САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-го РОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

САМАРА 1991

Составитель В. М. Безменов

УДК 517.373

**Криволинейные интегралы 1-го рода и их приложения:** Метод. указания /Самар. авиац. ин-т; Сост. В. М. Безменов. Самара, 1991. 20 с.

Содержатся теоретические вопросы и упражнения по теме «Криволинейные интегралы 1-го рода», примеры для устного решения и 30 вариантов индивидуальных заданий.

В краткой форме излагается материал, необходимый для выполнения упражнений и индивидуальных заданий. Приводятся образцы решения типовых задач.

Предназначены для студентов 2 курса специальности 01.02. Выполнены на кафедре прикладной математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С. П. Королева

Рецензенты: И. С. Загузов, В. Я. Свербилов

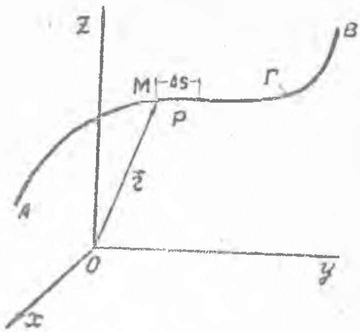
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА I-ГО РОДА

Пусть $\Gamma$ - кривая в пространстве (рис.1), а $u(M)$ - заданная непрерывная функция, $M \in \Gamma$.

По определению, криволинейный интеграл I-го рода от функции $u(M)$ по кривой $\Gamma$ есть

$$J = \int_\Gamma u(M)\,ds = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{k=0}^{n} u(P_k)\,\Delta S_k ,$$

где $\delta_\tau$ - мелкость разбиения кривой $\Gamma$; $\Delta S_k$ - длина дуги $k$ -го элемента кривой; $P_k$ - точка, принадлежащая этому элементу.




Р и с. I

Криволинейные интегралы I-го рода обладают всеми основными свойствами определенных интегралов.

Величина $J$ криволинейного интеграла I-го рода не зависит от направления интегрирования вдоль кривой $\Gamma$.

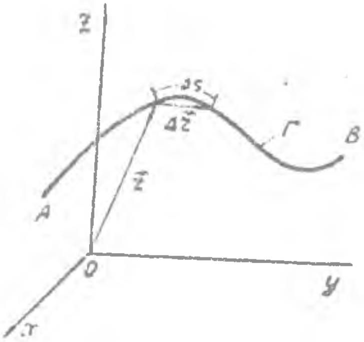
## ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ

Пусть $\Gamma$ - кривая в пространстве (рис.2). Дифференциал длины дуги кривой $\Gamma$ равен:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} .$$

Рассмотрим частные случаи.

I. Пространственная кривая $\Gamma$ задана параметрически: $\bar{r} = \bar{r}(t)$. В этом случае имеем




Р и с. 2

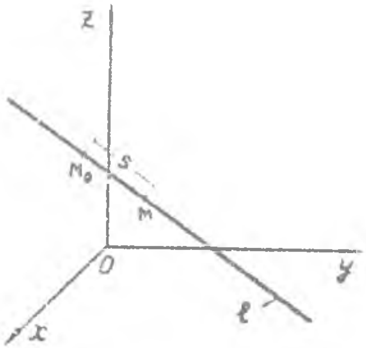
$$ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Например, $\Gamma$ – прямая в пространстве (рис.3). Параметрическое уравнение прямой:

$$x = x_0 + s\cos\alpha, \quad y = y_0 + s\cos\beta,$$

$$z = z_0 + s\cos\gamma,$$

где $x_0, y_0, z_0$ – координаты начальной точки прямой; $s$ – расстояние между начальной и текущей точками $M_0$ и $M$ прямой; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы прямой;
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



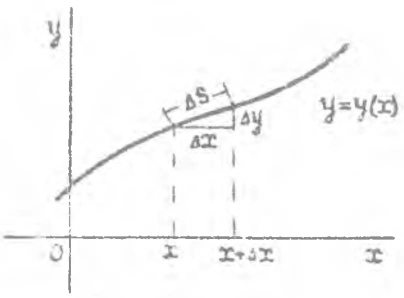

Р и с. 3

Для пространственной прямой имеем

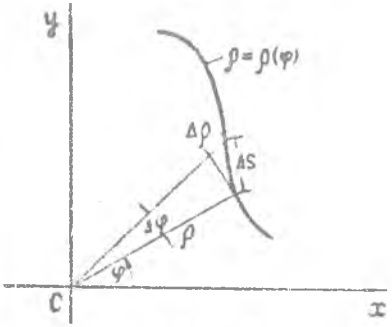
$$ds = \frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

