8)$$

При $D \neq 0$ формулы Крамера определяют единственное решение системы (4). Если $D = 0$ и хотя бы один из определителей $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$ не равен нулю, то система (4) несовместная. Если $D = 0$ и $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = 0$, то система (4) неопределенная.

Пример 2. Решите систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -2; \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13. \end{cases}$$

Решение

Вычислим определители D, D_1, D_2, D_3 и D_4 и воспользуемся формулами (8):

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 4 & 0 \\ -12 & 1 & -6 & 0 \\ 18 & -5 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -12 & 1 & -6 \\ 18 & -5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -19 & 0 & -10 \\ 53 & 0 & 21 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -19 & -10 \\ 53 & 21 \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot(-399+530)=-131.$$

Так как $D=-131\neq 0$, то согласно теореме Крамера система имеет единственное решение. Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательные значения остальных определителей:

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & -2 \\ 13 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-131;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 13 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 13 & 3 \end{vmatrix}=262;$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 13 \end{vmatrix}=-262.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-131}{-131}=1;\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0;$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{262}{-131} = -2; \quad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{-262}{-131} = 2.$$

Ответ: $\vec{x} = \{1;\ 0;\ -2;\ 2\}$.

Упражнения

Решите методом Крамера системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4; \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{1;\ -1;\ -1;\ 1\}$.

2. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -17; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4; \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{1;\ 3;\ 2;\ 1\}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3; \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{-2;\ 1;\ 3\}$.

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -3; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ Ответ: $\vec{x} = \{1;\ 2;\ 1\}$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0x_3 = 3; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ Ответ: Система несовместна.

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$ Ответ: Система несовместна.

Составитель *Виктор Федорович Ефремов*

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Редактор Э. Грязнова
Техн. редактор Н. Каленюк
Корректор Н. Куприянова

Сдано в набор 13.11.81 г. Подписано к печати 8.02.82 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага оберточная белая. Высокая печать. Литературная гарнитура.
Усл. п. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 2. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография УЭЗ КуАИ, ул. Ульяновская, 18.