ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра общей и теоретической физики

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ
(Механика, ч.I. Кинематика)

Методические указания
для студентов I курса физического факультета

Издательство "Самарский университет"
1993

Составители: ст.преп.Э.Н.Воробьева, ст.преп.И.Н.Семчинова
Отв.редактор доц.,канд.физ.- мат.наук. А.А.Бирюков

ВВЕДЕНИЕ

Решение задач является важнейшей частью изучения физики. Оно способствует более глубокому усвоению теоретического материала, развивает умение по его применению в конкретных ситуациях, знакомит с методами познания, расширяет кругозор в области физики,связывает окружающий мир с изучаемым материалом.

Решению задач отводится почти половина времени, выделяемого для изучения физики.

Основная цель данного методического пособия - оказание помощи студентам при решении задач по кинематике. Пособие составлено в соответствии с программой по кинематике, изучаемой на первом курсе физического факультета университета.

Изучаемый по кинематике материал разбит на занятия, каждое из которых посвящено изучению определенной темы. В начале каждого занятия в краткой форме излагается теоретический материал. Ряд положений сообщается без доказательства, так как они доказываются на лекциях. Те же положения, доказательства которых на лекциях не даются, выводятся в методическом пособии.

Студент, прежде чем приступить к решению задач, должен ознакомиться с теоретическим материалом, знать не только конечные формулы, но и их выводы.

В каждом занятии приводятся примеры решения задач. Они, во-первых, знакомят учащихся с методами решения задач по данной теме, во-вторых, показывают, как надо оформлять решение задач. Данные задачи в краткой форме (Дано) можно записывать, если это помогает решению задачи, но можно и не делать этого.

Задачи почти каждого занятия разделены на три группы: А,Б,В. Задачи группы "А" наиболее просты. Они решаются или графически,или простым применением одной формулы. Задачи группы

"Б" требуют уже вычислений. В группе "В" собраны наиболее сложные задачи.

При решении задач необходимо выполнять наиболее общие правила.

1.Прежде всего нужно хорошо вникнуть в условие задачи. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте рисунок, поясняющий ее сущность.

2.Каждая задача должна быть сначала решена в общем виде, причем искомая величина должна быть получена через заданные величины. Получив решение в общем виде, нужно проверить, правильную ли оно имеет размерность.

3.Убедившись в правильности общего решения, подставьте числовые значения заданных величин, предварительно выразив их в одной системе единиц (удобнее в системе СИ). Получив числовой ответ, оцените его правдоподобность.

4.Помните, что числовые значения физических величин являются приближенными. Поэтому при расчетах необходимо руководствоваться правилами действия с приближенными числами.

ЗАНЯТИЕ I

ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Для описания положения материальной точки в пространстве выбирается тело отсчета, в нем точка отсчета, по отношению к которой рассматривается положение всех других точек в пространстве.

2. Основными понятиями в векторном способе описания движения являются: радиус-вектор $\vec{r}$, перемещение $\Delta\vec{r}$, скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{w}$.

В общем случае $\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, являются функциями времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}(t)$, $\vec{v} = \vec{v}(t)$, $\vec{w} = \vec{w}(t)$.

3. По определению:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_o \,, \qquad (I.I)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \,, \qquad (I.2)$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} \,. \qquad (I.3)$$

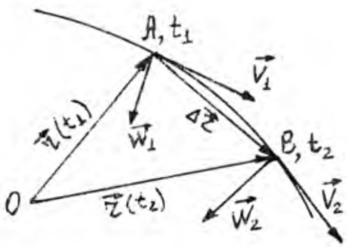


Рис.I.I

Радиус-вектор зависит от выбора начала отсчета, т.е. точки отсчета O. Вектор скорости направлен по касательной к траектории, а вектор ускорения может составлять с вектором скорости угол от 0° до 180° и направлен в сторону вогнутости траектории (рис.I.I). На рис.I.I A – положение движущейся точки в момент времени t_1, B – положение той же точки в момент t_2.

4. Для определения положения точки в пространстве надо знать начальное положение точки, характеризующееся начальным радиусом-вектором $\vec{r}_o$ и начальным значением скорости $\vec{v}_o$, а также зависимость ускорения от времени или скорости от времени, тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_o(t_o) + \int_o^t \vec{v}(t)dt \,, \qquad (I.4)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_o(t_o) + \int_o^t \vec{w}(t)dt \,, \qquad (I.5)$$

где t_0 - начальное значение времени, t - любой момент времени. Начальное значение времени, если не оговорено, можно принять равным 0.

Примечание. Если в формулах (I.4) и (I.5) вместо произвольного значения t взять конкретный момент времени t_k, то получим значения $\vec{r}_k$ и $\vec{v}_k$, соответствующие моменту времени t_k, и это уже не будут функции от времени, а просто конкретные значения радиуса-вектора и вектора скорости, соответствующие данному значению времени. Выбор пределов интегрирования зависит от того, что нужно получить: функцию времени или значение физической величины в определенный момент времени.

5.Основные задачи кинематики:

а)зная зависимость $\vec{r}(t)$, найти $\vec{v}(t)$ и $\vec{w}(t)$;

б)зная зависимость $\vec{v}(t)$ и начальные условия $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$, найти $\vec{r}(t)$ и $\vec{w}(t)$;

в)зная зависимость $\vec{w}(t)$ и начальные условия $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$, найти $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.

6.Для удобства решения задач можно пользоваться следующим мнемоническим правилом:

а)записать величины в строго определенной последовательности, а именно $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$;

б)подчеркнуть данную в задаче функцию;

в)если надо найти функцию, стоящую справа от данной, то ищут производную от заданной функции, а если слева, то ее находят интегрированием.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА I.Радиус-вектор точки A с течением времени меняется по закону $\vec{r} = \vec{a}(\frac{t}{\alpha} - 1) + \vec{b}t^2$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ - постоянные вектора, α - положительная постоянная. Найти скорость и ускорение точки A как функции от времени и вычислить их конкретные значения при $t = 0$ и при $t = 2\alpha$.

РЕШЕНИЕ. По определению: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, поэтому

$$\vec{v}(t) = \frac{d\left[\vec{a}(\frac{t}{\alpha} - 1) + \vec{b}t^2\right]}{dt} = \frac{1}{\alpha}\vec{a} + 2\vec{b}t, \quad \vec{w}(t) = \frac{d\left[\frac{1}{\alpha}\vec{a} + 2\vec{b}t\right]}{dt} = 2\vec{b}.$$

При $t=0$ получим $\vec{v}(0)=\frac{1}{\alpha}\vec{a}$, $\vec{w}=2\vec{b}$, при $t=2\alpha$ - $\vec{v}(2\alpha)=\frac{1}{\alpha}\vec{a} + 4\alpha\vec{b}$, $\vec{w}(2\alpha)= 2\vec{b}$.

ЗАДАЧА 2. Ускорение точки меняется с течением времени по закону $\vec{w}(t) = \vec{a}(\frac{t}{\beta} + 1)$. В начальный момент времени $t=0$ скорость и радиус-вектор были равны $\vec{v}(0)=\vec{v}_0$, $\vec{r}(0)= \vec{r}_0$. Найти скорость и радиус-вектор точки в зависимости от времени и вычислить эти вектора при $t_1 = \beta$, $t_2 = 2\beta$.

РЕШЕНИЕ. Если известно ускорение как функция от времени, то $\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{w}(t)dt$, если пределы интегрирования взять от 0 до t, где t - любой момент времени, то получим скорость как функцию от времени. Если взять пределы интегрирования от 0 до t_1, то получим значение скорости в момент времени t_1. Однако, зная скорость как функцию времени, можно вычислить значение скорости в любой конкретный момент, в том числе и в момент времени t_1. Кроме того, для вычисления радиус-вектора необходимо знать скорость как функцию от времени, поэтому выгоднее при вычислении скорости взять пределы интегрирования от 0 до t, т.е,

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+ \int_0^t \vec{a}(\frac{t}{\beta} +1)dt = \vec{v}_0+ \frac{\vec{a}t^2}{2\beta} + \vec{a}t .$$

При $t_1= \beta$ получим $\vec{v}(t_1) = \vec{v}_0+ \frac{3\vec{a}\beta}{2}$, при $t_2= 2\beta$ - $\vec{v}(t_2)=\vec{v}_0+ 4\vec{a}\beta$. Так как известна скорость как функция от времени, то радиус-вектор можно вычислить по формуле

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+ \int_0^t (\vec{v}_0+ \frac{\vec{a}t^2}{2\beta} + \vec{a}t)dt = \vec{r}_0+ \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} (\frac{t}{3\beta} + 1) .$$

Так как пределы интегрирования выбраны от $t_0=0$ до t (где t - произвольный момент времени), то в результате вычисления получили радиус-вектор как функцию от времени. Если в полученное выражение подставить конкретные моменты времени, получим значения рудиус-вектора в эти моменты времени:

при $t_1= \beta$, $\vec{r} = \vec{r}_0+ \beta\vec{v}_0+ \frac{2}{3}\beta^2\vec{a}$,

при $t_2= 2\beta$, $\vec{r} = \vec{r}_0+ 2\beta\vec{v}_0+ \frac{10}{3}\beta^2\vec{a}$.

ЗАДАЧИ

"А"

I.I.Частица движется по прямолинейной траектории(рис.I.2).

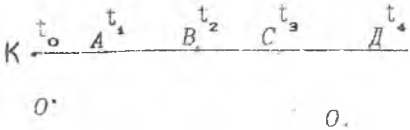


Рис.I.2

а)Изобразить радиус-вектора частицы в те моменты времени, когда она находилась в точках $A,B,C,Д$. За начало отсчета принять точку O.

б)Можно ли на основании увеличения радиус-вектора частицы утверждать, что ее скорость тоже увеличивается? От чего зависит увеличение или уменьшение скорости частицы? Что можно сказать о направлении вектора скорости частицы?

в)Чему равно перемещение точки за время $\Delta t_1 = t_3 - t_1$, $\Delta t_2 = t_4 - t_2$?

г)Записать связь между радиус-векторами частицы в точках B и $Д$ и её перемещением за время $\Delta t_2 = t_4 - t_2$.

д)Принять точку O' за начало отсчета и изобразить радиус-вектора частицы в те же моменты времени относительно новой точки отсчета. Какую точку из всех возможных удобнее всего было бы принять за начало отсчета?

I.2.Частица движется по окружности (рис.I.3). Точка O (центр окружности) - начало отсчета.

а)Изобразить радиус-вектора частицы в точках $A,B,C,Д$. Можно ли утверждать что они равны?

б)Изобразить на чертеже перемещение частицы за время: $\Delta t_1 = t_2 - t_1$, $\Delta t_2 = t_3 - t_2$, $\Delta t_3 = t_4 - t_3$, $\Delta t_4 = t_4 - t_1$, $\Delta t_5 = t_3 - t_1$. Записать связь между этими перемещениями?

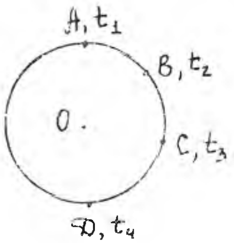


Рис.I.3

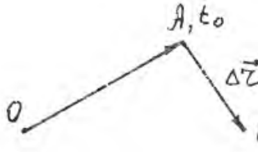


Рис.I.4

I.3.На чертеже (рис.I.4) изображено положение частицы в начальный момент времени t_0 и перемещение $\Delta\vec{r}_1$ за время $\Delta t_1 = t_1 - t_0$. Изобразить положение частицы (ее радиус-вектор) в моменты времени t_2 и t_3, если за каждый из промежутков времени $\Delta t_2=t_2-t_1$, $\Delta t_3=t_3-t_2$ частица совершала перемещения $\Delta\vec{r}_2$ и $\Delta\vec{r}_3$, равные $\Delta\vec{r}_1$.

I.4. Частица движется по криволинейной траектории (рис.I.5). Точка *O* начало отсчета.

а) Изобразить радиус-вектора частицы в те моменты времени, когда она находилась в точках *А*, *В*, *С*, *Д* и перемещение частицы за время $\Delta t_1=t_2-t_1$, $\Delta t_4=t_4-t_1$.

б) В точке *А* дан вектор скорости частицы. Изобразить вектора скорости в точках *В*, *С*, *Д*, если величина скорости при движении точки не изменялась.

в) Можно ли утверждать, что ускорение точки равно 0? Изобразить на чертеже изменение скорости при перемещении частицы из точки *А* в точку *В* и из точки *В* в точку *С*.

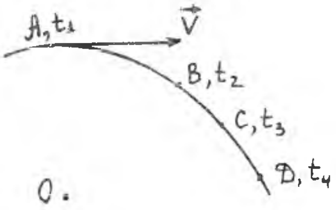


Рис.I.5

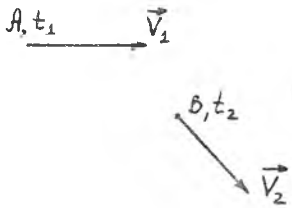


Рис.I.6

I.5. Известны положения частицы относительно точки *O* и скорости в моменты времени t_1 и t_2 (рис.I.6).

а) Можно ли указать, где будет частица в момент времени t_3? Что для этого необходимо знать?

б) Найти по чертежу перемещение частицы за время $\Delta t_2=t_2-t_1$ и изменение вектора скорости за это же время. Как изменился вектор скорости?

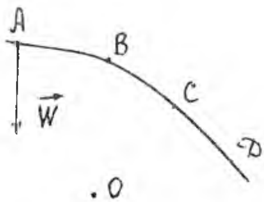


Рис.I.7

I.6. Частица движется по криволинейной траектории с постоянным ускорением $\vec{w}$ (рис.I.7). Точка *O* начало отсчета.

а) Изобразить радиус-вектора и вектора ускорения частицы в точках *А*, *В*, *С*, *Д*.

б)Изобразить угол между векторами скорости и ускорения, когда частица находилась в точках *А,В,С,Д*.

I.7.Известны положения частицы относительно точки *О*, ее ускорения в моменты времени t_0, t_1 и t_2 (рис.I.8) и скорость частицы в момент времени t_1.

а)Что можно сказать о скорости частицы в моменты времени t_1 и t_2? Как изменилась ее величина и направление? Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи?

б)Выбрать другую точку отсчета и построить радиус-вектора частицы в моменты времени t_0, t_1 и t_2 относительно этой точки отсчета. Изменится ли премещение частицы за время $\Delta t_1=t_1-t_0$, $\Delta t_2=t_2-t_1$, $\Delta t_3=t_2-t_0$ при изменении точки отсчета? Как это доказать? Изменятся ли вектора скорости и ускорений?

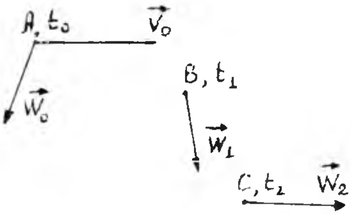


Рис.I.8

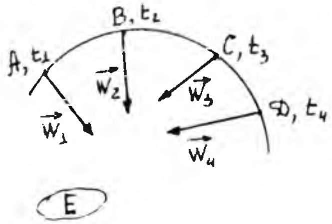


Рис.I.9

I.8.На чертеже (рис.I.9) указаны положения частицы относительн тела отсчета *Е* и вектора ускорения в моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4. Изобразить радиус-вектора частицы в эти моменты времени, выбрав произвольно точку отсчета, а также указать углы между векторами скорости и ускорения в точках *А,В,С,Д*. Можно ли найти эти углы, если не известна траектория частицы? Почему?

I.9.Частица в начальный момент $t_0=0$ имеет радиус-вектор $\vec r_0$ и двигается с постоянной скоростью $\vec v$. Найти,как меняется ее радиус-вектор в зависимости от времени и определить его в моменты t_1 и $t_2=2t_1$ в случаях: а) $\vec v \perp \vec r_0$, б) $\vec v \parallel \vec r_0$. Изобразить примерно положения частицы для моментов времени t_1 и t_2 в обоих случаях. Что можно сказать о траектории частицы в обоих случаях?

I.10. Частица в начальный момент $t_0=0$ имеет радиус-вектор $\vec{r}_0$ и двигается с постоянным ускорением $\vec{w}$. Начальная скорость равна нулю. Найти, как меняется ее радиус-вектор и скорость в зависимости от времени, и определить их в моменты t_1 и $t_2 = 3t_1$ в случаях: а) $\vec{w} \perp \vec{r}_0$; б) $\vec{w} \parallel \vec{r}_0$. Изобразить примерно положения частицы для моментов времени t_1 и t_2 в обоих случаях.

I.11. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{a}t(1-\alpha t)$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор, α – положительная постоянная. Найти:

а) скорость и ускорение частицы в зависимости от времени, найти их в момент времени $t_1 = \frac{1}{4\alpha}$;

б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку.

I.12. Радиус-вектор частицы меняется со временем по закону $\vec{r} = t(\vec{a} - \vec{b}t)$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ постоянные вектора.

а) Найти скорость и ускорение частицы в зависимости от времени, проанализировать полученные выражения. Совпадают ли направления векторов $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Как меняются направление и величина скорости с течением времени?

б) Какие наименования имеют вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Что можно сказать о направлении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

I.13. В момент $t_0=0$ частица вышла из начала отсчета так, что ее скорость менялась со временем по закону $\vec{v} = \vec{v}_0(1 - \frac{t}{\tau})$, где $\vec{v}_0$ – вектор начальной скорости, τ – положительная постоянная. Найти радиус-вектор и ускорение частицы в зависимости от времени, проанализировать полученные выражения и найти значения $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ в моменты времени $t_1 = \frac{\tau}{2}$, $t_2 = \tau$. Меняются ли направления радиуса-вектора и ускорения частицы с течением времени? Что можно сказать о траектории частицы?

I.14. Частица вышла из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0$ со скоростью, которая менялась по закону $\vec{v} = \vec{a}t^2 + \vec{b}t$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – некоторые постоянные вектора. Определить, как будут меняться со временем $\vec{r}(t)$ и $\vec{w}(t)$. Что нужно знать, чтобы найти положение частицы в момент времени t_1?

I.15. Частица вышла из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_0$, нулевой начальной скоростью и ускорением, которое менялось по закону $\vec{w} = \vec{b}t + \vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – постоянные вектора. Найти, как менялись со временем радиус-вектор и скорость частицы. При каком условии вектора $\vec v$ и $\vec w$ будут направлены одинаково?

1.16. Частица вышла из начала отсчета со скоростью $\vec v_o = 0$ и с ускорением $\vec w = \vec a(1 - \alpha t)$, где α -положительная постоянная, $\vec a$ - постоянный вектор. Найти, как менялись с течением времени $\vec r$ и $\vec v$ частицы. Что можно сказать о направлении движения частицы?

"В"

1.17. Частицу бросили в поле силы тяжести под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec v_o$. Найти, как меняется со временем ее радиус- вектор $\vec r$ и вектор скорости $\vec v$, изобразить их и ускорение частицы в моменты времени $t_1 = 0$ и в любые моменты t_2 и $t_3 > t_2$.