2. Плоская кривая $\Gamma$ задана явным образом в декартовых координатах: $y = y(x)$ (рис.4). Дифференциал длины дуги этой кривой

$$ds = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$




Р и с. 4




Р и с. 5

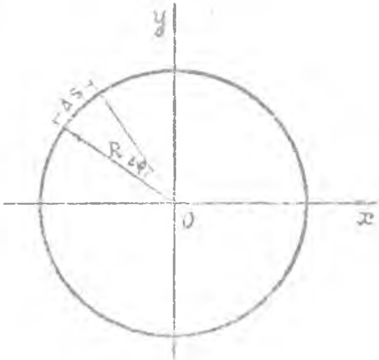
3. Плоская кривая $\Gamma$ задана в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$ (рис.5). Дифференциал длины дуги кривой

$$ds=\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi .$$

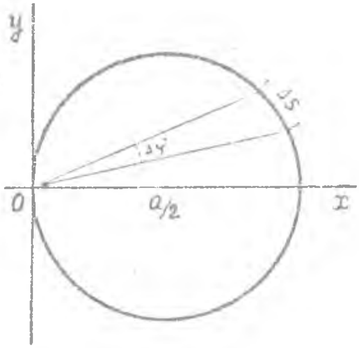
Если кривая - окружность $\rho=R$ (рис.6), то $ds=R\,d\varphi$ .

Для окружности $\rho=a\cos\varphi$ (рис.7)

$$ds=a\,d\varphi .$$




Р и с. 6




Р и с. 7

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ I-ГО РОДА

Вычисление криволинейных интегралов I-го рода сводится к вычислению определенных интегралов.

I. Если кривая задана параметрически:

$$\vec{r}=\vec{r}(t), \quad \alpha\leq t\leq\beta,$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} u(M)\,ds=\int\limits_{\alpha}^{\beta} u(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt .$$

2. Если плоская кривая задана в декартовых координатах:

$$y = y(x),\ a \leqslant x \leqslant b,$$

то

$$\int_\Gamma u(M)\,ds = \int_a^b u(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

3. Если плоская кривая $\Gamma$ задана в полярных координатах:

$$\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

то

$$\int_\Gamma u(M)\,ds = \int_\alpha^\beta u(\varphi)\sqrt{\rho'^2(\varphi)+\rho^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Замечание. Если кривая $\Gamma$ задана уравнением $F(x,y) = 0$, то для вычисления криволинейного интеграла $\int_\Gamma f(x,y)\,ds$ следует перейти к одному из рассмотренных выше способов аналитического задания данной кривой.

Пример 1. Вычислить $J = \int_\Gamma xy\,ds$ ;
$\Gamma$ - дуга гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, $a \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}a$.

Решение:
$x = a\,ch\,t,\ y = a\,sh\,t;\ 0 \leqslant t \leqslant \ln 3;\ ds = a\sqrt{ch\,2t}\,dt \Rightarrow$
$\Rightarrow J = a^3\int_0^{\ln 3} ch\,t\,sh\,t\sqrt{ch\,2t}\,dt.$

Ответ: $J = \frac{a^3}{6}\left(\left(\frac{41}{9}\right)^{3/2} - 1\right)$.

Пример 2. Вычислить $J = \int_\Gamma x^3 y\,ds$,
$\Gamma$ - дуга окружности $x^2 + y^2 = R^2$, находящаяся в первом квадранте.

Решение: $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi;\ ds = R\,d\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow J = R^5\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi.$

Ответ: $J = \frac{R^5}{4}$.

П р и м е р 3. Вычислить $J=\int\limits_{\Gamma}\cos x\,ds$,

$\Gamma$ - дуга кривой $y=\ln\sin x$, заключенная между прямыми $x=\pi/4$ и $x=\pi/2$.

Решение: $ds=\dfrac{dx}{\sin x} \Rightarrow J=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} ctg\,x\,dx$.

Ответ: $J=\ln\sqrt{2}$.

## ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ I-ГО РОДА

### Масса тяжелой нити

Пусть $\Gamma$ - кривая в пространстве - материальная нить; $\mu(M)$ - линейная плотность кривой, $M\in\Gamma$. Масса нити равна:

$$m=\int\limits_{\Gamma}\mu(M)\,ds.$$

Замечание. Масса однородной кривой с линейной плотностью $\mu=1$ численно равна длине дуги этой кривой.

З а д а ч а I. Найти массу дуги кривой $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ от точки (0,0) до точки (4,16/3), если линейная плотность кривой пропорциональна длине ее дуги.

Решение: $\mu=ks \Rightarrow m=k\int\limits_0^{\ell} s\,ds=\frac{k}{2}\ell^2$;

$$\ell=\int\limits_0^4\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(5^{3/2}-1).$$

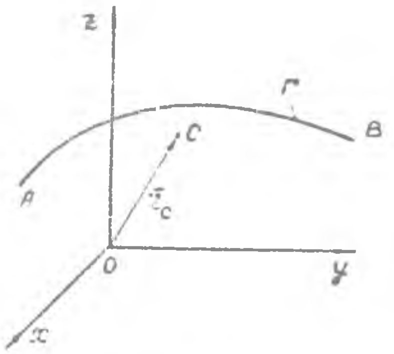
Ответ: $m=\frac{4}{9}k(63-5\sqrt{5})$.

### Статические моменты и центр тяжести кривой

Пусть $\Gamma$ - материальная кривая (рис.8); $\mu(M)$ - линейная плотность кривой; $m$ - масса кривой; $C$ - центр тяжести кривой.

Статические моменты кривой $\Gamma$ относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$M_{xy}=\int\limits_{\Gamma}\mu(M)z\,ds,\quad M_{yz}=\int\limits_{\Gamma}\mu(M)x\,ds,\quad M_{zx}=\int\limits_{\Gamma}\mu(M)y\,ds.$$




Р и с. 8

Статические моменты плоской кривой $\Gamma$ относительно осей координат

$$M_x = \int_\Gamma \mu(M)\, y\, ds,$$

$$M_y = \int_\Gamma \mu(M)\, x\, ds.$$

Центр тяжести кривой $\Gamma$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_\Gamma \mu(M)\,\vec{r}\, ds.$$

Замечание. Имеют место равенства

$$m x_c = M_{yz}, \quad m y_c = M_{zx}, \quad m z_c = M_{xy}.$$

В случае плоской кривой

$$m x_c = M_y, \quad m y_c = M_x.$$

З а д а ч а 2. Найти статические моменты и центр тяжести однородной полуокружности $x^2+y^2=R^2,\ y \geq 0$.

Решение: $m=\pi\mu R$; $M_x=\int_\Gamma \mu y\, ds = 2\mu R^2$; $M_x=\int_\Gamma \mu x\, ds = 0$.

Ответ: $x_c=0$; $y_c=\frac{2}{\pi}R$.

Момент инерции кривой

Пусть $\Gamma$ - материальная кривая; $\mu(M)$ - линейная плотность кривой; $\ell$ - некоторая прямая; $h(M)$ - расстояние от точки $M \in \Gamma$ до прямой $\ell$ (рис.9).

Момент инерции кривой $\Gamma$ относительно прямой $\ell$ определяется формулой

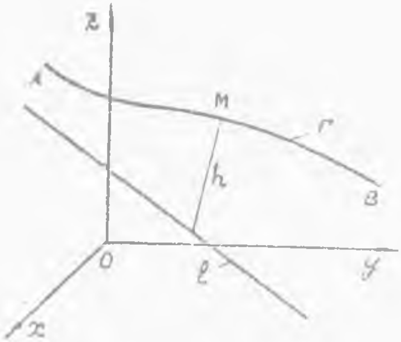
$$J_\ell = \int_\Gamma \mu(M) h^2(M)\, ds.$$

В частности, моменты инерции кривой $\Gamma$ относительно координатных осей равны:

$$J_x = \int_\Gamma \mu(M)(y^2+z^2)\,ds,$$

$$J_y = \int_\Gamma \mu(M)(z^2+x^2)\,ds,$$

$$J_z = \int_\Gamma \mu(M)(x^2+y^2)\,ds.$$




Р и с. 9

Полярный момент инерции кривой $\Gamma$ относительно начала координат вычисляется по формуле

$$J_0 = \int_\Gamma \mu(M)(x^2+y^2+z^2)\,ds.$$

З а д а ч а 3. Найти моменты инерции однородной полуокружности $x^2+y^2=R^2,\ y \geqslant 0$ относительно осей координат, а также полярный момент инерции.