1.18. В момент, когда тело подбросили в поле силы тяжести вертикально вверх с начальной скорость $\vec v_o$, начал дуть горизонтальный ветер, сообщивший телу ускорение $\vec w = \vec b t$. Найти, как будет меняться со временем радиус-вектор тела.

ЗАНЯТИЕ 2

КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ЕГО СВЯЗЬ С ВЕКТОРНЫМ СПОСОБОМ

1. В декартовой системе координат положение точки в пространстве описывается координатами x,y,z (рис.2.1). Координаты являются функциями от времени $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

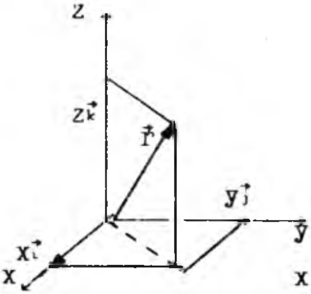


Рис.2.1

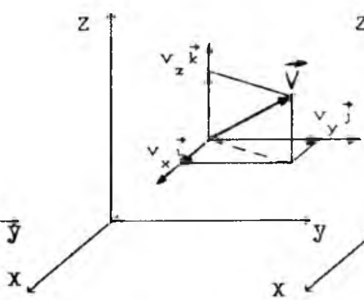


Рис.2.2

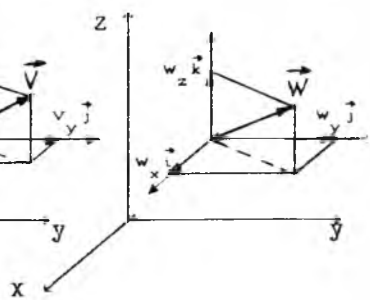


Рис.2.3

2.Связи между векторными величинами и их проекциями на координатные оси выражаются формулами:

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ (рис.2.I), $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$ (рис.2.2),

$\vec{w}=w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}$ (рис.2.3).

3.Величины векторов вычисляются через их проекции на координатные оси (рис.2.I, 2.2, 2.3):

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ ,\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\ ,\quad w=\sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2} \qquad (2.1)$$

4.Зная проекции вектора на координатные оси и его величину, можно найти направление вектора в пространстве. Это направление задается через косинусы углов, образованных вектором с осями координат. Допустим, что вектор $\vec{v}$ расположен в плоскости xy (рис.2.4). Тогда $\cos\alpha=\frac{v_x}{v}$, $\cos\beta=\frac{v_y}{v}$. Если вектор $\vec{v}$ проектируется на все три оси координат, то опуская перпендикуляры из конца вектора на координатные оси (рис.2.5), получим: $\cos\alpha=\frac{v_x}{v}$, $\cos\beta=\frac{v_y}{v}$, $\cos\gamma=\frac{v_z}{v}$. (2.2)

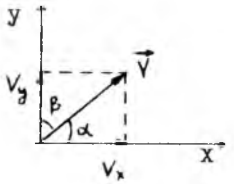


Рис.2.4

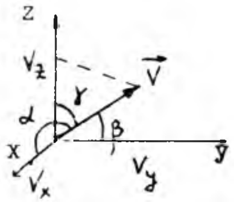


Рис.2.5

Аналогично можно находить направляющие косинусы для других векторов.

5.Углы между векторами скорости и ускорения можно находить различными способами. Но существует способ, позволяющий находить углы между векторами в любых случаях. Для этого используется скалярное произведение векторов

$$(\vec{v}\cdot\vec{w})=vw\cos\alpha,\quad \cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{v\cdot w}\ , \qquad (2.3)$$

$$\cos\alpha=\frac{\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)\left(w_x\vec{i}+w_y\vec{j}+w_z\vec{k}\right)}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\ \sqrt{w_x^2+w_y^2+w_z^2}}\ . \qquad (2.4)$$

Аналогично можно находить углы между любыми векторами.

6.Зависимости между проекциями различных величин выражаются формулами:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{2.5}$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{2.6}$$

$$x = x_o + \int_{t_o}^{t} v_x dt, \quad y = y_o + \int_{t_o}^{t} v_y dt, \quad z = z_o + \int_{t_o}^{t} v_z dt, \tag{2.7}$$

$$v_x = v_{ox} + \int_{t_o}^{t} w_x dt, \quad v_y = v_{oy} + \int_{t_o}^{t} w_y dt, \quad v_z = v_{oz} + \int_{t_o}^{t} w_z dt, \tag{2.8}$$

где $x_o, y_o, z_o, v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}$ - значения координат и скоростей в момент времени t_o (начальные условия), x, y, z, v_x, v_y, v_z - значения координат и скоростей в любой момент времени t (функции от t) (см.примечание пункта 4 занятия I).

7.Основные задачи:

а)зная $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, найти $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$, $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$;

б)зная $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ и начальные координаты точки, найти радиус-вектор точки $\vec{r}$, ее координаты в любой момент времени t, а также $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ и $\vec{w}$ в момент времени t;

в)зная $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ и начальные условия, найти вектора $\vec{v}$, $\vec{r}$ и их проекции на координатные оси в момент времени t;

г)зная зависимость координат точки от времени, найти выражение для траектории точки. (Траектория - это линия, по которой движется точка, ее уравнение: $y=y(x)$);

д)зная вектора $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и их проекции на координатные оси, найти углы между векторами.

8.При движении частицы скорость и ускорение в каждой точке траектории в общем случае разные, поэтому можно задать величины скорости и ускорения как функции положения точки, т.е. координат.

Пусть, например, проекция скорости частицы $v_x = v_x(x)$.

Найдем $v_x = v_x(t)$. Для этого запишем $v_x = \frac{dx}{dt}$, отсюда $dt = \frac{dx}{v_x}$.
Проинтегрируем полученное выражение

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v_x}; \quad t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v_x}.$$

Для нахождения правого интеграла нужно знать функцию $v_x = v(x)$.

Рассмотрим в качестве примера функцию $v_x = \alpha x$, при $t_0=0$, $x_0=0$, тогда $t = \int_0^x \alpha x\,dx = \frac{\alpha x^2}{2}$; $x = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}$; $v_x = \sqrt{2\alpha t}$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА. Частица вышла из начала отсчета и ее вектор скорости относительно декартовой системы координат менялся по закону $\vec{v} = a\vec{i}\cos\omega t + a\vec{j}\sin\omega t$, где a, ω - постоянные величины >0. Найти:

а) как зависят от времени радиус-вектор частицы и его величина, ускорение и его величина;

б) угол между векторами скорости и ускорения;

в) уравнение траектории. Построить примерную траекторию частицы;

г) перемещение частицы за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_2$, где $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$.

РЕШЕНИЕ. а) Найдем проекции вектора скорости на координатные оси. Это можно сделать двумя способами:

1) записать выражения для вектора скорости через его проекции на координатные оси для общего случая и данной задачи

$$\vec{v} = (a\cos\omega t)\vec{i} + (a\sin\omega t)\vec{j},$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

и сопоставить в обоих выражениях коэффициенты при одинаковых ортах,

2) умножить скалярно вектор $\vec{v}$ поочередно на единичные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Получим $v_x = a\cos\omega t$, $v_y = a\sin\omega t$. Пользуясь формулами (2.7) пункта 6, найдем x и y как функции от времени t:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t}(a\cos\omega t)dt, \qquad y = y_0 + \int_{t_0}^{t}(a\sin\omega t)dt.$$

За начало отсчета времени примем $t_o=0$. По условию задачи при t_o - x_o, y_o равны 0. Следовательно

$$x = \int_{t_o}^{t} (a \cos\omega t)dt = \frac{a}{\omega} \sin\omega t \Big|_o^t = \frac{a}{\omega} \sin\omega t;$$

$$y = \int_{t_o}^{t} (a \sin\omega t)dt = - \frac{a}{\omega} \cos\omega t \Big|_o^t = - \frac{a}{\omega} \cos\omega t + \frac{a}{\omega} = \frac{a}{\omega} (1 - \cos\omega t)$$

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\ ; \quad \vec{r} = \frac{a}{\omega}\,\vec{i}\sin\omega t + \frac{a}{\omega}(1 - \cos\omega t)\vec{j};$$

$$r = \sqrt{\left[\frac{a}{\omega} \sin\omega t\right]^2 + \left[\frac{a}{\omega}(1 - \cos\omega t)\right]^2} = \frac{a}{\omega} \sqrt{2(1 - \cos\omega t)}\ ;$$

Воспользуемся формулами (2.6) пункта 6.

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}\ , \quad w_x = \frac{d}{dt}(a \cos\omega t) = - a\omega \sin\omega t\ ,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt}\ , \quad w_y = \frac{d}{dt}(a \sin\omega t) = a\omega \cos\omega t\ ,$$

$$\vec{w} = - a\omega\vec{i} \sin\omega t + a\omega\vec{j} \cos\omega t\ ,$$

$$w = \sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t} = a\omega\ .$$

б)Угол α найдем по формуле (2.4) пункта 5. Для этого сначала найдем величину скорости:

$$v = \sqrt{a^2\cos^2\omega t + a^2\sin^2\omega t} = a\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{(a\vec{i}\cos\omega t + a\vec{j}\sin\omega t)(- a\omega\vec{i}\sin\omega t + a\omega\vec{j}\cos\omega t)}{a \cdot a\omega}\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{-a^2\omega \cos\omega t \sin\omega t + a^2\omega \sin\omega t \cos\omega t}{a^2\omega} = 0\ ,$$

следовательно $\alpha = 90^o$.

в)Найдем уравнение траектории. Для этого преобразуем уравнения координат x(t) и y(t) к виду: $x\frac{\omega}{a} = \sin\omega t$, $y\frac{\omega}{a} - 1 = \cos\omega t$. Возведем каждое из полученных уравнений в квадрат и сложим, в результате получим уравнение траектории:

$$\left[x\,\frac{\omega}{a}\right]^2 + \left[y\,\frac{\omega}{a} - 1\right]^2 = 1$$

Получили уравнение окружности. Построим примерную траекторию частицы (рис.2.6).

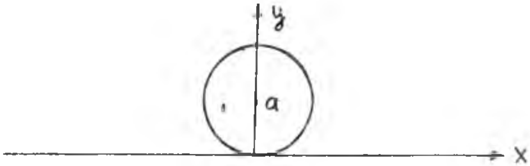


Рис.2.6

г)Перемещение частицы за время Δt получим по формуле:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \ , \ \vec{r}_1 = \frac{a}{\omega}\,\vec{i}\,\sin\omega t_1 + \frac{a}{\omega}\vec{j}(1 - \cos\omega t_1),$$

$$\vec{r}_2 = \frac{a}{\omega}\,\vec{i}\sin\omega t_2 + \frac{a}{\omega}\vec{j}(1 - \cos\omega t_2), \text{ следовательно}$$

$$\Delta\vec{r} = \frac{a}{\omega}(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)\vec{i} - \frac{a}{\omega}(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1)\vec{j}$$

$$\Delta r = \sqrt{\left[\frac{a}{\omega}(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)\right]^2 + \left[\frac{a}{\omega}(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1)\right]^2}$$

В полученное выражение подставим значения t_1 и t_2

$$\Delta r = \sqrt{\left[\frac{a}{\omega}\right]^2 + \left[\frac{a}{\omega}\right]^2} = \frac{a}{\omega}\sqrt{2} \ .$$

ЗАДАЧИ

Во всех задачах декартова система координат выбирается из соображений удобства, произвольно выбирается масштаб измерения вдоль осей x, y, z, причем для всех осей он должен быть одинаковый.

"А"

2.1.Дан радиус-вектор частицы $\vec{r} = a\vec{i}+в\vec{j}+ct\vec{k}$, где a, $в$, c - положительные постоянные величины. Найти чему равны x,y,z и величина r в зависимости от времени, а также значение радиус-вектора в момент времени $t_o = 0$.

2.2.Координаты точки в зависимости от времени меняются по закону $x(t)=at$, $y(t)=bt^2$, $z(t)=c$. Записать радиус-вектор, его величину как функцию от времени. Найти направляющие косинусы радиуса-вектора $\vec{r}$. a, b, c – положительные постоянные величины.

2.3.Точка движется со скоростью $\vec{v} = at^2\vec{i}+b\vec{j}+ ct\vec{k}$, где a, b, c – положительные постоянные величины. Как зависят проекции скорости на координатные оси от времени и как меняется величина скорости и направляющие косинусы от времени.

2.4.Даны проекции скорости точки на координатные оси $v_x= ct^2$, $v_y= bt$, $v_z= \alpha(1-\beta t)$, где α, b, c, β – положительные постоянные величины. Записать вектор скорости и его величину как функцию от времени, а также определить вектор скорости и его величину в моменты времени $t_1= \frac{1}{2\beta}$ и $t_2= \frac{1}{\beta}$.

2.5.Известны проекции ускорения, с которым движется частица: $w_x= \alpha t$, $w_y= \beta t$, $w_z= c$, где α, β, c – положительные постоянные величины. Выразить вектор ускорения через его проекции и найти, как зависит величина ускорения и направляющие косинусы от времени, а также определить значение вектора ускорения и его величину в момент времени $t=0$.

2.6.Вектор ускорения частицы меняется по закону: $\vec{W} = \alpha t\vec{i} + \beta(1 - \frac{t}{c})\vec{j} + b\vec{k}$, где α, β, c, b – положительные постоянные величины. Как зависят от времени проекции ускорения на координатные оси и его величина. Определить значение проекций и величину ускорения в момент времени $t =1c$.

2.7.В момент времени t_1: $\vec{r}_1(t_1)= b\vec{i} + m\vec{k}$, а в момент времени t_2: $\vec{r}_2(t_2)= c\vec{i} + n\vec{j}$, где b, c, m, n -положительные постоянные величины. Можно ли вычислить скорость и ускорение частицы, исходя из данных условий?

2.8.Что можно определить, если радиус-вектор частицы меняется со временем по закону $\vec{r} = bt\vec{i} + l\vec{j} + ct^3\vec{k}$? l, b, c – положительные постоянные величины.

2.9.Известны скорости частицы в моменты времени t_1 и t_2; $\vec{v}(t_1)= a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{v}(t_2)= a\vec{i} + c\vec{j}$, a, b, c – положительные постоянные величины. Что можно определить, исходя из данных условий? Можно ли найти радиус-вектор и мгновенное ускорение в моменты t_2, t_3? Что для этого нужно знать?

2.10.Скорость частицы меняется по закону $\vec{v} =a\vec{i}+bt^3\vec{j}$. Что можно найти, зная эту зависимость? a, b – положительные постоянные величины.

2.11. Проекции ускорения на координатные оси зависят от времени по закону $w_x = at$, $w_y = ct$, $w_z = b$, где a, b, c – положительные постоянные величины. Что можно вычислить, зная эти зависимости?

"Б"

2.12. Радиус-вектор точки A относительно декартовой системы координат меняется с течением времени по закону $\vec{r} = \alpha(at - 1)\vec{i} + bt^2\vec{j}$, где α, b, a – постоянные положительные величины. Найти:

а) зависимость от времени векторов скорости, ускорения;

б) уравнение траектории точки;

в) зависимость от времени угла φ между векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$;

г) значение векторов $\vec{v}$, $\vec{w}$ и их величин в момент времени $t = \frac{1}{a}$.

2.13. Точка движется в плоскости xy по закону $x = at$, $y = at(1 - \alpha t)$, где a и α – положительные постоянные. Записать:

а) вектора скорости, ускорения и их величины как функции от времени;

б) уравнение траектории точки;

в) зависимость от времени угла между векторами скорости и ускорения;

г) найти записанные вектора и их величины в моменты $t_0 = 0$ и $t_1 = \frac{1}{\alpha}$.

2.14. Координаты точки меняются по закону $x = a \sin \omega t$, $y = b(1 - \cos \omega t)$, где a, b и ω – положительные постоянные. Найти:

а) перемещение точки в зависимости от времени;

б) уравнение траектории;

в) значения $\vec{v}$, $\vec{w}$ и v, w в моменты времени $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$;

г) построить примерную траекторию движения точки. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории, и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется точка по траектории?

2.15. Частица вышла из начала координат со скоростью, которая менялась по закону $\vec{v} = b\frac{t}{\tau}\vec{i} + c\vec{k}$, где b, c, τ – постоянные величины > 0, τ измеряется в единицах времени. Определить:

а) радиус-вектор $\vec{r}$, ускорение $\vec{w}$ и их величины в зависимости от времени;

б) уравнение траектории;

в) угол α между векторами скорости и ускорения как функцию от времени;

г) значения $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и r, v, w, α в момент времени $t_1=\tau$.

д) построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории, и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

2.16. Частица двигалась в плоскости xy. Радиус-вектор частицы в начальный момент времени был направлен под углом α к оси x и имел величину r_0. При движении частицы проекции ее скорости на координатные оси менялись по закону $v_x=at$, $v_y=ct$, где a, c - постоянные положительные величины. Найти:

а) радиус-вектор $\vec{r}$, вектор ускорения $\vec{w}$;

б) уравнение траектории;

в) угол φ между векторами скорости и ускорения как функцию от времени;

г) перемещение частицы в зависимости от времени;

д) построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

2.17. При движении частицы из начала координат ускорение менялось по закону $\vec{w}=at\vec{i}$. Начальная скорость частицы $\vec{v}_0=b\vec{j}$. a, b - положительные постоянные величины. Найти:

а) зависимость от времени радиуса-вектора частицы и вектора скорости;

б) уравнение траектории частицы;

в) зависимость от времени угла α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$;

г) построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

2.18. Частица вышла из начала координат, при этом проекции ускорения на координатные оси $w_x=a\cos\omega t$, $w_y=b\sin\omega t$. Начальная скорость частицы $v_{0y}=-\frac{b}{\omega}$, a, b, ω - положительные постоянные. Найти:

а) зависимость от времени радиуса-вектора $\vec{r}$, скорости $\vec{v}$, ускорения $\vec{w}$;

б)уравнение траектории частицы;

в)зависимость от времени угла α между векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$;

г)значение векторов $\vec{v}$, $\vec{w}$, их величин и угла α в момент времени $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$;

д)построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

"B"

2.19.Частица движется в плоскости xy с постоянным ускорением $\vec{w}$, направление которого противоположно положительному направлению оси y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y=ax-bx^2$,где a и b - положительные постоянные. Найти скорость частицы в начале координат. Построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

2.20.Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v= a\sqrt{x}$, где a - положительная постоянная. Имея в виду, что в момент $t=0$ она находилась в точке $x=0$, найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы. Построить примерную траекторию движения частицы. Указать направления скорости и ускорения для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется частица по траектории?

2.21.Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подьема постоянна и равна v_0. Благодаря ветру, шар приобретает постоянное горизонтальное ускорение w_0. Определить, как будут меняться координаты шара с течением времени . Построить примерную траекторию движения шара. Указать направления скорости для любых трех точек траектории и перемещения от начальной точки траектории до выбранных точек. В каком направлении движется воздушный шар по траектории?