Решение: $J_x = \int_\Gamma \mu y^2 ds;\ J_y = \int_\Gamma \mu x^2 ds;\ J_0 = \int_\Gamma \mu(x^2+y^2)\,ds.$

Ответ: $J_x = J_y = \frac{\pi}{2}\mu R^3;\ J_0 = \pi\mu R^3.$

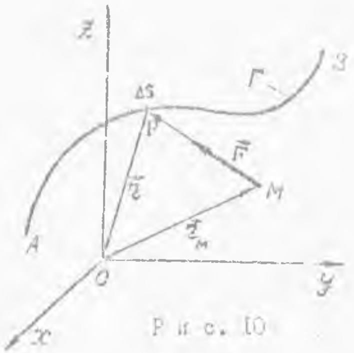
Сила притяжения точечной массы материальной кривой

Пусть $\Gamma$ - материальная кривая (рис.10), $\mu(P)$ - линейная плотность кривой, $P \in \Gamma$.

Сила, действующая на единичную массу, расположенную в точке $M$, равна

$$\vec{F} = -k\int_\Gamma \frac{\mu(P)}{r^3}\vec{r}\,ds,$$

где $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_P$; $k$ - гравитационная постоянная.




Р и с. 10

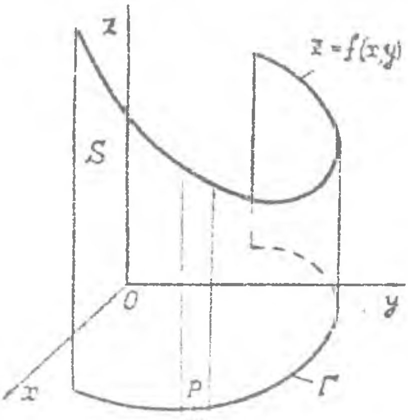
З а д а ч а 4. Найти силу притяжения бесконечной однородной прямолинейной нитью единичной точечной массы, находящейся на расстоянии $h$ от нити.

Решение: $F = k\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\varphi}{h^2+z^2}dz = \frac{k\mu}{h}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi .$

Ответ: $F=\frac{2k\mu}{h}$ ; сила $\vec{F}$ направлена к оси $Oz$ .

## Площадь цилиндрической поверхности

Пусть $S$ – цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси $Oz$ и проходят через точки кривой $\Gamma$ , лежащей в плоскости $Oxy$ ; $z=f(x,y)$ – длина образующей данной поверхности (рис.11).




Р и с. 11

Площадь цилиндрической поверхности равна:

$$S = \int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds .$$

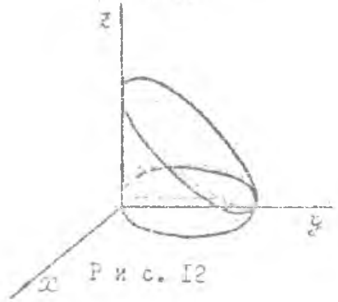
З а д а ч а 5. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=ay$ , заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ (рис.12).

Решение: $z=\sqrt{a(a-y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S=2\int\limits_{c}\sqrt{a(a-y)}\,ds$ ; $c$ – окружность $\rho = a\sin\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow S=2a^2\int\limits_{0}^{\pi}|\cos\varphi|\,d\varphi .$

Ответ: $S=4a^2$.




Р и с. 12

Контрольные вопросы

1. Определение криволинейного интеграла 1-го рода как предела интегральных сумм.

2. Физический смысл криволинейного интеграла I-го рода.

3. Независимость криволинейного интеграла I-го рода от направления интегрирования вдоль кривой.

4. Свойство линейности криволинейных интегралов I-го рода.

5. Теорема о среднем для криволинейного интеграла I-го рода.

6. Вычисление криволинейных интегралов I-го рода.

7. Масса дуги материальной кривой.

8. Статические моменты и центр тяжести материальной кривой.

9. Моменты инерции материальной кривой.

10. Сила притяжения точечной массы материальной кривой.

11. Вычисление площади цилиндрической поверхности.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти центр тяжести однородной дуги логарифмической спирали $\rho = ce^{k\varphi}$, $-\infty < \varphi \leqslant x$, $k > 0$.

2. Найти статический момент дуги параболы $y^2 = 2px$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}$, относительно прямой $x = \frac{p}{2}$.

3. Вычислить момент инерции первого винта винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ относительно оси $Oz$.

4. Определить, при каком значении $h$ будет максимальной сила притяжения точечной массы, расположенной в точке $M(0,0,h)$ со стороны однородной окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

5. Вычислить площадь поверхности тела, общего двум цилиндрам радиусов $r$ и $R$, если оси цилиндров пересекаются под прямым углом.