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАНЯТИЮ 2

I.Кроме декартовой системы координат в физике используются и другие системы. Наиболее распространенными являются: цилиндрическая и сферическая системы координат.

2.Сферической системой координат удобно пользоваться при движении тел по сферическим поверхностям. Координаты точки в сферической системе φ, θ, ρ (рис.2.7). ρ - отрезок, соединяющий движущуюся точку с началом отсчета (равен величине радиус-вектора), θ - угол между ρ и осью z, φ - угол между проекцией ρ на плоскость xoy, R, и осью x. $R = \rho \sin\theta$.

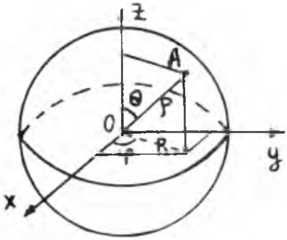


Рис.2.7

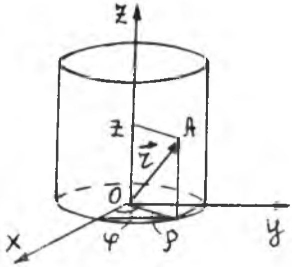


Рис.2.8

Связь между сферическими и декартовыми координатами:

$$x = R\cos\varphi, \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta, \quad z = \rho\cos\theta \qquad (2.9)$$

3.Цилиндрической системой координат удобно пользоваться при движении тел по траекториям, имеющим цилиндрическую симметрию. Координаты точки в цилиндрической системе: ρ,φ,z (рис.2.8). ρ - отрезок, соединяющий проекцию точки на плоскость xoy и начало координат, φ - угол между осью x и ρ, z - координата, совпадающая с координатой z в декартовой системе.

Связь цилиндрических координат с декартовыми:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z \qquad (2.10)$$

4.При движении точки в плоскости можно принять z=0 и тогда для нахождения положения точки на плоскости достаточно знать только две координаты. В этом случае цилиндрическая и сферическая системы координат переходят в полярную (рис.2.9).

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi. \qquad (2.11)$$

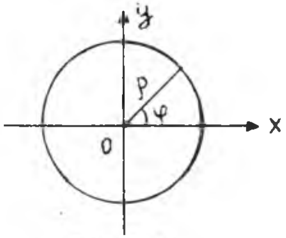


Рис.2.9

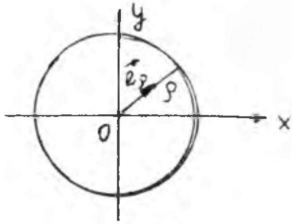


Рис.2.10

5. При использовании цилиндрической и сферической систем координат радиус-вектор $\vec{r}$, вектора $\vec{v}$ и $\vec{w}$ также можно выражать через проекции на координатные оси.

Рассмотрим выражение $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ через проекции в цилиндрической системе координат. Величина радиус-вектора (рис.2.8):

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \;; \qquad (2.12)$$

Введем на ρ единичный вектор $\vec{e}_\rho$, который направлен вдоль ρ от начала координат (рис.2.10). Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ не меняются при движении, то $\vec{e}_\rho$ при движении точки вращается вместе с ρ. $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(t)$.

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k} \;. \qquad (2.13)$$

7. Выражение скорости: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$;

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \;. \qquad (2.14)$$

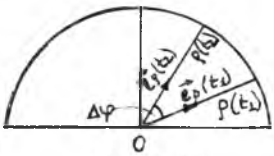


Рис.2.11

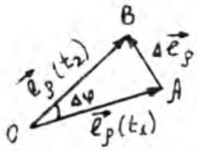


Рис.2.12

Найдем $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$, для этого обратимся к рис.2.11. Здесь $\rho(t_1)$, $\rho(t_2)$ – координаты ρ в моменты времени t_1 и t_2; $\vec{e}_\rho(t_1)$, $\vec{e}_\rho(t_2)$ – единичные вектора в те же моменты времени. Изобразим отдельно единичные вектора (рис.2.12):

$$AB = |\Delta\vec{e}_\rho| = \Delta e_\rho; \quad |\Delta\vec{e}_\rho| = |\vec{e}_\rho|\Delta\varphi, \qquad (2.15)$$

$\Delta\varphi$ мало и $|\Delta\vec{e}_\rho|$ совпадает с дугой окружности, описываемой e_ρ при вращении ρ. Разделим (2.15) на Δt:

$\frac{\Delta e_\rho}{\Delta t}=|\vec{e}_\rho|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, в пределе при $\Delta t\to 0$ $\frac{de_\rho}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}$, т.к. $(|\vec{e}_\rho|=1$ (2.16).

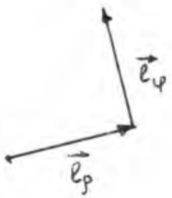


Рис.2.13

Найдем направление вектора $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$. В треугольнике *OBA* (рис.2.12) $\angle OAB = \angle OBA$. Если $\angle AOB$ очень мал, то $\angle OAB = \angle OBA \simeq \frac{\pi}{2}$, т.е. в пределе при $\Delta t\to 0$ вектор $\frac{\Delta\vec{e}_\rho}{\Delta t}$ переходит в $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$ и направлен под углом $\frac{\pi}{2}$ к $\vec{e}_\rho$. Введем единичный вектор $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_\rho$ и направим его в сторону вращения координаты ρ (рис.2.13), $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$. Обозначим: $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$, $\rho\omega = v_\varphi$, $\frac{d\rho}{dt} = v_\rho$. Тогда вектор скорости в цилиндрической системе координат:

$$\vec{v} = v_\rho\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi + v_z\vec{k} \qquad (2.17)$$

v_ρ - обозначает скорость изменения длины ρ, v_φ - скорость изменения направления ρ.

Найдем величину скорости. В декартовой системе: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$;

$$x = \rho\cos\varphi,\ v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (2.18)$$

$$y = \rho\sin\varphi,\ v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (2.19)$$

$$z = z,\ v_z=\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dt}. \qquad (2.20)$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+v_z^2}, \qquad (2.21)$$

$$v=\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(\rho\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+v_z^2}. \qquad (2.22)$$

Сравним полученное выражение с выражениями для проекций скорости в цилиндрической системе координат. Из сравнения видно,что формулу (2.22) можно записать:

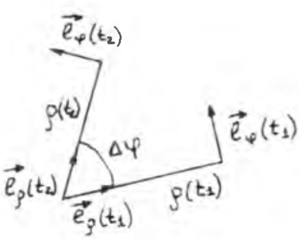
$$v=\sqrt{v_\rho^2+v_\varphi^2+v_z^2}. \qquad (2.23)$$

8. Получим выражение для $\vec{w}$ через цилиндрические координаты. По определению: $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

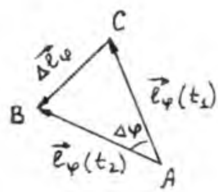
$$\vec{w} = \frac{d}{dt}\left(v_\rho \vec{e}_\rho + \rho\omega \vec{e}_\varphi + v_z \vec{k}\right);$$

$$\vec{w} = \frac{dv_\rho}{dt}\vec{e}_\rho + v_\rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \omega \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\omega\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}_z. \quad (2.24)$$

Найдем $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$. Рассмотрим рис.2.14(б). $\Delta\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\rho\Delta\varphi$; если $\Delta\varphi$ мало, то $\frac{\Delta\vec{e}_\varphi}{\Delta t} = \vec{e}_\varphi\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. В пределе $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi\frac{d\varphi}{dt}$. Направлен вектор $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$ по ρ, но в противоположную сторону, так как $\angle BAC$ стремится к нулю, а $\angle BCA$ к $\frac{\pi}{2}$, но $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_\rho$, а $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \perp \vec{e}_\varphi$, лежат же вектора в одной плоскости.



а)



б)

Рис.2.14

$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho$, $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega\,\vec{e}_\rho$. Учтем, что $\frac{d\rho}{dt} = v_\rho$, $\rho\omega = v_\varphi$, $\frac{dv_z}{dt} = w_z$, $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$. Тогда

$$\vec{w} = \frac{dv_\rho}{dt}\vec{e}_\rho + v_\rho\omega\,\vec{e}_\varphi + \omega\, v_\rho\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\varphi - \rho\omega^2\vec{e}_\rho + w_z\vec{k}, \quad (2.25)$$

$$\vec{w} = \left(\frac{dv_\rho}{dt} - \rho\,\omega^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\frac{d\omega}{dt} + 2v_\rho\omega\right)\vec{e}_\varphi + w_z\vec{k}. \quad (2.26)$$

$\vec{w}_\rho = \left(\frac{dv_\rho}{dt} - \rho\,\omega^2\right)\vec{e}_\rho$ – называется радиальной составляющей,

$\vec{w}_\varphi = \left(\rho\frac{d\omega}{dt} + 2v_\rho\omega\right)\vec{e}_\varphi$ – называется трансверсальной или поперечной составляющей.

Так как $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_\rho$ и плоскость, в которой лежат вектора $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_\rho$, перпендикулярна $\vec{k}$, то

$$W = \sqrt{W_\rho^2 + W_\varphi^2 + W_z^2}. \qquad (2.27)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА. Даны уравнения движения точки $x = 2a\cos^2\frac{\beta t}{2}$, $y = a\sin\beta t$, $z = bt^2$, где a, b, β – положительные постоянные. Определить, как меняются цилиндрические координаты точки в зависимости от времени, а также выражения скорости и ускорения в цилиндрической системе координат. Построить примерную траекторию точки и показать, как будут изменяться ρ и φ с течением времени.

РЕШЕНИЕ. Запишем связь декартовых и цилиндрических координат:
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$
$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1. \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
Преобразуем выражение для x:
$$x = 2a\cos^2\frac{\beta t}{2}, \quad \cos^2\frac{\beta t}{2} = \frac{1 + \cos\beta t}{2}, \quad x = a(1 + \cos\beta t),$$
$$\rho = \sqrt{a^2(1 + \cos\beta t)^2 + a^2\sin^2\beta t},$$
$$\rho = a\sqrt{2(1 + \cos\beta t)} = 2a\cos\frac{\beta t}{2}.$$
Найдем φ:
$$\frac{x}{y} = \mathrm{ctg}\,\varphi, \quad \frac{x}{y} = \frac{2a\cos^2\frac{\beta t}{2}}{a\sin\beta t} = \frac{2\cos^2\frac{\beta t}{2}}{2\sin\frac{\beta t}{2}\cos\frac{\beta t}{2}} = \mathrm{ctg}\frac{\beta t}{2},$$
$$\mathrm{ctg}\,\varphi = \mathrm{ctg}\frac{\beta t}{2}, \text{ следовательно: } \varphi = \frac{\beta t}{2}, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta}{2}.$$

Найдем выражения для скорости и ускорения в цилиндрической системе координат
$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k},$$
$$\vec{v} = -2a\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta t}{2}\vec{e}_\rho + 2a\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta t}{2}\vec{e}_\varphi + 2bt\vec{k} =$$
$$= -a\beta\sin\frac{\beta t}{2}\vec{e}_\rho + a\beta\cos\frac{\beta t}{2}\vec{e}_\varphi + 2bt\vec{k},$$
$$v = \sqrt{a^2\beta^2 + 4b^2t^2}.$$

$$\vec{w} = \left(\frac{dv_\rho}{dt} - \rho\,\omega^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\frac{d\omega}{dt} + 2v_\rho\omega\right)\vec{e}_\varphi + w_z\vec{k},$$

$$\vec{w} = \left[-a\,\frac{\beta^2}{2}\cos\frac{\beta t}{2} - 2a\,\frac{\beta^2}{4}\cos\frac{\beta t}{2}\right]\vec{e}_\rho - 2a\,\frac{\beta^2}{2}\sin\frac{\beta t}{2}\,\vec{e}_\varphi + 2b\,\vec{k}\ ,$$

$$\vec{w} = -\,a\,\beta^2\cos\frac{\beta t}{2}\,\vec{e}_\rho - a\,\beta^2\sin\frac{\beta t}{2}\,\vec{e}_\varphi + 2b\,\vec{k}\ ,$$

$$w = \sqrt{a^2\beta^4 + 4b^2}\ .$$

Рассмотрим траекторию точки. В проекции на плоскость xy траектория точки представляет собой окружность радиуса a (рис.2.15). Центр окружности имеет координаты: $x = a$; $y = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x - a}{a} = \cos\beta t \\ \dfrac{y}{a} = \sin\beta t \end{cases} \qquad (x - a)^2 + y^2 = a^2$$

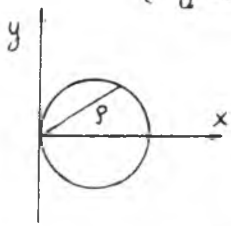


Рис.2.15

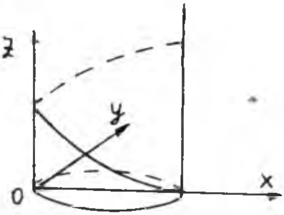


Рис.2.16

ρ меняется от $2a$ до 0 при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$; и от 0 до $2a$ при изменении φ от $-\frac{\pi}{2}$ до 0. Вдоль координаты z точка движется равноускоренно. Траектория точки будет лежать на цилиндрической поверхности (рис.2.16) и точка будет описывать винтовую линию с увеличивающимся шагом.

ЗАДАЧИ

2.22. Цилиндрические координаты точки меняются при ее движении по закону: $\rho = a$; $\varphi = \beta t$; $z = bt$, где a, β, b – заданные постоянные положительные величины. Найти проекции скорости и ускорения точки в цилиндрических координатах, а также величину v, w. Найти связь цилиндрических и декартовых координат. Построить примерную траекторию и указать $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ в любые два момента времени.

2.23. Точка М движется так, что ее полярные координаты меняются по закону $\rho = 2a\cos\frac{\beta t}{2}$; $\varphi = \frac{\beta t}{2}$, где a, β – заданные постоянные положительные величины. Найти проекции скорости и ускорения на оси полярной системы координат. Построить примерную траекторию и указать $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ в любые два момента времени.

2.24. Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $\rho = a\, e^{\alpha t}$; $\varphi = \alpha t$, где a, α – положительные постоянные величины. Найти проекции скорости и ускорения на полярные оси, а также величины скорости и ускорения. Построить примерную траекторию и указать $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ в любые два момента времени.

2.25. Точка движется по криволинейной траектории согласно уравнениям $x = a \cos\omega t$; $y = a \sin\omega t$; $z = ct$. a, c, ω – положительные постоянные. Найти как меняются ее цилиндрические координаты в зависимости от времени, а также проекции скорости и ускорения на цилиндрические оси и величины скорости и ускорения. Построить примерную траекторию и указать $\vec{w}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ в любые два момента времени.

ЗАНЯТИЕ 3

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Рассмотрим движение тела, брошенного со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Тело движется в поле силы тяжести и имеет ускорение $\vec{g}$. Сопротивление воздуха не учитываем.

I. Для изучения его движения в координатном способе описания движения сначала выбирается система координат. Выбор ее определяется соображениями удобства решения задачи.

В большинстве задач движение осуществляется в одной плоскости, поэтому достаточно взять две оси координат x, y. Направление осей чаще всего выбирается так, чтобы ускорение g проектировалось только на одну ось, например, y (рис.3.I).

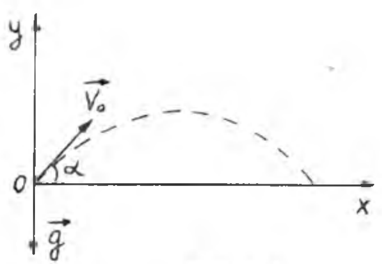


Рис.3.I

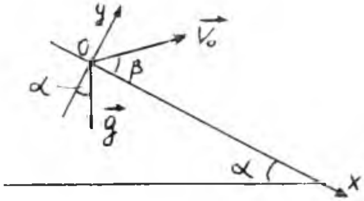


Рис.3.2

Если движение брошенного тела рассматривается относительно наклонной плоскости, то иногда оси x, y направляют вдоль наклонной плоскости (рис.3.2). В этом случае ускорение g будет проектироваться на обе оси: $g_y = -g\cos\alpha$, $g_x = g\sin\alpha$.
Выбор начала координат также определяется соображениями удобства. Чаще всего начало координат совмещают с начальным положением брошенного тела, а начало отсчета времени – с моментом бросания тела. Но иногда выгоднее совмещать начало координат с другими точками и момент отсчета времени начинать не с $t=0$.

2.Зная ускорение и начальные условия, можно найти, как меняется с течением времени скорость и радиус-вектор частицы

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Их проекции на координатные оси зависят от выбора системы координат.
В соответствии с рис.3.I:

$$v_x = v_0\cos\alpha, \quad v_y = v_0\sin\alpha - gt \tag{3.I}$$

$$x = x_0 + v_0 t\cos\alpha, \quad y = y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{3.2}$$

В соответствии с рис.3.2 :

$$v_x = v_0\cos\beta + gt\sin\alpha, \quad v_y = v_0\sin\beta - gt\cos\alpha, \tag{3.3}$$

$$x = v_0 t\cos\beta + \frac{gt^2}{2}\sin\alpha, \quad y = v_0 t\sin\beta - \frac{gt^2}{2}\cos\alpha. \tag{3.4}$$

Примечание. При падении тела на наклонную плоскость систему координат можно выбрать как на рисунке 3.I. В этом случае v_x, v_y, x, y будут меняться в соответствии с формулами (3.I) и (3.2). Но при падении тела на наклонную плоскость координаты точки падения должны соответствовать уравнению прямой *OA*, записанному относительно выбранной системы координат, например, по рис.3.2 это будет уравнение $y = -kx$.

3.Найдем траекторию движения тела, воспользовавшись системой координат, изображенной на рис.3.I. Тогда будут справедливы формулы (3.2) и, следовательно, $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$.
Подставим полученное значение t в y

$$y = \frac{x\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Это уравнение параболы, при $y=0$ x имеет два значения $x_0=0$,

$x_к = \dfrac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$. Вершина параболы имеет координаты: $x_B = \dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{2g}$; $y_B = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ (рис.3.3а). Траектория тела не зависит от выбора системы координат, но вычисление траектории зависит. Например, если систему координат выбрать как на рис.3.2, то вычислять траекторию сложнее, чем при выборе системы координат как на рис.3.I. Следовательно, если требуется показать траекторию, то нужно ввести координаты как на рис.3.I (можно даже не изображать эту систему координат, а ввести ее мысленно), начертить относительно них параболу (рис.3.3б) и решать задачу относительно любой другой системы координат.

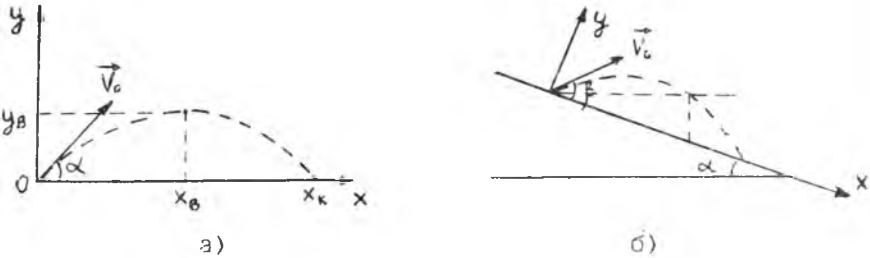


Рис.3.3

4.Проанализируем формулы (3.I) и (3.2) в случае, когда система координат выбрана так, как на рис.3.I. v_x – не меняется, v_y – изменяется: в начале движения $v_0\sin\alpha > gt$, причем $v_0\sin\alpha$ не меняется, а gt увеличивается, поэтому v_y уменьшается. В точке C – v_y=0, т.е. $v_0\sin\alpha = gt$. Далее с ростом t, $gt > v_0\sin\alpha$ и $|v_y|$ – увеличивается, но становится отрицательным $v_y < 0$ (рис.3.4). В точке B $|v_{yA}| = |v_{yB}|$ – по величине и противоположны

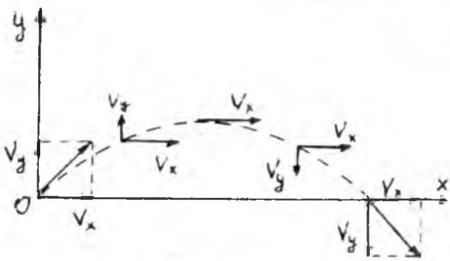


Рис.3.4

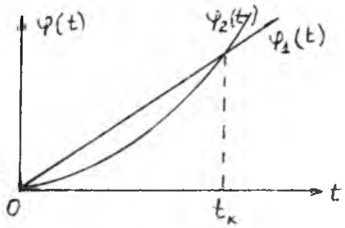


Рис.3.5

по направлению. Координата $y = v_o t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$ сначала увеличивается, $v_o t\sin\alpha > \frac{gt^2}{2}$, в точке C достигает максимального значения, а затем y уменьшается. Представим y как разность двух функций: $y = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. $\varphi_1(t) = v_o t\sin\alpha$ – увеличивается с ростом t, $\varphi_2(t) = \frac{gt^2}{2}$ – также увеличивается с ростом t, но сначала $v_o t\sin\alpha$ увеличивается быстрее, чем $\frac{gt^2}{2}$ (рис.3.5), а затем наоборот, $\frac{gt^2}{2}$ увеличивается быстрее, чем $v_o t\sin\alpha$ и поэтому y начинает уменьшаться (рис.3.5) и в момент t_k $y=0$.

5.Найдем все время движения тела, а также время подьема. При падении тела $y = 0$, следовательно:

$$v_o t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0; \quad t_o = 0, \quad t_k = \frac{2v_o\sin\alpha}{g}, \quad \Delta t = t_k - t_o = t_k,$$

t_k – все время движения. Время подьема можно определить двумя способами: I)из соображения симметрии время подьема $t_п$ и время падения равны, следовательно, $t_п = \frac{t_k}{2}$; 2)при h_{max} $v_y = 0$,

$0 = v_o\sin\alpha - gt_п$, отсюда найдем время подьема: $t_п = \frac{v_o\sin\alpha}{g}$.

6.Зная t_k и $t_п$, можно найти дальность полета S и максимальную высоту подьема H:

$S = x(t_k)$, $H = y(t_п)$.

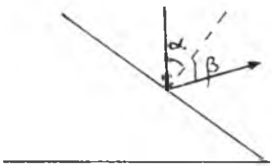


Рис.3.6

7.В некоторых задачах говорится об абсолютно упругом ударе движущейся частицы о плоскость, образованную массивным телом. В этом случае, по законам абсолютно упругого удара, угол α между вектором скорости частицы до удара и перпендикуляром к плоскости, проведенном в точке удара, равен углу β между вектором скорости частицы после удара и тем же перпендикуляром (рис.3.6, угол падения равен углу отражения).

ЗАДАЧИ

"А"

3.I.Тело бросили с начальной скоростью v_o под углом α к горизонту. Выбрать оси координат, записать, как будут меняться проекции скорости и координаты тела с течением времени во всех ниже перечисленных случаях, изобразить примерные траектории движения тела и указать координаты точек падения.

а)Тело бросили из ямы глубиной h. Оно упало на поверхность земли.

б)Тело бросили с крутого обрыва высотой h, и оно упало на поверхность земли.

в)Тело бросили вверх по наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом.

г)Тело упало в точку на горе, имеющую высоту h на расстоянии s от места бросания.

3.2.В следующих задачах надо определить, какие оси координат удобно выбрать для описания положения тел в пространстве, каковы будут начальные координаты тел, и написать, как будут меняться с течением времени координаты и проекции скорости каждого тела.

а)Два тела бросили из одной и той же точки с одинаковыми начальными скоростями, но одно под углом α, а другое под углом β к горизонту.

б)Два тела бросили из одной и той же точки с одинаковыми начальными скоростями и под одним и тем же углом α к горизонту, но второе на τ позже первого.

в)Два тела бросили одновременно с одной высоты с начальными скоростями v_{o1} и v_{o2} под углами α_1 и α_2 к горизонту. Точки бросания находились на расстоянии s друг от друга. Тела бросали: а)навстречу друг другу; б) в одну и ту же сторону.

г)Два тела бросили навстречу друг другу под углами α к горизонту с скоростями v_{o1} и v_{o2}. Тела первоначально находились на расстоянии s друг от друга и одно выше другого на h.

3.3.Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_o(α и v_o неизвестны). В какой-то момент времени t_k тело имело координаты $y(t_k)=h$ и $x(t_k)=S$. Можно ли что-либо сказать об α и v_o? Почему? Что для этого нужно знать? Начертить возможные траектории движения тела.

3.4.Тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_o. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

а)зависимость координат x, y от времени;

б)вектор скорости и его величину как функции от времени;

в)время движения;

г)максимальную высоту подьема и горизонтальную дальность полета;

д)уравнение траектории;

е)где будет находиться тело через промежуток времени τ от начала движения и какова будет его скорость?

ж)Как зависит от времени угол между $\vec{v}$ и $\vec{g}$?

"Б"

3.5.Тело бросили с начальной скоростью v_o под углом к горизонту. Построить график зависимости дальности полета и максимальной высоты подьема от угла α. При каком значении α дальность полета тела будет равна максимальной высоте подьема?

3.6.Из ямы глубиной h производится выстрел со скоростью v_o под углом α к горизонту. На каком расстоянии S по горизонтали упадет снаряд? Какова при этом максимальная высота подьема над уровнем земли?

3.7.На какой высоте была сброшена бомба с самолета, летевшего горизонтально со скоростью v_o, если она попала в вершину горы высотой h на расстоянии S по горизонтали от точки бросания?

3.8.Тело брошено в озеро с крутого обрыва высотой h. Начальная скорость тела составляет угол α с горизонтом и равна v_o. На каком расстоянии от берега упадет тело? Через какое время после начала движения тело окажется на высоте H над водой? Какова скорость тела в момент падения в воду?

3.9.Пикируюший бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты h, находясь на расстоянии S от цели. Скорость его v_o. Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

3.10.Определить высоты h_1, h_2 и h_3 над поверхностью воды трех пунктов отвесного берега, если известно, что три пули, выпущенные одновременно из этих пунктов с горизонтальными скоростями 50м/с, 75м/с и 100м/с одновременно упали в воду, причем расстояние от места падения 1-ой пули до берега 100м. Определить также скорости пуль в момент падения в воду.

3.11.Шарик начал падать с высоты h с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Ударившись о плоскость, он упруго отразился от неё. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

3.12. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии s друг от друга. Через какой промежуток времени снаряд, выпущенный с начальной скоростью v_0, достигнет цели при отсутствии сопротивления воздуха.

3.13. Из пушки выпустили последовательно два снаряда с одинаковыми по величине начальными скоростями v_0=100м/с. Первый - под углом $\alpha_1 = 60^\circ$, второй под углом $\alpha_2 = 45^\circ$ (снаряды двигались в одной и той же плоскости). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

3.14. Два тела, находящиеся на одной высоте на расстоянии s друг от друга, брошены одновременно горизонтально в одной плоскости навстречу друг другу. При каком условии тела встретятся в воздухе, если начальные скорости тел равны v_{01} и v_{02}?

3.15. На высоте h летит самолет с постоянной скоростью v. В момент, когда он находится над зенитной батареей, производится выстрел со скоростью v_c Найти, под каким углом к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы снаряд попал в самолет, и на какую продолжительность полета нужно установить взрыватель, чтобы снаряд разорвался в точке встречи с целью?

"B"

3.16. Необходимо с земли перебросить тело через вертикальную стенку высотой h, находящуюся на расстоянии S. При какой наименьшей начальной скорости это возможно? Под каким углом α к горизонту должна быть в этом случае направлена скорость?

3.17. Под каким углом к горизонту необходимо бросить камень с обрывистого берега реки, чтобы он упал в воду возможно дальше от берега. Высота обрыва h. Начальная скорость камня v_0.

3.18. С какой наименьшей скоростью нужно бросить тело с вершины башни высотой h, чтобы оно упало на расстоянии S от подножья башни?

3.19. Шарик свободно падает на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Соударения шарика с наклонной плоскостью рассматривать как абсолютно упругие. Найти отношение расстояний между точками, в которых подпрыгивающий шарик касается наклонной плоскости.

3.20.Снаряд вылетает из пушки с начальной скоростью v_o. Определить зону безопасности, то есть геометрическое место всех точек,куда снаряд не может попасть.

3.21.Артиллерийское орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного под углом α к горизонту (рис.3.7).Орудие находится в точке A на расстоянии l от основания укрытия (точка B). Начальная скорость снаряда v_o. Найти максимальную дальность полета снаряда (траектория снаряда лежит в плоскости рисунка).

3.22.Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью v_o под углом α к горизонту, если он ударится о потолок (рис.3.8). Высота потолка h. Удар считать упругим.

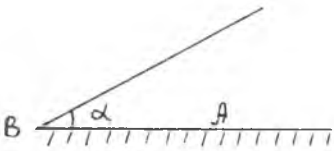


рис.3.7

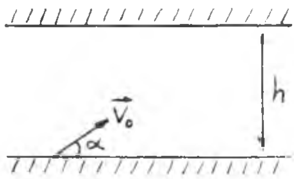


рис.3.8

3.23.Тело бросили со скоростью v_o под углом α к горизонту. Оно ударилось о стенку, находящуюся на расстоянии s от точки бросания. Определить, где упадет тело на землю, если а)стенка неподвижна; б)стенка движется со скоростью v. Удар считать абсолютно упругим.

ЗАНЯТИЕ 4

ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ЕГО СВЯЗЬ С ВЕКТОРНЫМ И КООРДИНАТНЫМ СПОСОБАМИ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

1.В естественном способе описания движения положение точки определяется заданием координаты l, отсчитываемой вдоль траектории от какой-либо точки, взятой на траектории и принимаемой за начало отсчета (рис.4.1). При отсчете по одному направлению координата считается положительной, а по другому – отрицательной. Траектория характеризуется радиусом кривизны R (рис.4.2). R – радиус окружности, проходящей через три близко расположенные точки траектории , при этом дуга окружности между точками должна совпасть с участком траектории. Плоскость, в которой лежит эта окружность, называется соприкасающейся плоскостью.

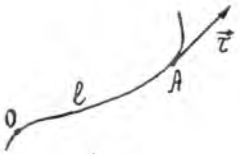


Рис.4.I

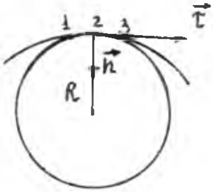


Рис.4.2

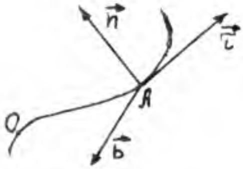


Рис.4.3

2.Для связи естественного способа описания движения с векторным вводятся единичные вектора $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$.

Вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону возрастания координаты l (рис.4.I). Вектор $\vec{n}$ направлен по радиусу кривизны к центру кривизны (рис.4.2). Вектора $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ лежат в соприкасающейся плоскости.

3.Кроме единичных векторов $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ вводится единичный вектор $\vec{b}$ так, чтобы вектора $\vec{n}$, $\vec{\tau}$, $\vec{b}$ образовывали правую тройку векторов (рис.4.3). Прямая, на которой лежит вектор $\vec{b}$,называется бинормалью. Если траектория плоская, то вектора $\vec{n}$, $\vec{\tau}$ будут лежать в плоскости траектории и $\vec{b}$ = const. Если траектория не лежит в одной плоскости, то соприкасающаяся плоскость и вектор $\vec{b}$ будут менять свое направление в пространстве.

4.Вектор скорости направлен по касательной к траектории, поэтому скорость можно представить в виде $\vec{v}=v_\tau\vec{\tau}$, где v_τ проекция скорости на направление $\vec{\tau}$. Если направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{\tau}$ совпадают, то $v_\tau>0$ (рис.4.4), если противоположны, то $v_\tau<0$. (рис.4.5).

Иногда индекс τ у скорости опускают, так как величина скорости равна величине v_τ. При движении точки, $v=v(t)$, $\vec{\tau}=\vec{\tau}(t)$. По определению: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $d\vec{r}$ по величине можно принять равным dl, ($|d\vec{r}|=dl$). Поэтому

$$d\vec{r} = dl\,\vec{\tau}, \qquad \vec{v} = \frac{dl}{dt}\vec{\tau}, \quad (4.1) \qquad v_\tau = \frac{dl}{dt}. \qquad (4.2)$$

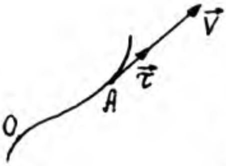


Рис.4.4

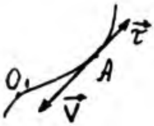


Рис.4.5

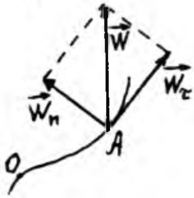


Рис.4.6

5.Вектор ускорения в естественном методе описания движения можно разложить на две составляющие (рис.4.6):

$$\vec{w} = \vec{w}_n + \vec{w}_\tau, \quad (4.3) \qquad \vec{w}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau}, \quad (4.4) \qquad \vec{w}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}. \quad (4.5)$$

Величину ускорения можно найти по формуле:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2}. \qquad (4.6)$$

6.Величины скорости и ускорения связаны формулами:

$w_\tau = \frac{dv}{dt}$, следовательно, $dv = w_\tau dt$, поэтому

$$v_\tau = v_o + \int_0^t w_\tau dt, \qquad (4.7)$$

где v_o - начальная скорость материальной точки при $t=0$, v_τ - скорость в момент t. Зная скорость, можно определить координату:

$$v_\tau = \frac{dl}{dt}, \text{ отсюда } dl = v_\tau dt, \quad l = l_o + \int_0^t v_\tau dt, \qquad (4.8)$$

где l_o - начальная координата точки в момент $t=0$, l - координата точки в момент t.

Если t взять как любой момент времени движения точки, то получим v и l как функции от времени, если t будет конкретный момент времени, то получим значение v и l для этого конкретного значения времени.

7.В декартовой системе координат величина ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2},$$

а так как величина ускорения не зависит от выбора способа описания движения, то можно записать

$$\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \qquad (4.9)$$

Этим соотношением часто пользуются для нахождения нормального ускорения, если неизвестен радиус кривизны траектории, а известны проекции ускорения на координатные оси.

8. При движении точки по окружности иногда пользуются понятием угловой скорости ω и углового ускорения β. Величина линейной скорости связана с угловой скоростью соотношением $v = \omega R$. Величина тангенциального ускорения связана с угловым ускорением β: $w_\tau = \beta R$.

9. В задачах на естественный способ описания движения часто требуется найти пройденный путь S. Отсчитывается путь S вдоль траектории так же, как координата l. Если направление движения по траектории меняется на противоположное, то координата l будет уменьшаться, а пройденный путь все равно увеличиваться. Поэтому $S = \int_{t_1}^{t_2} |v_\tau| dt$. Допустим, что $v_\tau > 0$ в промежутке от t_1 до t_k и $v_\tau < 0$ в промежутке от t_k до t_2. Тогда $S = \int_{t_1}^{t_k} v_\tau dt + \int_{t_k}^{t_2} |-v_\tau| dt$.

10. Рассмотрим подробнее ряд вопросов, показывающих различие между производными от векторов и производными от величин этих векторов.

а) Будет ли производная от величины радиус-вектора равна величине скорости частицы, то есть будет ли $\frac{dr}{dt} = v$?

ОТВЕТ. Если найти производную от величины радиус-вектора, то полученная величина (обозначим ее a) будет характеризовать скорость изменения величины радиус-вектора. Зная a, найти радиус-вектор в какой-то другой момент времени нельзя, так как будет неизвестно, как меняется его направление. Найдем величину радиуса-вектора в момент времени t_2:

$$r(t_2) = r(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a\, dt.$$

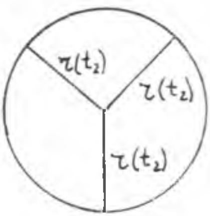


Рис.4.7

Радиус-вектор, величина которого

найдена, может занимать любое положение на окружности радиусом $r(t_2)$ (рис.4.7). Значение же вектора $\vec{r}(t_2)$ должно быть однозначным.

На рис.4.8 изображены значения радиус-векторов в моменты t_1 и t_2 и $\Delta\vec{r}$. Отложим на $\vec{r}_2$ величину $\vec{r}_1$ (*ОД*). Из чертежа видно, что $\Delta\vec{r} = \vec{b} + \vec{c}$, где b = *ДВ* (изменение величины вектора $\vec{r}_1$). Отсюда видно, что величина $\Delta\vec{r}$ не совпадает с изменением величины радиус-вектора. Поэтому производная от величины радиуса-вектора не будет равна величине скорости.

б)Почему при нахождении производных от величины скорости и от вектора скорости получаются разные значения?

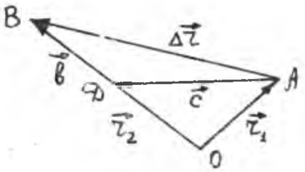


Рис.4.8

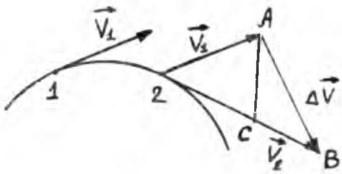


Рис.4.9

ОТВЕТ. Изобразим вектора скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ частицы в двух ее положениях на траектории (рис.4.9) и найдем изменение вектора скорости $\Delta\vec{v}$. Отложим на большем векторе меньший, получится треугольник *ABC*, в нем *AB* равно изменению вектора скорости, а *CB* – изменению величины скорости. Изменение вектора скорости не равно изменению величины скорости. Следовательно, $|d\vec{v}| \neq dv$. Поэтому производные от величины скорости и от вектора скорости в общем случае различны.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА I.Точка движется в плоскости, причем ее декартовы координаты определяются уравнениями $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$, где a, b – постоянные величины, $a > b$. Определить траекторию движения точки и указать, в каких пределах изменяется величина скорости, проекции нормального и тангенциального ускорения и радиус кривизны траектории.