6. Вычислить интеграл Гаусса $u(x,y) = \int\limits_C \frac{\cos(\overline{r}, \overline{n})}{r} ds$, если $C$ – простой контур; $\overline{r} = MP$; $M(x,y)$; $P(\xi, \eta) \in C$.

7. Вычислить интеграл $J = \int\limits_C (x\cos(\overline{n}, i) + y\cos(\overline{n}, j)) ds$, где $C$ – простой контур, ограничивающий конечную плоскую область $\sigma$; $\overline{n}$ – внешняя нормаль; $i, j$ – орты осей координат $Ox$ и $Oy$ соответственно.

8. Доказать, что функция $u(x,y)$ является гармонической тогда и только тогда, когда для любого контура $C$ выполняется равенство $\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, где $\overline{n}$ – внешняя нормаль.

9. Доказать, что если дуга однородной кривой $\Gamma$ симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги необходимо лежит на этой прямой.

10. Доказать, что для любого гладкого контура $C$ выполняется равенство $\int\limits_C \cos(\overline{\ell},\overline{n})ds=0$, где $\overline{\ell}$ - производный вектор, $\overline{n}$ внешняя нормаль к $C$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Найти координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой:

1. $x^2+y^2=R^2;\ -\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha.$
2. $y^2=2x,\ 0\leqslant x\leqslant 2,\ y\geqslant 0.$
3. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant\pi.$
4. $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a},\ 0\leqslant x\leqslant a.$
5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$
6. $x^2+y^2=R^2,\ y\geqslant 0.$
7. $\rho=ae^{\varphi},\ \dfrac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\pi.$
8. $y=\cos x,\ -\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2.$
9. $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$
10. $\rho=a(1+\cos\varphi),\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$

2. Найти силу притяжения однородной материальной кривой единичной массы, расположенной в точке $M(x.y)$.

1. $x^2+y^2=R^2,\ y\geqslant 0;\ M(0,0).$
2. $|x|+|y|=a,\ z=0;\ M(0,0,h)$
3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;\ M$ - фокус,
4. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\ M(0,0).$
5. $y=b,\ -a\leqslant x\leqslant a;\ M(0,0).$
6. $y^2=2px;\ M$ - фокус.
7. $\rho=R,\ -\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha;\ M(0,0).$
8. $x^2+y^2=ay;\ M(0,0).$
9. $ABC:\ A(0,0),\ B(-a,h),\ C(a,h);\ M(0,b).$
10. $y=h,\ 0\leqslant x\leqslant b;\ M(a,0).$

3. Найти площадь части цилиндрической поверхности $F(x,y)=0$, вырезаемой другими поверхностями.

1. $y^2=2px$; $z=0$, $z=\sqrt{2px-4x^2}$. 2. $y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3$; $z=0$, $z=2-\sqrt{x}$.

3. $y=b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$; $z=0$, $z=\frac{c}{a}x$, $x=0$, $y=0$. 4. $x^2+y^2=R^2$; $z=0$, $z=\frac{xy}{2R}$.

5. $y=\sqrt{a^2-x^2}$; $z=\frac{c}{a}x$, $x=0$, $y=0$. 6. $y=\sqrt{2px}$; $z=0$, $z=y$, $x=\frac{8}{9}p$

7. $x^2+y^2=2ax$; $z=0$, $x^2+y^2=z^2$. 8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=\frac{c}{a}x$, $x=0$, $y=0$.

9. $x^2+y^2=R^2$; $z=0$, $z=R+\frac{x^2}{R^2}$. 10. $y^2=4x$; $x^2+y^2+z^2=5x$.

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНОГО РЕШЕНИЯ

А. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{\Gamma} f(M)\,ds$ :

1. $f(M)=y$; $\Gamma$: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x\geq 0$.

2. $f(M)=\sqrt{2y^2+z^2}$; $C$: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$.

3. $f(M)=e^{\rho}$; $\Gamma$: $\rho=R$, $\alpha\leq\varphi\leq\beta$.

4. $f(M)=x$; $\Gamma$: $x^2+y^2=R^2$, $y\geq 0$.

5. $f(M)=x$; $\Gamma$: $\rho=R$, $0\leq\varphi\leq\pi/2$.

6. $f(M)=\sqrt{a^2-\rho^2}$; $C$: $\rho=a\cos\varphi$.

7. $f(M)=\sqrt{R^2-x^2}$; $C$: $\rho=R$.

8. $f(M)=x^3y$; $C$: $\rho=a(1-\cos\varphi)$.