РЕШЕНИЕ.Нормальное и тангенциальное ускорения вычисляются по формулам: $w_\tau = \frac{dv}{dt}$, $w_n = \frac{v^2}{R}$, следовательно, для их вычисления необходимо знать величину скорости. Величину скорости можно вычислить, зная ее проекции на координатные оси. Проекции скорости определяются через производные по времени от соответствующих координат: $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$,

$$v_x = \frac{d(a\cos\omega t)}{dt} = -a\omega\,\sin\omega t\ ,\ v_y = \frac{d(b\sin\omega t)}{dt} = b\omega\,\cos\omega t,$$

$$v = \omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}\ .$$

Определим знак v_τ. Найдем траекторию движения частицы. По условию: $\frac{x}{a}=\cos\omega t$, $\frac{y}{b}=\sin\omega t$, возведем в квадрат и сложим $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Получили уравнение эллипса. При движении частицы по эллипсу направление её движения вдоль кривой изменяться не будет. Поэтому v_τ можно считать >0 на всей траектории, то есть $v_\tau = v$

$$w_\tau = \frac{d}{dt}\left[\omega\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\omega\ (2a^2\omega\sin\omega t\cos\omega t - 2b^2\omega\cos\omega t\sin\omega t)}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}} =$$

$$= \frac{\omega^3(a^2-b^2)\sin\omega t\cos\omega t}{v} = \frac{\omega^3(a^2-b^2)\sin 2\omega t}{2v}\ .$$

Для нахождения нормального ускорения кроме величины скорости надо знать радиус кривизны траектории в зависимости от времени, а так как эта зависимость не дана, то воспользуемся для нахождения w_n рекомендациями из пункта 7. Найдем полное ускорение точки через его проекции на координатные оси:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt},\qquad w_x = \frac{d(-a\omega\ \sin\omega t)}{dt} = -\,a\omega^2\cos\omega t\ ,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt},\qquad w_y = \frac{d(b\omega\ \cos\omega t)}{dt} = -\,b\omega^2\sin\omega t,$$

$$w = \sqrt{a^2\omega^4\cos^2\omega t + b^2\omega^4\sin^2\omega t} = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t},$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}\ ,\qquad w_n = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}} = \frac{ab}{v}\,\omega^3.$$

Зная w_n, найдем радиус кривизны траектории: $R = \frac{v^2}{w_n}$, $R = \frac{v^3}{a b \omega^3}$.

Построим траекторию движения частицы:

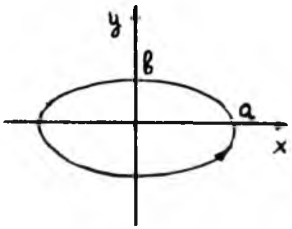


Рис.4.10

при $t = 0$, $x_o = a$, $y_o = 0$;

при $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $x_1 = 0$, $y_1 = b$.

При увеличении t, x уменьшается, y увеличивается, следовательно, частица движется против часовой стрелки.

При $t_o = 0$, $v_o = \omega b$, $w_{\tau o} = 0$, $w_{no} = a\omega^2$, $R_o = \frac{b^2}{a}$.

При $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $\omega t = \frac{\pi}{2}$, $v_1 = \omega a$, $w_{\tau 1} = 0$, $w_{n1} = b\omega^2$, $R_1 = \frac{a^2}{b}$.

При увеличении t скорость увеличивается, достигая максимального значения при $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Радиус кривизны R увеличивается, достигая своего максимального значения тогда же, когда и скорость, w_n уменьшается, w_τ увеличивается, так как увеличивается $2\omega t$, и достигает наибольшего значения при $\sin 2\omega t = 1$, $t = \frac{\pi\omega}{4}$, а затем уменьшается.

ЗАДАЧА 2. Частица движется по криволинейной траектории так, что её скорость меняется по закону $v = a\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)$. Определить путь, пройденный частицей за время $t = 3\mu$. Найти также координату l в момент времени $t = 3\mu$, $a > 0$.

РЕШЕНИЕ. При $t = 0$, $v = a$, при увеличении t скорость уменьшается и при $t = \mu$, $v = 0$, затем скорость изменит свой знак на противоположный и будет увеличиваться по абсолютной величине. По условию задачи ясно, что дана проекция скорости на направление τ. Для нахождения пройденного пути интервал времени разобьем на два: от 0 до μ и от μ до 3μ.

$$S = \int_0^\mu a\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)dt + \int_\mu^{3\mu}\left(-a\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\right)dt = \int_0^\mu a\,dt - \int_0^\mu a\frac{t}{\mu}\,dt - \int_\mu^{3\mu} a\,dt + \int_\mu^{3\mu} a\frac{t}{\mu}\,dt =$$

$$= at\Big|_0^\mu - \frac{at^2}{2\mu}\Big|_0^\mu - at\Big|_\mu^{3\mu} + \frac{at^2}{2\mu}\Big|_\mu^{3\mu} = a\mu - 0 - \frac{a\mu^2}{2\mu} + 0 - 3a\mu + a\mu + \frac{9a\mu^2}{2\mu} - \frac{a\mu^2}{2\mu} = 6{,}5a\mu.$$

Координата $$l = \int_0^{3\mu} a\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)dt = \int_0^{3\mu} a\,dt - \int_0^{3\mu} a\frac{t}{\mu}\,dt = at\Big|_0^{3\mu} - \frac{at^2}{2\mu}\Big|_0^{3\mu}$$

$$l = 3a\mu - \frac{9a\mu^2}{2\mu} = -1{,}5\,a\mu.$$

ЗАДАЧИ

"А"

4.I.Дана траектория. Начертить отрезки прямых, на которых расположены радиусы кривизны в точках $A, B, C, Д$ (рис.4.II).

4.2.На рисунке 4.I2 изображены скорость частицы и её ускорение в некоторой точке. Изобразить на рисунке вектора нормального и тангенциального ускорения.

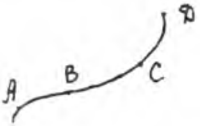


Рис.4.II

Рис.4.I2

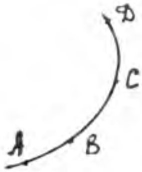


Рис.4.I3

4.3.Точка движется равномерно по плоской траектории, изображенной на рисунке 4.I3. В какой точке траектории ускорение будет максимальным?

4.4.Сначала нашли производную от вектора скорости, а затем от его величины. Что нашли в первом случае и что во втором?

4.5.Может ли нормальное ускорение частицы при движении по криволинейной траектории равняться 0 или быть постоянным?

4.6.Точка движется так, что ее тангенциальное ускорение уменьшается. Что можно сказать о величине скорости точки? Выбрать три момента времени и изобразить примерно для них вектора скорости и ускорения, взяв в качестве траектории: а)окружность; б)любую другую кривую. Изобразить в выбранных точках радиусы кривизны.

4.7.При движении точки тангенциальное ускорение уменьшается до нуля, затем меняет знак на противоположный и начинает возрастать по абсолютной величине. Как меняется скорость частицы при движении точки?

4.8.При каком условии прозводные от величины скорости и от вектора скорости будут равны по величине?

4.9.Чем отличается равномерное движение точки по прямолинейной траектории от равномерного движения точки по окружности?

4.IO.Точка движется равномерно по окружности. Чем будет отличаться вектор скорости от его величины? Как должна двигаться точка, чтобы вектор скорости и его величина оставались постоянными?

4.II.Точка движется по прямолинейной траектории. Можно ли для описания её движения использовать естественный метод описания движения?

4.I2.Как выгоднее всего было бы выбрать декартову систему координат при движении точки по прямолинейной траектории? Что общего и различного будет в описании движения точки при использовании декартовой системы координат (при выборе только одной оси координат) и при выборе естественного метода описания движения?

4.I3.Точка движется в одной плоскости и ее декартовы координаты меняются по закону $x=\alpha t^n$, $y=\beta t^m$. Каково должно быть соотношение между m и n, чтобы траектория была прямолинейной? Параболой? Гиперболой?

4.I4.Известно, как меняется координата l с течением времени. Можно ли определить, по какой траектории движется точка? Что нужно знать, чтобы определить траекторию движения точки?

4.I5.Известно, как меняется со временем величина полного ускорения частицы и начальная скорость. Можно найти зависимость координаты от времени? Можно найти нормальное ускорение? Что для этого необходимо знать?

"Б"

4.I6.При движении точки по окружности радиуса R величина скорости менялась по закону $v = \alpha t$. Найти нормальное, тангенциальное, полное ускорение и угол между полным ускорением и скоростью. Найти зависимость координаты l и пройденного пути от времени и построить примерный график полученной зависимости.

4.I7.Точка движется по траектории, при этом величина ее скорости меняется по закону, изображенному на графике (рис.4.I4). Определить пройденный путь за время t_1=I0с, t_2=20с, t_3=30с. Зависит ли пройденный путь от вида траектории? Можно ли найти положение точки, зная пройденный путь? При каком условии?

4.I8.При движении частицы величина ее тангенциального ускорения менялась в соответствии с графиком, изображенном на рис.4.I5. t_1=5с, t_2=I0с, t_3=I5с, w_1=4м/с^2, w_2=2м/с^2. Определить

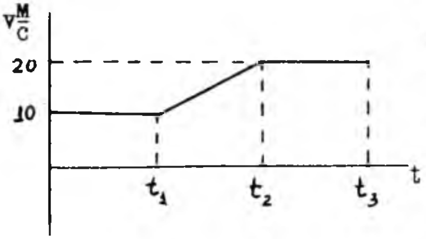


Рис.4.I4

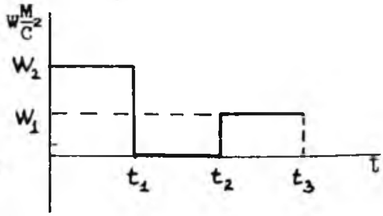


Рис.4.I5

пройденный путь за время t_1, t_2, t_3. Начальную скорость частицы принять равной 0. О какой траектории движения частицы идет речь в задаче? Что изменилось бы в формулировке задачи, если бы речь шла о прямолинейной траектории движения частицы? Можно решить задачу, если на графике задать величину полного ускорения?

4.I9.Частица движется в плоскости xy со скоростью $\vec{v} = a\vec{i} + bx\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ - орты осей x и y, a и b - постоянные. В начальный момент частица находилась в точке x = y = 0. Найти:

а)уравнение траектории частицы;

б)радиус кривизны траектории в зависимости от x.

в)изобразить примерные графики зависимости от времени модулей векторов нормального w_n, тангенциального w_τ и полного ускорений.

4.20.Точка движется по окружности со скоростью $v = at$, где $a = 0{,}50$ м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $n = 0.10$ длины окружности после начала движения.

4.2I.Частица движется по дуге окружности радиуса R по закону $l = a\sin\omega t$, где l - смещение из начального положения, отсчитываемое вдоль дуги, a и ω - постоянные. Найти:

а)полное ускорение частицы в точках $l = 0$, и $\pm a$;

б)минимальное значение полного ускорения w_{min} и смещение l_m, ему соответствующее.

4.22.Точка движется по плоскости так, что ее тангенциальное ускорение $w_\tau = a$, а нормальное ускорение $w_n = bt^4$, где a и b - положительные постоянные, t - время. В момент времени t = 0 точка покоилась. Найти зависимость от пройденного пути S радиуса кривизны R траектории точки и ее полного ускорения.

4.23.Величина тангенциального ускорения при движении точки по криволинейной траектории меняется по закону $w_\tau=a(1-\frac{t}{\tau})$, $v_o=0$. Найти пройденный точкой путь за время $t = 2\tau$. Можно ли найти нормальную составляющую ускорения, полное ускорение? Что для этого надо знать?

4.24. Координаты точки относительно выбранной декартовой системы координат меняются по закону $x=at$, $y=\frac{at^3}{\tau^2}$, где a и τ -положительные постоянные. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки и радиус кривизны траектории в зависимости от времени.

"В"

4.25. Частица A движется в одну сторону по некоторой заданной траектории с тангенциальным ускорением $w_\tau = \vec{a}\vec{\tau}$, где $\vec{a}$ - - постоянный вектор, совпадающий по направлению с осью x, а $\vec{\tau}$ - единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором скорости в данной точке. Найти зависимость от x скорости частицы, если в точке x=0 ее скорость пренебрежимо мала (рис.4.I6).

4.26. Частица движется равномерно со скоростью v по плоской

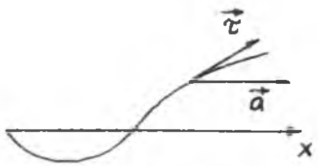


Рис.4.I6

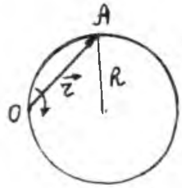


Рис.4.I7

траектории y=y(x). Найти ускорение частицы в точке x=0 и радиус кривизны траектории в этой точке, если траектория:

а) парабола $y=\alpha x^2$; б) эллипс $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2=1$, где α, β - постоянные.

4.27. Частица A движется по окружности радиуса R=50 см так, что её радиус-вектор $\vec{r}$ относительно точки O поворачивается с постоянной угловой скоростью ω=0,40 рад/с (рис.4.I7). Найти модуль скорости частицы, а также модуль и направление её полного ускорения.

4.28. Найти нормальное и тангенциальное ускорения частицы,

а также радиус кривизны траектории, если известно, как изменяются ее декартовы координаты в следующих случаях:
а) $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$; б) $x = a\cos^2\omega t$, $y = a\sin^2\omega t$;
в) $x = a\cos^3\omega t$, $y = a\sin^3\omega t$. Чем будет отличаться движение частицы во всех случаях? Во всех случаях указать направление движения частицы по траектории, записать закон изменения координаты l со временем и найти пройденный путь за время равное π/ω. Координата частицы в начальный момент равна 0.

4.29. Частицы движутся так, что их декартовы координаты меняются. Для первой частицы: $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos\omega t$, $z=bt$. Для второй: $x=a\sin\omega t$, $y=a\cos\omega t$, $z = bt^2$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения частиц, а также радиусы кривизны их траекторий. Начертить примерные траектории движения частиц и указать направления скоростей и ускорений в какой-либо точке траектории. Чем будут отличаться движения частиц?

4.30. Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент времени ее тангенциальное и нормальное ускорения по модулю равны друг другу. В начальный момент $t = 0$, скорость равна v_0. Найти:

а) скорость точки в зависимости от времени и от пройденного пути;

б) полное ускорение точки в функции скорости и пройденного пути.

4.31. Точка движется по дуге окружности радиуса R. Ее скорость зависит от пройденного пути S по закону $v = a\sqrt{S}$, где a - постоянная. Найти угол α между вектором полного ускорения и вектором скорости в зависимости от S.

4.32. Зависимость модуля скорости частицы v от пройденного пути s определяется функцией $v(s)=v_0 - bs$.

а) Найти зависимость s от времени t.

б) Определить зависимость v от t.

в) Написать приближенные выражения для $s(t)$ и $v(t)$, справедливые для $t \ll 1/b$.

4.33. Дана функция $v(s)$, определяющая зависимость модуля скорости частицы от пройденного частицей пути s. Написать выражение для времени t, затрачиваемого частицей на прохождение пути s.

ЗАНЯТИЕ 5

ВРАЩЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

I. Положение абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется углом поворота φ. Угол φ образуется между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения и пересекающими тело: одна из них остается неподвижной относительно выбранной системы отсчета, а другая вращается вместе с телом (рис.5.I), $\varphi=\varphi(t)$.

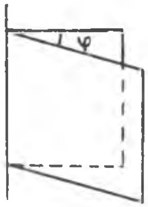


Рис.5.I

2. По определению: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ (5.I) , $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (5.2),

$\vec{\omega}$ – угловая скорость, $\vec{\beta}$ – угловое ускорение.

Вектора $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$ – коаксиальные. Они направлены вдоль оси вращения так, чтобы глядя с конца вектора тело вращалось против часовой стрелки или их направление можно определять по правилу буравчика (рис.5.2). За начало векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ можно принять любую точку оси.

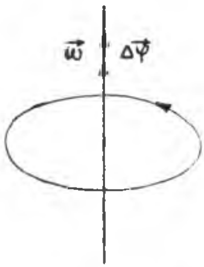


Рис.5.2

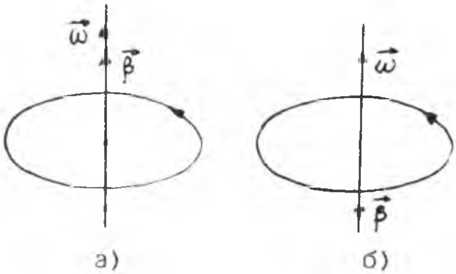


Рис.5.3

Направление $\vec{\beta}$ зависит от направления $d\vec{\omega}$. При увеличении $\vec{\omega}$ $d\vec{\omega}>0$ и направления $\vec{\beta}$ и $\vec{\omega}$ совпадают (рис.5.3а), при уменьшении $\vec{\omega}$ $d\vec{\omega}<0$ и направления $\vec{\beta}$ и $\vec{\omega}$ противоположные (рис.5.3б).

3. Вектора $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$ обладают всеми свойствами полярных

векторов. Их можно складывать как вектора, раскладывать на составляющие, проектировать на координатные оси. Из них можно образовывать скалярное произведение. Они могут входить как составляющие в векторное произведение или получаться из него.

Вектор $d\vec{\varphi}$ (бесконечно малый угол) также обладает всеми свойствами полярных векторов. Угол φ (конечный угол) не является вектором и поэтому не обладает свойствами, присущими векторам.

Рассмотрим пример, из которого видно, что из векторов $d\vec{\varphi}$, $d\vec{r}$ и $\vec{r}$ можно образовать векторное произведение. Если же угол $d\varphi$ заменить углом φ, то векторное произведение получить нельзя.

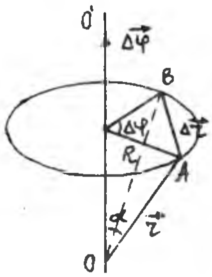


Рис.5.4

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси 00' (рис.5.4). Возьмем в теле произвольную точку A и найдем изменение ее радиус- вектора $\Delta\vec{r}$ за время Δt. За это время тело повернется на угол $\Delta\varphi$. Обозначим через R радиус окружности, по которой движется точка A. Из чертежа видно, что величина $\Delta r=2R\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$, а $R=r\sin\alpha$, где α угол между осью вращения и радиус-вектором $\vec{r}$. Поэтому $\Delta r= 2r\sin\alpha(\sin\frac{\Delta\varphi}{2})$. Если угол $\Delta\varphi$ так мал, что можно считать $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta\varphi}{2}$, то тогда $\Delta r = r\sin\alpha(\Delta\varphi)$ и, учитывая направления векторов $\Delta\vec{r}$, $\vec{r}$ и принятое направление для $\Delta\vec{\varphi}$, можно записать векторное произведение $\Delta\vec{r}= [\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}]$. Но если условие $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\Delta\varphi}{2}$ не выполнимо, то $\Delta\varphi$ не вектор.