9. $f(M)=\rho^2$; $\Gamma$: $y=x$, $a\leq x\leq b$.

10. $f(M)=xy^2$; $C$: $|x|+|y|=a$.

Б. Найти массу кривой $\Gamma$ :

1. $\mu(M)=e^{\rho}$; $\Gamma$: $\varphi=\alpha$, $0\leq\rho\leq R$.

2. $\mu(M)=|y|$; $C$: $x^2+y^2=R^2$.

3. $\mu(M)=|xy|$; $C$: $\rho=R$.

4. $\mu(M)=\rho$ ; $C$ : $x^2+y^2=ax$.

5. $\mu(M)=x^2$; $C$: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$.

6. $\mu(M)=x$ ; $\Gamma$: $y=2x$ , $0\leq x\leq 1$.

7. $\mu(M)=\dfrac{1}{\rho}$ ; $\Gamma$: отрезок $AB$, $A(1,2)$, $B(3,6)$.

8. $\mu(M)=\rho^{2n}$; $C$: $\rho=R$.

9. $\mu(M)=y^3$; $\Gamma$: $x^2+y^2=R^2$, $y\geq 0$.

10. $\mu(M)=x^2$; $C$: $\rho=R$.

В. Разные задачи:

1. Найти координаты центра тяжести однородного отрезка, отсекаемого осями координат от прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

2. Вычислить статические моменты инерции полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, линейная плотность в каждой точке которой пропорциональна ординате.

3. Найти полярный момент инерции однородной окружности $x^2+y^2=R^2$.

4. Вычислить величину силы притяжения контуром прямоугольника $\left|\dfrac{x}{a}\right|+\left|\dfrac{y}{b}\right|=1$ материальной точки массой $m$ , расположенной в начале координат, если линейная плотность в каждой точке контура пропорциональна модулю абсцисс.

5. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$ , вырезанной плоскостями $z=0$ и $z=x$ .

6. Вычислить координаты центра тяжести обвода эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, линейная плотность в точках которого равна модулю произведения координат точки.

7. Найти статические моменты однородного отрезка $y=b$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

8. Вычислить моменты инерции однородного контура прямоугольника со сторонами $a$ и $b$ относительно его сторон.

9. Найти силу, с которой окружность радиусом $R$ с равномерно распределенной на ней массой $M$ притягивает материальную точку массой $m$, расположенную на расстоянии $z$ от центра окружности. Рассмотреть два случая: а) $z < R$; б) $z \geqslant R$.

10. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенного внутри сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>R)$.

## ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Индивидуальное задание состоит из двух примеров и одной физической задачи. В случае необходимости оно может быть дополнено задачами из раздела "Задачи для самостоятельной работы".

I. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{\Gamma} f(M)\,ds$:

1. $f(M)=x+y$; $\Gamma: \rho=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. $f(M)=2-\sqrt{x}$; $\Gamma: y^2=\frac{4}{9}(x-1)^3$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

3. $f(M)=|y|$; $C: (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4. $f(M)=\operatorname{tg} x$; $\Gamma: y=\ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

5. $f(M)=x\,z$; $\Gamma: \begin{cases} x=t; \\ y=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \\ z=\frac{t^2}{2}; \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 1$.

6. $f(M)=x(x^2+y^2)$; $\Gamma: \rho=1-\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$.

7. $f(M)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $C: \rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$.

8. $f(M)=x^2;\quad \Gamma:\begin{cases} x=a\cos t;\\ y=a\sin t;\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.\\ z=bt;\end{cases}$

9. $f(M)=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \Gamma:\rho=2\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$

10. $f(M)=\sqrt{y^2-4x^2};\quad \Gamma: y^2=2px,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{p}{2}.$

11. $f(M)=e^{y+\ln x};\quad \Gamma: y=\ln(x^2-1),\ -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$

12. $f(M)=y-x;\quad \Gamma:\rho=e^{-\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2.$

13. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2};\quad \Gamma:\begin{cases} x=t\cos t;\\ y=t\sin t;\quad 0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\\ z=t;\end{cases}$

14. $f(M)=\dfrac{y}{x};\qquad \Gamma:\ \rho=\sqrt{\cos\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}.$

15. $f(M)=y;\qquad \Gamma:\ x^2=(y+1)^3,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$

16. $f(M)=x^2+y^2;\quad \Gamma: AB;\ A\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B(1,0).$

17. $f(M)=\dfrac{x}{y};\quad \Gamma:\rho=2\cos^2\dfrac{\varphi}{2},\ \dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}.$

18. $f(M)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2+y^2}};\quad \Gamma: AB;\ A(0,0),\ B(1,2).$

19. $f(M)=x;\quad \Gamma: y^2=x^3,\ 1\leqslant y\leqslant 8.$

20. $f(M)=(x-y)\sin(x+y);\ C: x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

21. $f(M)=x^{4/3}+y^{4/3};\ C: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$

22. $f(M)=(x+y)^2$; $C: ABCD$; $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(3,1)$, $D(1,1)$.