4. Переход от векторных величин к скалярным связан с выбором системы координат. При решении задач будем пользоваться декартовой системой координат. Оси координат направляют так, чтобы одна из осей координат совмещалась с осью вращения, например, с осью z (рис.5.4). В этом случае в проекциях на ось z будем иметь:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} \quad (5.3), \qquad \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (5.4)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z dt \quad (5.5), \qquad \omega_z = \omega_{0z} + \int_0^t \beta_z dt \quad (5.6)$$

5. Зная полный угол поворота φ, можно найти число оборотов тела вокруг оси: $n = \frac{\varphi}{2\pi}$ (5.7).

6. Зная угловые вектора и радиус-вектор частицы $\vec r$, можно найти линейную скорость $\vec v$ и линейное ускорение $\vec w$ частицы по формулам:

$$\vec v = [\vec\omega \times \vec r] \quad (5.8), \qquad \vec w = [\vec\beta \times \vec r] + [\vec\omega\,[\vec\omega \times \vec r]] \quad (5.9)$$

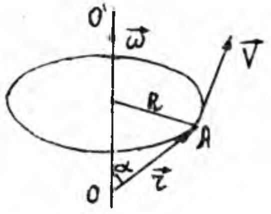


Рис.5.5

В соответствии с определением векторного произведения: $v = \omega\, r \sin\alpha$, где $r \sin\alpha = R$ (рис.5.5). R - радиус окружности, по которой движется точка при вращении тела, $v = \omega R$ (5.10). Направлен вектор скорости $\vec v \perp \vec\omega$ и $\perp \vec r$, то есть перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec\omega$ и $\vec r$, а это значит по касательной к окружности, по которой движется точка при вращении тела.

Ускорение частицы можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие:

$$w_\tau = \beta R \quad (5.11), \qquad w_n = \omega^2 R \quad (5.12).$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА. Твердое тело начало вращаться вокруг неподвижной оси OO' по закону $\omega = at + \frac{at^2}{\tau}$, где a, τ - некоторые положительные постоянные. Найти зависимость от времени:

а) угла поворота и углового ускорения тела;

б) линейной скорости и ускорения точки, находящейся на расстоянии R от оси вращения;

в) вычислить число оборотов тела, а также значения угловой скорости и углового ускорения в момент времени $t=\tau$;

г) построить график зависимости $\beta(t)$, $\omega(t)$.

РЕШЕНИЕ. а) В соответствии с формулой (5.5)

$$\varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^t \left(at + \frac{at^2}{\tau}\right) dt\ , \qquad \varphi = \int\limits_0^t at\ dt + \int\limits_0^t \frac{at^2}{\tau}\, dt\ ,$$

$\varphi_0 = 0$ по условию задачи, следовательно,

$$\varphi = \frac{at^2}{2} + \frac{at^3}{3\tau} = at^2\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{3\tau}\right) .$$

В соответствии с формулой (5.4)

$$\beta=\frac{d\left(at+\frac{at^2}{\tau}\right)}{dt},\quad \beta = a + 2\,\frac{at}{\tau} = a\left(1+2\,\frac{t}{\tau}\right).$$

б) $$v=\omega R\ ,\quad v = atR\left(1+\frac{t}{\tau}\right),$$

$$w_\tau=\beta R,\qquad w_\tau=aR\left(1+2\,\frac{t}{\tau}\right),$$

$$w_n=\omega^2 R,\qquad w_n=a^2t^2R\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^2,$$

$$w=\sqrt{w_n^2+w_\tau^2}\ ,\qquad w=\sqrt{a^4t^4R^2\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^4+a^2R^2\left(1+2\,\frac{t}{\tau}\right)^2}=$$

$$=aR\sqrt{a^2t^4\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^4+\left(1+2\frac{t}{\tau}\right)^2}$$

в)При $t=\tau$, $\varphi(\tau)=a\tau^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=a\,\frac{5}{6}\tau^2$; $n=\frac{5a\tau^2}{6\cdot 2\pi}=\frac{5}{12}\,\frac{a\tau^2}{\pi}$;

$$\omega(\tau)=a\tau+\frac{a\tau^2}{\tau}=2a\tau;\qquad \beta(\tau)=a\left(1+2\frac{\tau}{\tau}\right)=3a;$$

$$v(\tau)=aR\tau\left(1+\frac{\tau}{\tau}\right)=2aR\tau\ ;$$

$$w(\tau)=aR\sqrt{a^2\tau^4\left(1+\frac{\tau}{\tau}\right)^4+\left(1+2\frac{\tau}{\tau}\right)^2}=aR\sqrt{16a^2\tau^4+9}\ .$$

г)Построим графики зависимостей $\omega(t)$ и $\beta(t)$:

Рис.5.5

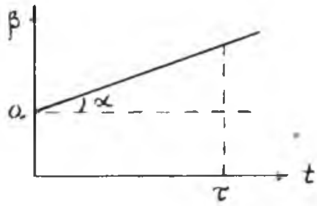


Рис.5.6

при $t=0$, $\omega=0$, зависимость $\omega(t)$ – парабола (рис.5.5),
при $t=0$, $\beta=a$, зависимость $\beta(t)$ – прямая, $tg\alpha=\frac{2a}{\tau}$ (рис.5.6).

ЗАДАЧИ

" А "

5.1.Сравнить формулы занятия 2 и занятия 5. Чем различаются эти формулы и что в них общего?

5.2.Записать,как будет изменяться угол поворота абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси при равномерном его вращении, при равноускоренном. Записать изменение координаты при равномерном движении тела и при равноускоренном и полученные формулы сравнить.

5.3.Вектор скорости можно разложить на три составляющие по осям: v_x, v_y, v_z. По формулам (занятия 2) рассчитать проекции радиуса-вектора точки на координатные оси в момент времени t и найти положение точки. Вектор угловой скорости также можно разложить на три составляющие по осям, записать три уравнения, аналогичные уравнениям для v_x, v_y, v_z и найти φ_x, φ_y, φ_z. Можно ли найти по этим величинам угол поворота абсолютно твердого тела около неподвижной оси?

5.4.Как относятся величины скоростей и ускорений точек абсолютно твердого тела, отстоящих на расстоянии r_1 и r_2 от оси вращения при его вращении относительно неподвижной оси?

5.5.Указать геометрическое место точек, имеющих: а)одинаковые вектора скоростей; б)одинаковые величины скоростей, при вращении относительно неподвижных осей тел, указанных на рисунке 5.7.

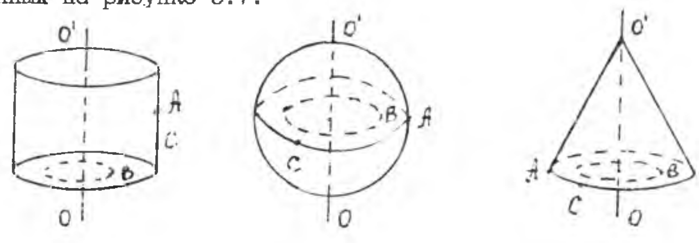


Рис.5.7

5.6.Указать геометрическое место точек, имеющих: а)одинаковые вектора ускорений; б)одинаковые величины ускорений, при вращении относительно неподвижных осей тел, указанных на рисунке 5.7.

5.7. Цилиндр с радиусом основания R вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через геометрическую ось симметрии цилиндра. Как меняются вектора скорости точек цилиндра, лежащие в одной плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и на одном радиусе? Доказать, что концы векторов точек цилиндра, расположенных на одном диаметре, лежат на одной прямой.

5.8. Доказать, что ускорения точек, расположенных на одном диаметре цилиндра, при его вращении вокруг оси, проходящей через ось симметрии, параллельны и что концы векторов лежат на одной прямой.

5.9. Зная скорость точки *A*, найти скорость точек *B*, *C* при вращении тел, изображенных на рис.5.7, относительно осей *OO'*.

5.10. Зная ускорение точки *A*, найти ускорение точек *B*, *C* при вращении тел, изображенных на рис.5.7, относительно осей *OO'*.

"Б"

5.11. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi=at^2$, где $a=0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение w точки *A* на ободе колеса в момент $t_1=2{,}5$ с, если скорость точки *A* в этот момент $v=0{,}65$ м/с.

5.12. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=at-bt^3$, где $a=6{,}0$ рад/с, $b=2{,}0$ рад/с^3. Найти:

а) среднее значение угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t=0$ до остановки;

б) угловое ускорение в момент остановки тела.

5.13. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta=\alpha t$, где $\alpha=2{,}0\cdot10^{-2}$рад/с^3. Через какой промежуток времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi=60^\circ$ с ее вектором скорости?

5.14. Линейная скорость v_1 точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на $\Delta R=10$ см ближе к оси, имеют линейную скорость $v_2=2$ м/с. Определить частоту вращения n диска.

5.15. Диск радиусом $r=10$см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\beta=0{,}5$рад/с^2. Найти тангенциальное w_τ, нормальное w_n и полное w ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

5.16. Диск радиусом r=20 см вращается согласно уравнению $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$, где A=3рад, B=-1рад/с^2, C=0,11рад/с^3. Определить тангенциальное w_τ, нормальное w_n и полное w ускорения точек на окружности диска для момента времени t_1=10с.

5.17. Маховик начал вращаться равноускоренно и за промежуток времени Δt=10 с достиг частоты вращения n=300мин$^{-1}$. Определить угловое ускорение β маховика и число N оборотов, которое он сделал за это время.

5.18. Велосипедное колесо вращалось с частотой n=5 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt=1 мин. Определить угловое ускорение β и число N оборотов, которое сделает колесо за это время. Движение считать равнопеременным.

5.19. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав N=50 полных оборотов, оно изменило частоту вращения от n_1=4с$^{-1}$ до n_2=6с$^{-1}$. Определить угловое ускорение β колеса.

5.20. Диск вращается с угловым ускорением β=-2рад/с^2. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от n_1=240 мин$^{-1}$ до n_2=90 мин$^{-1}$? Найти время Δt, в течение которого это произойдет.

5.21. Барабан начинает вращаться с постоянным угловым ускорением β вокруг своей оси. По какому закону меняется с течением времени угол φ между векторами скорости и полного ускорения произвольной точки барабана?

5.22. Через блок радиуса R переброшена нить, на концах которой находятся два груза, установленные на одном уровне (рис.5.8). Предоставленные самим себе грузы приходят в равноускоренное движение и спустя время τ один из них оказывается над другим на высоте H. Определить угол поворота блока, его угловую скорость и величину полного линейного ускорения точки A в конце времени τ. Проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

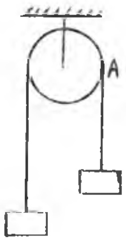


рис.5.8

5.23. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}=at\vec{i}+bt^2\vec{j}$, где $a=0{,}50$ рад/с^2, $b=0{,}060$ рад/с^3, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей x и y. Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент $t=10{,}0$ с.

"В"

5.24. Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta\sim\sqrt{\omega}$, где ω – его угловая скорость. Найти среднюю угловую скорость тела за время, в течение которого оно будет вращаться, если в начальный момент его угловая скорость была равна ω_0.

5.25. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega=\omega_0-a\varphi$, где ω_0 и a – положительные постоянные. В момент времени $t=0$ угол $\varphi=0$. Найти зависимости от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости.

5.26. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\vec{\beta}=\vec{\beta}_0\cos\varphi$, где $\vec{\beta}_0$ – постоянный вектор, φ – угол поворота из начального положения. Найти угловую скорость тела в зависимости от угла φ. Изобразить график этой зависимости.

5.27. В некоторый момент времени вращение одного диска описывается уравнением $\varphi_1= 2\alpha t + at^2$, второго $\varphi_2= \alpha t - at^2$, где α и a – положительные постоянные. На сколько оборотов первый диск будет опережать второй к тому моменту, когда второй диск остановится?

5.28. На рисунке 5.9 дан график изменения угловой скорости вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. Найти угол поворота тела как функцию времени. Построить график зависимости углового ускорения от времени.

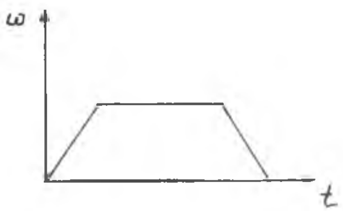


рис.5.9

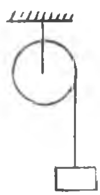


рис.5.10

5.29. На цилиндр, который укреплен так, что может вращаться вокруг оси OO′, намотана нить, к которой подвешено тело (рис.5.10). Цилиндр привели во вращательное движение с угловой скоростью $\omega=at+bt^2$. Определить, с каким ускорением опускается груз и на какую высоту он опустится за время τ. Нить раскручивается без скольжения (та часть нити, которая намотана на цилиндр, относительно него не перемещается). Радиус цилиндра R.

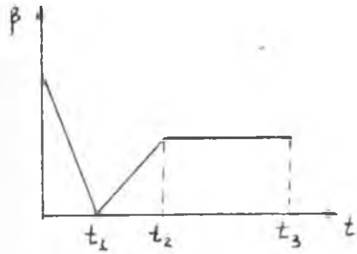


рис.5.11

5.30. На чертеже (рис.5.11) дан график зависимости углового ускорения от времени. Определить угол поворота тела за время t_1, t_2, t_3 и значения угловой скорости в те же моменты. Построить график зависимости угловой скорости от времени.

ЗАНЯТИЕ 6

СВЯЗЬ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ КООРДИНАТ

Очень часто решение задач облегчается, если их решать не в той системе отсчета, относительно которой требуется дать ответ задачи или в которой даны в задачах кинематические величины, а в другой системе отсчета.

Связь между кинематическими величинами, вычисленными относительно одной системы координат, с кинематическими величинами, вычисленными относительно другой системы координат, зависит от движения систем координат относительно друг друга.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДВИЖУТСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГ ДРУГА ПОСТУПАТЕЛЬНО СО СКОРОСТЬЮ v_o

1. Направление осей координат в этом случае удобно выбрать так, чтобы одноименные оси были параллельны, а скорость v_o была направлена вдоль одной из осей, например x (рис.6.1).

2. Для перехода от системы отсчета K к системе K′ надо

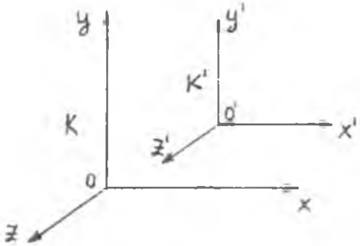


Рис.6.I

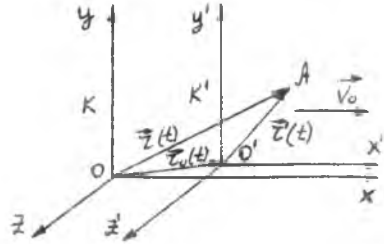


Рис.6.2

знать правила, связывающие радиус-вектор, скорость и ускорение, вычисленные относительно одной системы отсчета, с такими же величинами, вычисленными относительно другой системы отсчета (рис.6.2).

$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_o(t)$ (6.I); $x = x' + x_o$, $y = y'$, $z = z'$ (6.2);

$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_o(t)$ (6.3); $v_x = v'_x + v_o$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$ (6.4);

$\vec{w}(t) = \vec{w}'(t) + \vec{w}_o(t)$ (6.5); $w_x = w'_x + w_o$, $w_y = w'_y$, $w_z = w'_z$ (6.6),

$\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение частицы *A* относительно системы К.

$\vec{r}_o(t)$, $\vec{v}_o(t)$, $\vec{w}_o(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение начала отсчета системы К′, точки О′.

$\vec{r}'(t)$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{w}'(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение частицы *A* относительно системы К′

СИСТЕМА К′ ВРАЩАЕТСЯ ВОКРУГ ОСИ, НЕПОДВИЖНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ К

3.В этих случаях удобно так выбрать декартовы системы координат К и К′, чтобы начала отсчета (точки О и О′) совпадали, а одну из осей систем К и К′ направить вдоль оси вращения (например ось z)(рис.6.3).

4.Связь между кинематическими величинами, вычисленными для точки *A* относительно систем К и К′ в этом случае (рис.6.4):

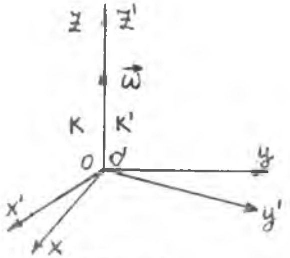


Рис.6.3

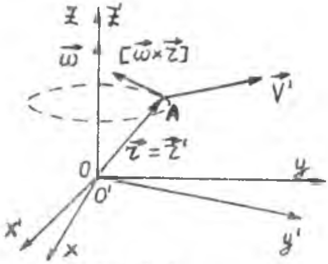


Рис.6.4

$$r(\vec{t}) = \vec{r}'(t) \,, \tag{6.7}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + [\vec{\omega} \times \vec{r}'], \tag{6.8}$$

$$\vec{w}(t) = \vec{w}'(t) + [\vec{\beta} \times \vec{r}'] + [\vec{\omega}\, [\vec{\omega} \times \vec{r}']] + 2\,[\vec{\omega} \times \vec{v}'] \tag{6.9}$$

$\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение частицы *A* относительно системы К.

$\vec{r}'(t)$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{w}'(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение частицы *A* относительно системы К′.

$\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$ – угловая скорость и угловое ускорение системы К′ относительно системы К.

5.Направления векторов, образованных из векторных произведений, и их величины находятся в соответствии с определением векторного произведения.

6.Для определения направления и величины вектора $[\vec{\omega}[\vec{\omega}\times\vec{r}']]$, его нужно разложить по правилу разложения двойного векторного произведения (см. матем. приложение).

СИСТЕМА К′ ВРАЩАЕТСЯ ВОКРУГ ОСИ, КОТОРАЯ ПЕРЕМЕЩАЕТСЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ К

7.Для связи кинематических величин, вычисленных относительно систем К и К′ введем дополнительную систему К″ (рис.6.5), жестко связанную с осью вращения К′ системы и перемещающуюся поступательно относительно системы К. Тогда связь между кинематическими величинами, вычисленными относительно систем К′ и К″, осуществляется по формулам (6.7), (6.8), (6.9). Только вместо $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{w}(t)$ нужно записать $\vec{r}''(t)$, $\vec{v}''(t)$, $\vec{w}''(t)$. Связь между кинематическими величинами, вычисленными

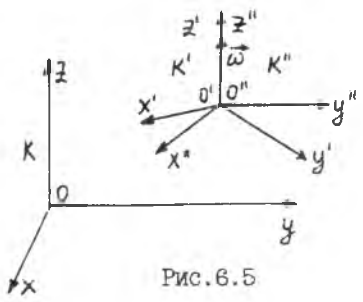


Рис.6.5

относительно систем K и K″ запишется по формулам (6.I), (6.3), (6.5). Но теперь вместо $\vec{r}'(t)$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{w}'(t)$ нужно записать выражения для $\vec{r}''(t)$, $\vec{v}''(t)$, $\vec{w}''(t)$. В результате получим связь между кинематическими величинами, измеренными в системах отсчета K и K′:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o(t) + \vec{r}'(t) \ ,$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o(t) + \vec{v}'(t) + [\vec{\omega} \times \vec{r}'] ,$$

$$\vec{w}(t) = \vec{w}_o(t) + \vec{w}'(t) + [\vec{\beta} \times \vec{r}'] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega} \times \vec{r}']] + 2\,[\vec{\omega} \times \vec{v}'] \ ,$$

где $\vec{r}_o(t)$, $\vec{v}_o(t)$, $\vec{w}_o(t)$ – радиус-вектор, скорость и ускорение начала отсчета системы K′, лежащие на оси вращения.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА. Горизонтально расположенный стержень AB вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. Вертикальная ось закреплена на палубе корабля, плывущего со скоростью $\vec{v}_o$. По стержню движется небольшая муфта. Ее скорость относительно стержня меняется по закону $\vec{v}' = a\vec{r}$, где a – постоянная, $\vec{r}$ – радиус-вектор, характеризующий расстояние муфты от оси вращения. Найти:

а) скорость и ускорение муфты относительно палубы корабля в зависимости от r;

б) скорость и ускорение муфты относительно земли в зависимости от r и от времени;

в) угол между векторами скорости и ускорения относительно палубы корабля в процессе движения.

РЕШЕНИЕ. а) Пусть K′ – система отсчета, связанная со стержнем, K″ – система отсчета, связанная с кораблем. Тогда в соответствии с формулой (6.8):

$$\vec{v}'' = \vec{v}' + [\vec{\omega} \times \vec{r}] = a\vec{r} + [\vec{\omega} \times \vec{r}] \ .$$

Векторное произведение $[\vec{\omega}\times\vec{r}] \perp \vec{r}$, следовательно $a\vec{r} \perp [\vec{\omega}\times\vec{r}]$ (рис.6.6). Кроме того $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ и поэтому $|[\vec{\omega} \times \vec{r}]| = \omega r$.

Тогда величина скорости:

$$v'' = \sqrt{a^2 r^2 + \omega^2 r^2} = r\sqrt{a^2 + \omega^2}\ .$$

Ускорение найдем в соответствии с формулой (6.9):

$$\vec{w}'' = \vec{w}' + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'\,],$$

так как

$$\vec{\beta} = 0, \qquad \vec{w}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d(a\vec{r})}{dt} = a\,\frac{d\vec{r}}{dt} = a\vec{v}' = a^2\vec{r},$$

$$[\vec{\omega}\,[\vec{\omega} \times \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\,\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}\,\vec{\omega}) = -\,\omega^2\vec{r},\ \ (\,\vec{\omega} \perp \vec{r}).$$

Следовательно,

$$\vec{w}'' = (a^2 - \omega^2)\vec{r} + 2a[\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$w'' = \sqrt{(a^2-\omega^2)^2 r^2 + 4a^2\omega^2 r^2} = r\sqrt{a^4 - 2a^2\omega^2 + \omega^4 + 4a^2\omega^2} = r(a^2 + \omega^2).$$

б)Рассмотрим движение муфты относительно земли (система К). Согласно формулам (6.3) и (6.5)

$$\vec{v} = \vec{v}'' + \vec{v}_0 = \vec{v}_0 + a\vec{r} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]\ .$$

Если принять, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ вектора $\vec{v}_0$ и $\vec{r}$ совпадали по направлению, то угол между ними со временем меняется по закону $\beta = \omega t + \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{v}''$ и $\vec{v}'$, $tg\varphi = \frac{\omega}{a}$ (рис.6.7). Тогда величина скорости:

$$v = \sqrt{v_0^2 + a^2 r^2 + \omega^2 r^2 + 2v_0\sqrt{a^2 r^2 + \omega^2 r^2}\,\cos\beta}$$

$\vec{w} = \vec{w}'' + \vec{w}_0$, так как по условию задачи $\vec{w}_0 = 0$, то $\vec{w} = \vec{w}''$

$$\vec{w} = (a^2 - \omega^2)\vec{r} + 2a[\vec{\omega}\vec{r}]\ ,\ w = r(a^2 + \omega^2)\ .$$

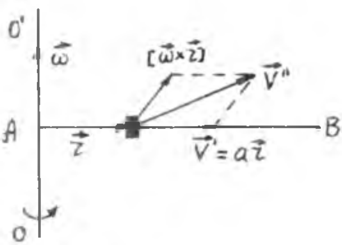


Рис.6.6

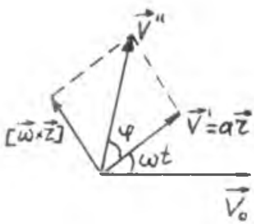


Рис.6.7

в)Для определения угла между векторами $\vec{v}''$ и $\vec{w}''$ воспользуемся их скалярным произведением $(\vec{v}''\vec{w}'') = v''w''\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}''\vec{w}'')}{v''w''} = \frac{(a\vec{r} + [\vec{\omega}\times\vec{r}])((a^2-\omega^2)\vec{r} + 2a[\vec{\omega}\times\vec{r}])}{\left(r\sqrt{a^2+\omega^2}\right)\left(r(a^2+\omega^2)\right)} =$$

$$= \frac{a^3(\vec{r}\vec{r}) - a\omega^2(\vec{r}\vec{r}) + 2a^2(\vec{r}[\vec{\omega}\vec{r}]) + a^2(\vec{r}[\vec{\omega}\vec{r}]) - \omega^2(\vec{r}[\vec{\omega}\vec{r}]) + 2a([\vec{\omega}\vec{r}][\vec{\omega}\vec{r}])}{\left(r\sqrt{a^2+\omega^2}\right)\left(r(a^2+\omega^2)\right)},$$

так как: $(\vec{r}[\vec{\omega}\times\vec{r}]) = -\omega[\vec{r}\times\vec{r}] = 0$, $([\vec{\omega}\times\vec{r}][\vec{\omega}\times\vec{r}]) = \omega^2r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2 = \omega^2r^2$, (скалярное произведение $(\vec{\omega}\vec{r})^2$ равно 0), то

$$\cos\alpha = \frac{a^3r^2 - a\omega^2r^2 + 2a\omega^2r^2}{\left(r\sqrt{a^2+\omega^2}\right)\left(r(a^2+\omega^2)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/a)^2}}.$$

Отсюда видно, что в данном случае угол α остается постоянным при движении.

ЗАДАЧИ

"А"

6.1.Записать в векторном виде и в проекциях на координатные оси связь между кинематическими величинами, вычисленными относительно двух систем отсчета, движущихся поступательно, если соответствующие оси координат параллельны, а скорость системы К′ направлена: а)вдоль оси z; б)вдоль оси y; в)лежит в плоскости xy под углом α к оси x; г)направлена произвольно.

6.2.Две машины движутся относительно земли со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, изображенными на рис.6.8. Определить, пользуясь чертежом: а)скорость первой машины относительно второй; б)второй машины относительно первой; в)кратчайшее расстояние между машинами.

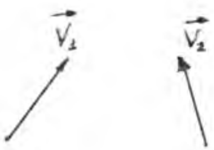


Рис.6.8

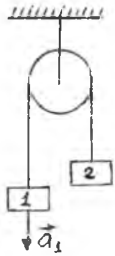


Рис.6.9

6.3.Блок подвешен к потолку лифта, движущемуся с ускорением $\vec{a}_0$ относительно земли. На блоке подвешена нить с двумя грузами (рис.6.9). Относительно блока ускорение первого груза $\vec{a}_1'$. Определить ускорение первого и второго груза относительно земли, если: а)лифт поднимается вертикально вверх; б)опускается вертикально вниз (длина нити постоянна).

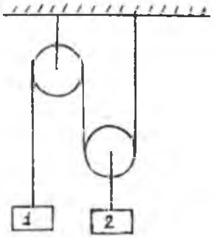


Рис.6.10

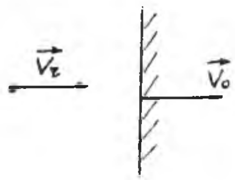


Рис.6.11

6.4.На блоках, изображенных на рис.6.10 подвешены два груза. Скорость первого груза равна v_1. Чему равна скорость второго груза?

6.5.Определить, пользуясь чертежом, скорость частицы после удара сначала о неподвижную стенку, а затем о движущуюся стенку: а)влево; б)вправо. Скорость частицы до удара и скорость стенки для случая (б) указаны на рис.6.11.

6.6.Клин перемещается со скоростью v_0 относительно земли, а кубик, лежащий на клине, со скоростью v' относительно клина (рис.6.12). Найти скорость кубика относительно земли, пользуясь чертежом.

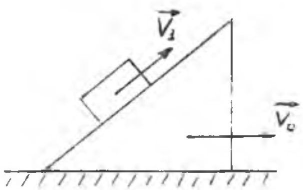


Рис.6.12

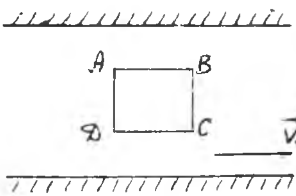


Рис.6.13

6.7.С угла A квадратного плота спрыгнул в воду и поплыл вокруг плота пес (рис.6.13). Нарисуйте траекторию его движения относительно воды и относительно берега, если он плывет вдоль сторон плота. Его скорость относительно воды v', скорость течения v_o, $v'>v_o$.

6.8.Точки *А* и *Б* движутся по вращающейся относительно неподвижной оси *ОО'* платформе и в момент t имеют скорости относительно платформы, указанные на рис.6.14 . Указать направление

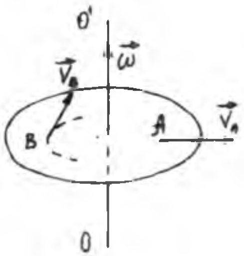


Рис.6.14

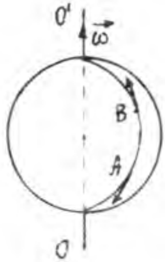


Рис.6.15

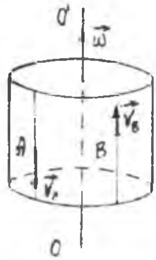


Рис.6.16

ускорений и скоростей этих точек относительно системы К в тот же момент времени.

6.9.Шар радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси *ОО'*, неподвижной относительно системы К. На шаре находятся две точки, которые двигаются относительно него со скоростями $\vec{v}\,'_1$ и $\vec{v}\,'_2$. Указать направления ускорений и скоростей этих точек в момент t относительно неподвижной системы К, если направления скоростей v'_1 и v'_2 в момент t указаны на рис.6.15.

6.10.По цилиндру, вращающемуся с угловой скоростью ω относительно неподвижной в системе отсчета К оси, движутся точки *А*,*Б*. Их скорости относительно цилиндра в момент t указаны на рис.6.16. Указать направления скоростей и ускорений этих точек относительно системы К в этот же момент времени.

"Б"

6.11.Круглая горизонтальная платформа радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω. По краю платформы идет человек в направлении, противоположном ее вращению. Угловая скорость человека относительно платформы постоянна и равна ω_o.

Определить ускорение человека относительно земли.

6.12. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$ мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6{,}0$ км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал одинаково.

6.13. Корабль движется по экватору на восток со скоростью $v_o = 30$ км/ч. С юго-востока под углом $\varphi = 60^o$ к экватору дует ветер со скоростью $v = 15$ км/ч. Найти скорость v' ветра относительно корабля и угол φ' между экватором и направлением ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

6.14. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_o = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через $t = 1{,}70$ с.

6.15. На тележке, равномерно движущейся по горизонтальной плоскости, установлена труба. Как должна быть ориентирована на тележке эта труба, чтобы капли дождя, падающие вертикально, пролетали через нее, не задевая внутренних стенок? Движение капель считать равномерным.

6.16. Два самолета одновременно вылетают из одного места по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Один летит со скоростью $v_1 = 300$ км/ч, другой - $v_2 = 400$ км/ч. Как возрастает со временем расстояние между самолетами? Как велико это расстояние l в момент, когда первый самолет пролетел путь $S = 900$ км?

6.17. Два корабля движутся параллельно друг другу в противоположные стороны со скоростями v_1 и v_2. С одного из них стреляют в другой. Под каким углом φ к курсу обстреливаемого корабля надо направить орудие, чтобы попасть в цель, если выстрел производится в момент, когда оба судна находятся на прямой, перпендикулярной к направлению их движения? Скорость снаряда v_o считать постоянной.

6.18. Эскалатор метро поднимает стоящего человека за 3 минуты. По неподвижному эскалатору человек поднимается за 6 минут. За какое время поднимается он по движущемуся эскалатору, если будет двигаться по нему с той же относительной скоростью, что и по неподвижному.

6.19. Точки A и B (рис.6.17) движутся по диску со скоростью

30 см/с относительно диска. Диск вращается с угловой скоростью 4 $с^{-1}$. В момент времени t расстояние точек от оси равно 10 см. Найти скорость и ускорение точек относительно земли.

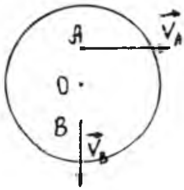


рис.6.17

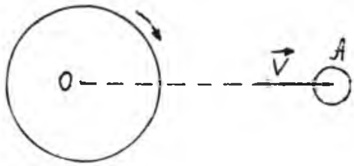


рис.6.18

6.20.Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси со скоростью ω = 3$с^{-1}$ (рис.6.18). Шар катится в направлении *AO* со скоростью 7м/с относительно земли. Определить скорость и ускорение шара относительно платформы в тот момент времени, когда расстояние *AO* равно 8 м.

"В"

6.21.Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка равно 2,7 м, начала подниматься с постоянным ускорением 1,2м/$с^2$. Через 2,0 с после начала подьема с потолка кабины стал падать болт. Найти:

а)время свободного падения болта,

б)перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

6.22.Человек идет по эскалатору. В первый раз он насчитал n_1 = 50 ступенек, во второй раз, двигаясь в ту же сторону со скоростью втрое большей, n_2 = 75. Сколько ступенек насчитает человек на неподвижном эскалаторе?

6.23.Два пловца должны попасть из точки *A* на одном берегу реки прямо в противоположную точку *B* на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой *AB*, другой же - все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки *B* за одинаковое время, если скорость течения v_0 = 2,0 км/час и скорость каждого пловца относительно воды v' = 2,5 км/ч.

6.24. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды, перпендикулярной к берегам скоростью $v=0{,}300$ м/с. Ширина реки равна $h = 63{,}0$ м. Скорость течения меняется по параболическому закону $u=u_o - 4\ \dfrac{u_o}{h^2}\left(x-\dfrac{h}{2}\right)^2$, где x – расстояние от берега, u_o – константа, равная 5,00 м/с. Найти снос S лодки вниз по течению от пункта ее отправления до места причала на противоположном берегу реки.

6.25. Вагон A движется по закруглению радиусом OA=0,5км, а вагон B прямолинейно (рис.6.19). Скорость каждого вагона равна 60 км/ч. Найти скорость и ускорение вагона B относительно вагона A в тот момент времени, когда вагоны находятся в точках: а)А и В ; б)С и Д. Расстояние AB равно 0,2 км, ВС = 0,1 км.

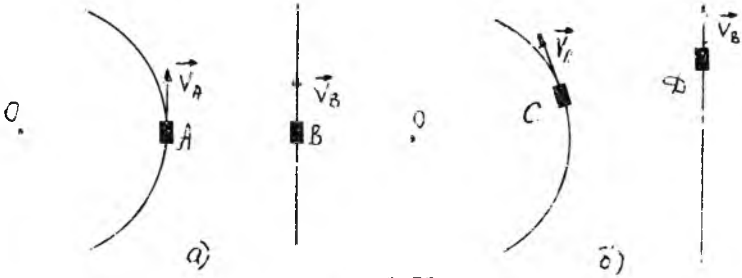


рис.6.19

6.26. Частица движется по радиусу вращающегося диска со скоростью $v=3{,}0$ м/с. В начальный момент времени частица находится в центре диска. Угловая скорость вращения диска $\omega=20{,}0$ рад/с. Найти приближенное значение пути S, пройденного частицей в неподвижной системе отсчета за время с момента $t_1=9.0$с до момента $t_2=10{,}0$с.

ЗАНЯТИЕ 7

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. При плоском движении все точки абсолютно твердого тела движутся в выбранной системе отсчета в плоскости, параллельной одной неподвижной плоскости, и перейти из этой плоскости в другую они не могут. Поэтому изучение движения абсолютно твердого

9–2805

тела можно заменить изучением движения плоской фигуры, образованной сечением тела такой плоскостью в этой плоскости (рис.7.I).

2.Плоское движение можно разложить на два: поступательное и вращательное. В соответствии с этим, рассматривая плоское движение тела, вводят две системы: одну неподвижную K(x,y,z), а

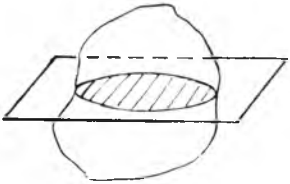


Рис .7.I

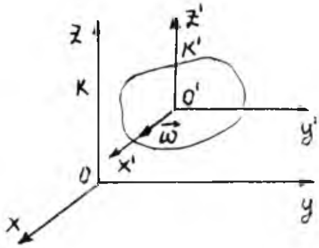


Рис.7.2

другую подвижную K′(x′,y′,z′)- связанную с телом и перемещающуюся относительно неподвижной системы координат поступательно. Относительно системы K′ тело совершает только вращательное движение вокруг оси, неподвижной относительно этой системы отсчета (рис.7.2).

3.Ось вращения будет перпендикулярна к плоскости, в которой движется фигура, образованная сечением этой плоскости. При выборе направления осей координат удобно одну из осей направить вдоль оси вращения, например ось 0′X′ (рис.7.2).