23. $f(M)=x^2+y^2$; $\Gamma: \rho=\sin^4\frac{\varphi}{4}$; $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

24. $f(M)=|xy|$; $\Gamma: \begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

25. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $C: \rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

26. $f(M)=\dfrac{1}{x-y}$; $\Gamma: AB$; $A(0,-2)$, $B(4,0)$.

27. $f(M)=ye^{-x}$; $\Gamma: \begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

28. $f(M)=\operatorname{tg} y$; $\Gamma: y=\arccos e^{x}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$.

29. $f(M)=y$; $\Gamma: \begin{cases} x=\frac{t^6}{6}; \\ y=2-\frac{t^4}{4}; \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2^{3/4}$.

30. $f(M)=a^2x^{2/3}+b^2y^{2/3}$; $C: \begin{cases} x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t; \\ y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t. \end{cases}$

2. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{\Gamma} f(M)\,ds$:

1. $f(M)=xy$; $\Gamma: \begin{cases} x=\sqrt{3}\,t^2; \\ y=t-t^3; \end{cases}$ $y\geqslant 0$.

2. $f(M)=|x|\sqrt{x^2-y^2}$; $C: \rho=2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

3. $f(M)=z^2$; $\Gamma: \begin{cases} x=\cos t; \\ y=\sin t; \\ z=2t; \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

4. $f(M)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\Gamma: \rho=\dfrac{2}{1+\cos\varphi}$; $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

5. $f(M)=x-y$; $C: \rho^2=\cos 2\varphi$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

6. $f(M)=\dfrac{y}{x+3z}$; $\quad \Gamma:\begin{cases} x=t; \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2; \quad 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}. \\ z=\dfrac{t^3}{3}; \end{cases}$

7. $f(M)=x$; $\Gamma: y=x^2,\ 1\leqslant x\leqslant 2.$

8. $f(M)=y^2,\ \Gamma: y=e^x,\ -\infty\leqslant x\leqslant 0.$

9. $f(M)=y^2$; $\quad \Gamma:\begin{cases} x=\cos t+\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}; \\ y=\sin t;\ \dfrac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

10. $f(M)=\sqrt{x^2+4y^2}$; $\quad C=\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=\sqrt{2}\sin t. \end{cases}$

11. $f(M)=x\sqrt{x^2-y^2}$; $\Gamma: (x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2);\ x\geqslant 0.$

12. $f(M)=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$; $\quad \Gamma:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \\ z=at; \end{cases}$

13. $f(M)=x+y$; $\quad C: \rho^2=a^2\cos 2\varphi;\ |\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{4}.$

14. $f(M)=x+z$; $\Gamma: x=t,\ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t^2,\ z=t^3;$
$0\leqslant t\leqslant 1.$

15. $f(M)=x^2+y^2$; $C: \rho=2(\cos\varphi+\sin\varphi).$

16. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\Gamma: x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t;$
$0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

17. $f(M)=xy$; $C: x=4\sqrt{2}\sin t,\ y=\sin 2t.$

18. $f(M)=x^2-y^2$; $C: \rho=\sin\varphi+\cos\varphi.$

19. $f(M)=|xy|$; $C: 2x^2+y^2=4.$

20. $f(M)=\frac{1}{4+x^2+y^2}$; $\Gamma: \rho=2\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

21. $f(M)=\operatorname{tg} y$; $\Gamma: y=\arccos e^{x},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$.

22. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\Gamma: \rho=\sin^4\frac{\varphi}{4},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

23. $f(M)=(x-y)^2$; $C: ABCD; A(0,0), B(4,0), C(2,2)$.

24. $f(M)=x^2e^{-x^2}$; $\Gamma: y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)$
$1\leqslant x\leqslant 2$.

25. $f(M)=z$; $\Gamma: x=e^{t}\cos t,\ y=e^{t}\sin t,\ z=e^{t}$;
$0\leqslant x\leqslant 1$.

26. $f(M)=\sqrt{2y}$; $\Gamma: x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$;
$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

27. $f(M)=\frac{1}{x^2+y^2}$; $\Gamma: \rho\varphi=2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

28. $f(M)=(x^2+y^2)^2$; $\Gamma: \rho=e^{k\varphi},\ -\infty<\varphi\leqslant 0$.

29. $f(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\Gamma: \rho=\sin^3\frac{\varphi}{3},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

30. $f(M)=\frac{1}{y^2}$; $\Gamma: y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

3. Найти массу неоднородной нити:

1. $\mu(M)=\frac{1}{x^2}$; $\Gamma: y=\operatorname{Arch} x$.

2. $\mu(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\Gamma: \begin{cases} x=e^{t}(\sin t+\cos t); \\ y=e^{t}(\cos t-\sin t); \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$.

3. $\mu(M)=|y|$; $\Gamma: y^2=2x,\ 0\leqslant x\leqslant 1.$

4. $\mu(M)=x^2+y^2+z^2$; $\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2t,$
$0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

5. $\mu(M)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\Gamma: AB$; $A(0,-2),\ B(4,0).$

6. $\mu(M)=x$; $\Gamma: 8y=3x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 4.$

7. $\mu(M)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$; $\Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t$
$0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

8. $\mu(M)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; $\Gamma: \rho\varphi=1,\ \sqrt{3}\leqslant\varphi\leqslant 2\sqrt{2}.$

9. $\mu(M)=y^2$; $\Gamma: y^2=4x-\ln y^2$; $1\leqslant y\leqslant 2.$

10. $\mu(M)=\sqrt[4]{x^2+y^2}$; $C: \rho=2(1+\cos\varphi).$

11. $\mu(M)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$; $\Gamma: x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t;$
$0\leqslant t\leqslant \pi.$

12. $\mu(M)=x^2+y^2$; $C: \max\{|x|,|y|\}=4.$

13. $\mu(M)=x^2+y^2$; $\Gamma: x=2,\ |y|\leqslant 2\sqrt{3}.$

14. $\mu(M)=x^2$; $\Gamma: y=\ln x,\ 1\leqslant x\leqslant e.$

15. $\mu(M)=z$; $\Gamma: \begin{cases} x=t\cos t; \\ y=t\sin t; \\ z=t; \end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

16. $\mu(M)=|xy|$; $C: \rho=\cos\varphi.$

17. $\mu(M)=e^{x+y}$; $\Gamma: y^2=e^x+1,\ 0\leqslant x\leqslant \ln 3.$

18. $\mu(M)=|y|$; $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1.$

19. $\mu(M)=|x|$; $C: \rho=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$.

20. $\mu(M)=|x|$; $C: x^{2/3}+y^{2/3}=4$.

21. $\mu(M)=y$; $\Gamma: \rho=1+\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

22. $\mu(M)=x^2+y^2$; $\Gamma: \begin{cases} x=\cos t+t\sin t; \\ y=\cos t-t\sin t; \end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

23. $\mu(M)=y^2$; $\Gamma: \begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1-\cos t; \end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

24. $\mu(M)=x^2+y^2$; $\Gamma: \rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$; $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

25. $\mu(M)=e^{x+2y}$; $\Gamma: y=\ln(2\cos x)$; $|x|\leqslant\frac{\pi}{3}$.

26. $\mu(M)=x^2+y^2$; $\Gamma: \rho=2e^{3\varphi}$; $-\infty<\varphi\leqslant 0$.

27. $\mu(M)=(x+y)^2$; $C: ABCD$; $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(1,0)$, $D(0,-2)$

28. $\mu(M)=y$; $\Gamma: x=\sqrt{3}\,t^2,\ y=t-t^3,\ y\geqslant 0$.

29. $\mu(M)=y$; $\Gamma: y=2\sqrt{x},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{16}{9}$.

30. $\mu(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $\Gamma: \rho=4\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


Б е р м а н Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. М.:Наука, 1985.

Д е м и д о в и ч Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972.

К у д р я в ц е в Л.Д. Курс математического анализа. М.:Высш. шк., 1988.

**КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО РОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Составитель **Безменов Виталий Михайлович**

Редактор Н. Д. Чайникова
Техн. редактор Г. А. Усачева

Подписано в печать 26.09.91. Формат 60×84 1/16.
Бумага оберточная. Печать офсетная.
Усл. п. л. 1,2. Усл. кр.-отт. 1,3. Уч.-изд. л. 1,1.
Тираж 200 экз. Заказ 185. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

---

Участок оперативной полиграфии Самарского авиационного
института. 443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.