4.За ось вращения можно принять в принципе любую прямую, перпендикулярную к плоскости движения плоской фигуры. При этом скорость поступательного движения зависит от выбора оси вращения, а скорость вращательного движения не зависит от

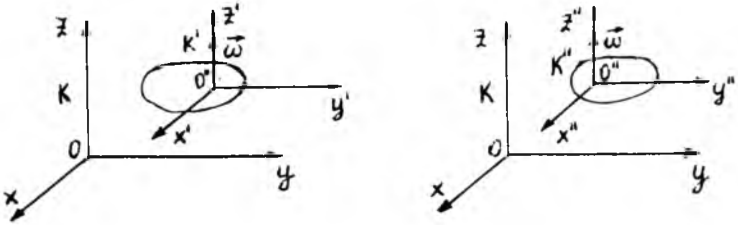


Рис.7.3

выбора оси вращения. Например, на рис.7.3 $O'Z'$ и $O''Z''$ - оси вращения. С точкой O' свяжем начало отсчета системы K', а с точкой O'' начало отсчета системы K''. Скорость точек O' и O'' относительно системы K разная, а ω, скорость вращения относительно осей $O'Z'$ и $O''Z''$, одинаковая.

5.Скорость и ускорение любой точки плоской фигуры, с учетом, что $\vec{v}' = 0$, будут в соответствии с формулами (6.3) и (6.5), (6.7) и (6.8) занятия 6:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + [\vec{\omega} \times \vec{r}] \qquad (7.1)$$

$$\vec{w} = \vec{w}_o + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{w}\,[\vec{w} \times \vec{r}]], \qquad (7.2)$$

где величины имеют те же значения, что и в указанных формулах.

6.Так как скорость v_o зависит от выбора оси вращения, то ось можно выбрать так, чтобы v_o равнялась 0 в данный момент времени. Такая ось вращения называется мгновенной осью вращения. При этом ускорения точек, образующих мгновенную ось вращения, не будут равны 0. Мгновенная ось вращения изменяет свое положение в пространстве.

7.Относительно мгновенной оси вращения все точки в данный момент движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а это значит, что скорости всех точек перпендикулярны к радиусам этих окружностей. Поэтому мгновенную ось иногда называют центром скоростей. На рис.7.4 ось O, перпендикулярная плоскости чертежа, мгновенная ось вращения, также показаны скорости нескольких точек и радиусы окружностей, на которых точки лежат в данный момент времени. Так как мгновенная ось меняет свое положение в пространстве, то меняется и положение окружностей, на которых располагаются точки и линейные скорости точек.

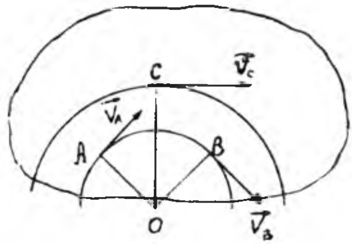


Рис.7.4

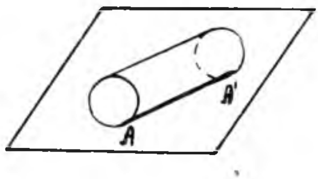


Рис.7.5

8. Если при плоском движении тела по поверхности скорость точек соприкосновения тела с поверхностью относительно поверхности равна нулю, то такое движение тела по поверхности называется качением без скольжения. Геометрическое место таких точек будет мгновенной осью вращения в системе отсчета, связанной с поверхностью. На рис.7.5 показано качение цилиндра по горизонтальной поверхности без скольжения. Скорость точек относительно поверхности на прямой AA′ в данный момент равна 0 .

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ,ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ДРУГОЙ ОСИ

9. К сложной форме движения абсолютно твердого тела относятся такие движения, когда тело вращается вокруг оси, которая в свою очередь вращается вокруг другой оси. Рассмотрим среди таких движений три случая: оси пересекаются в пространстве; оси параллельны и угловые скорости направлены в одну сторону; оси параллельны, но угловые скорости направлены в противоположные стороны.

10. Ось вращения твердого тела $Z'O'$ пересекается с неподвижной относительно системы К осью ZO. Пусть $\vec{\omega}_1$ - угловая скорость вращения твердого тела вокруг оси $Z'O'$, а $\vec{\omega}_2$ - угловая скорость вращения оси $Z'O'$ относительно неподвижной оси ZO (рис.7.6). Перенесем начало векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ в точку C, являющуюся пересечением осей вращения, и построим на них параллелограмм. Скорость точки M диагонали параллелограмма равна:

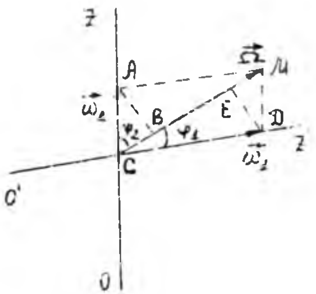


Рис.7.6

$$\vec{v}_M = [\vec{\omega}_1 \times \vec{CM}] + [\vec{\omega}_2 \times \vec{CM}].$$

Модули обоих слагаемых одинаковы

$$\omega_1 CM \sin\varphi_1 = AB\ CM; \quad \omega_1 \sin\varphi_1 = AB;$$

$$\omega_2 CM \sin\varphi_2 = ЕД\ CM; \quad \omega_2 \sin\varphi_2 = ЕД;$$

следовательно, AB = ЕД, но направления различны. Поэтому скорость точки M так же, как и точки C, равна нулю. Следовательно, прямая СМ является мгновенной осью вращения в результирующем движении.

Обозначим мгновенную угловую скорость, направленную вдоль оси СМ, через $\vec{\Omega}$. Тогда скорость любой точки F тела равна: $\vec{v}_F = [\vec{\Omega}\times\vec{CF}]$, с другой стороны $\vec{v}_F = [\vec{\omega}_1\times\vec{CF}]+[\vec{\omega}_2\times\vec{CF}] = [(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2)\times\vec{CF}]$. Так как эти равенства справедливы при любом $\vec{CF}$, то отсюда следует, что

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 , \qquad (7.3)$$

то есть результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку С, с мгновенной угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

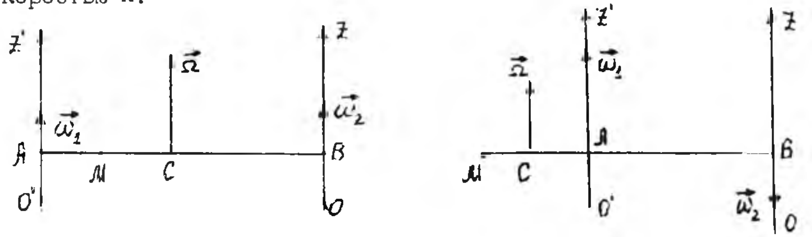


Рис.7.7

II. Тело вращается вокруг оси O'Z' с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, в свою очередь ось O'Z' вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг оси OZ (рис.7.7а), причем вектора $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в одну и ту же сторону. В этом случае движение твердого тела будет плоскопараллельным и скорости точек, расположенных на какой-либо прямой, параллельной мгновенным осям, будут в данный момент одинаковы. Поэтому достаточно рассмотреть скорости точек, расположенных в какой-нибудь плоскости, перпендикулярной к $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Пусть эта плоскость пересекает плоскость осей по прямой АВ. Скорости, которые любая точка М, лежащая на отрезке АБ, получает в результате вращений с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, будут противоположны по направлению, модули же этих скоростей равны соответственно ω_1МА и ω_2МВ. Но всегда найдется точка С, для которой выполняется равенство

$$\omega_1 AC = \omega_2 CB \quad \text{или} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{AC}{CB} .$$

Скорость точки С равна нулю. То же самое имеет место для всех точек, лежащих на прямой, проходящей через С и параллельной осям. Следовательно, эта прямая является мгновенной осью вращения в результирующем движении.

Для определения мгновенной угловой скорости $\vec{\Omega}$ результирующего движения рассмотрим скорость точки В.

$$v_в = \omega_1 AB + \omega_2 0 = \omega_1 AB ,$$

а с другой стороны

$$v_в = \Omega\ CB ,$$

отсюда $\Omega\ CB = \omega_1 AB$ и, следовательно,

$$\Omega = \omega_1 \frac{AB}{CB} = \omega_1 \frac{CB + AC}{CB} = \omega_1 (1 + \frac{AC}{CB}) = \omega_1 (1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}) ,$$

или

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 . \qquad (7.4)$$

Итак, результирующее движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью Ω. Вектор этой мгновенной скорости лежит в плоскости мгновенных угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$, параллелен им и направлен в ту же сторону.

12.Ось вращения Z′O′ параллельна неподвижной оси ZO, вокруг которой она вращается, и вектора угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в противоположные стороны (рис.7.7б). Точно так же, как и в пункте II, можно показать, что в этом случае мгновенная угловая скорость равна

$$\Omega = \omega_1 - \omega_2 , \qquad (7.5)$$

вектор $\vec{\Omega}$ расположен в плоскости мгновенных угловых скоростей $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, параллелен им и направлен в сторону вектора большей величины.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА I.Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной дороге. Точка *О* перемещается со скоростью v_o относительно дороги. Определить: а)угловую скорость вращения колеса; б)скорость и ускорение точек *А,В,С,Д*; в)траекторию точки *С* и путь, пройденный точкой *С* между двумя последовательными моментами ее касания; г)радиус кривизны траекторий точек *А*, *В*,

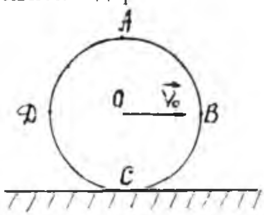


Рис.7.8

C, $Д$, когда они занимают положения, указанные на рис.7.8.

РЕШЕНИЕ. Колесо совершает плоское движение. Введем две системы отсчета К и К': К - связанную с землей, К' - связанную с точкой O колеса и перемещающуюся поступательно относительно системы К (рис.7.9).

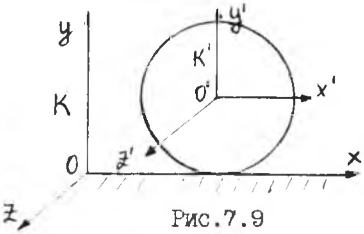


Рис.7.9

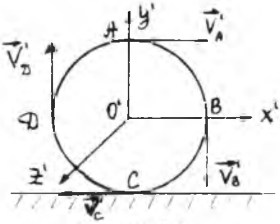


Рис.7.10

а) Так как колесо катится без скольжения, то скорость точки C относительно дороги (система К) равна 0. $\vec{v}_c=0$, $v_c=0$, $\vec{v}_c=\vec{v}_o+\vec{v}'_c$, $v_c=v_o-v'_c=0$, но $v'_c=\omega R$, следовательно, $v_o=\omega R$ и угловая скорость колеса $\omega = \frac{v_o}{R}$. При выбранном направлении $\vec{v}_o$ колесо вращается по часовой стрелке и $\vec{\omega}$ направлено по оси Z за чертеж.

б) Запишем связь между кинематическими величинами отосительно системы К и системы К': $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}'$, $\vec{w} = \vec{w}_o + \vec{w}'$.
В системе К' точки $A,B,C,Д$ вращаются относительно оси $O'Z'$ как относительно неподвижной оси, поэтому скорости всех точек, находящихся на расстоянии R от оси равны $v'_A = v'_B = v'_C = v'_D = \omega R$ и направлены по касательной (рис.7.10).
Скорости точек в системе К (рис.7.11):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_o + \vec{v}'_A, \quad v_A = v_o + v'_A = 2\omega R;$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_o + \vec{v}'_B, \quad v_B = \sqrt{v_o^2 + v_B'^2} = \omega R\sqrt{2};$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_o + \vec{v}'_C, \quad v_c = v_o - v'_c = 0;$$

$$\vec{v}_D = \vec{v}_o + \vec{v}'_D, \quad v_D = \sqrt{v_o^2 + v_D'^2} = \omega R\sqrt{2}.$$

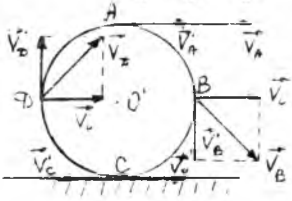


Рис.7.11

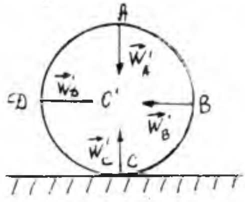


Рис.7.12

Рассмотрим ускорения точек $A, B, C, Д$. В системе отсчета K' точки вращаются относительно неподвижной оси $O'Z'$. Так как все точки расположены на одинаковом расстоянии R от оси, то их ускорения в системе K' равны по величине и направлены к оси вращения по радиусу (рис.7.I2): $w'_A = w'_B = w'_C = w'_D = \omega^2 R$. Так как система K', связанная с точкой O', движется равномерно, то $\vec{w}_o = 0$ и следовательно: $w_A = w'_A = \omega^2 R$, $w_B = w'_B = \omega^2 R$, $w_C = w'_C = \omega^2 R$, $w_D = w'_D = \omega^2 R$.

в)Определим путь, пройденный точкой C. $S = \int\limits_0^T |v_\tau|\,dt$, где v_τ - проекция скорости на касательную к траектории. За время T между двумя последовательными касаниями точки C дороги колесо повернется на угол 2π. Удобно вместо переменной t ввести угол φ – угол поворота колеса относительно оси вращения $O'Z'$; $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, следовательно, $dt = \frac{d\varphi}{\omega}$. За время поворота колеса на угол φ точка C пройдет определенный путь и окажется в точке E. Скорость точки E равна (рис.7.I3):

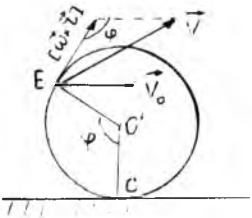


Рис.7.I3

$$v = \sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^2 R^2 - 2\omega^2 R^2 \cos\varphi} = \omega R \sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 2\omega R \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Так как $v \geq 0$, то $\sin\frac{\varphi}{2} \geq 0$. Чтобы скорость была ≥ 0 пределы интегрирования нужно взять от 0 до π и интеграл удвоить.

$$S = 2\int\limits_0^{\pi} \omega R \sin\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\varphi}{\omega} = -8R\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8R.$$

Построим траекторию точки C (рис.7.I4).

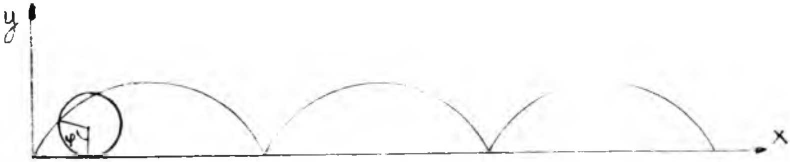


Рис.7.I4

Эта кривая называется циклоидой.

г)Радиус кривизны ρ всех точек траектории можно найти, если известна скорость точки v относительно неподвижной системы отсчета К и нормальное ускорение w_n. Тогда $\rho = \frac{v^2}{w_n}$. Для точки C скорость равна нулю (C - мгновенная ось вращения), следовательно, $\rho_c = 0$. Для точки A: $v_A = 2\omega R$, $w_{nA} = w_A = \omega^2 R$, тогда

$$\rho_A = \frac{4\omega^2 R^2}{\omega^2 R} = 4R.$$

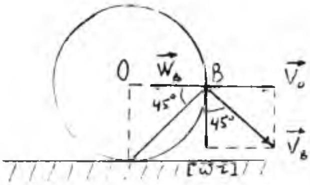


Рис.7.15

Для точек B и $Д$ скорость равна $v_B = v_D = \omega R\sqrt{2}$. Нормальное ускорение этих точек получим, если спроектируем полное ускорение на направление нормали к траектории в данных точках (рис.7.15). Тогда

$$w_{nB} = w_B \cos 45^\circ = w_B \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho_B = \frac{4\omega^2 R^2}{\omega^2 R\sqrt{2}} = 2R\sqrt{2}.$$

Аналогично для точки $Д$

$$w_{nD} = w_D \cos 45^\circ = w_D \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega^2 R \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho_D = \frac{4\omega^2 R^2}{\omega^2 R\sqrt{2}} = 2R\sqrt{2}.$$

ЗАДАЧА 2. Колесо радиуса R и осью CO, конец которой шарнирно закреплен в точке O, катится равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности так, как показано на рис 7.16. Скорость точки C равна v_c. Определить модули угловой скорости и углового ускорения колеса. CO=L.

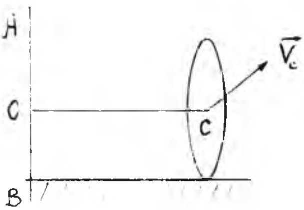


Рис.7.16

РЕШЕНИЕ. Движение колеса можно представить как вращение вокруг осей CO и AB, пересекающихся в точке O. Тогда в соответствии с формулой (7.3) $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, где $\vec{\omega}_1$ - угловая скорость вращения относительно оси AB, $\vec{\omega}_2$ - угловая скорость вращения относительно оси CO (рис.7.17а).

Так как колесо катится без скольжения, то скорость точки Д соприкосновения колеса с поверхностью относительно поверхности равна нулю. Скорость точки Д относительно системы отсчета, связанной с осью колеса CO, $v' = \omega_2 R$. Скорость точки Д

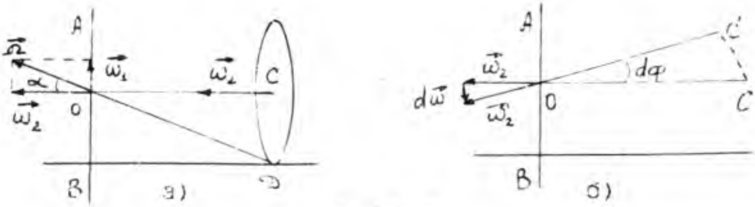


Рис.7.17

относительно системы отсчета, связанной с осью АВ, неподвижной относительно поверхности, равна $\vec v = \vec v_0 + \vec v'$, $v_0 = \omega_1 L$.

Так как скорость $\vec v_D$ точки Д равна 0, то скорости $\vec v_0$ и $\vec v'$ равны по величине и противоположны по направлению, то есть

$$v' = v_0,\quad \omega_2 R = \omega_1 L,\quad L = OC.$$

Точка С колеса участвует только во вращательном движении относительно оси АВ. Ее скорость $v_c = \omega_1 L$. Отсюда

$$\omega_1 = \frac{v}{L},\quad \omega_2 = \omega_1 \frac{L}{R} = \frac{v_c}{R}.$$

Так как оси ОС и АВ взаимно перпендикулярны, то

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v_c}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_c}{R}\right)^2} = v_c\sqrt{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

Направлена угловая скорость Ω вдоль прямой ОД (рис.7.17а). Так как скорости точек на прямой ОД равны 0 в данный момент времени, то ОД - мгновенная ось вращения.

$$tg\,\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R}{L}.$$

Угловое ускорение $\vec\beta = \frac{d\vec\Omega}{dt}$, $\vec\beta = \frac{d\vec\omega_1}{dt} + \frac{d\vec\omega_2}{dt}$, угловая скорость $\vec\omega_1$ постоянная, поэтому $\vec\beta = \frac{d\vec\omega_2}{dt}$. Вектор $\vec\omega_2$, оставаясь постоянным по величине, поворачивается вокруг оси АВ с угловой скоростью ω_1. Поэтому за время dt он повернется на угол $d\varphi = \omega_1 dt$ (рис.7.17б) и приращение вектора будет равно

$$d\omega_2 = \omega_2 d\varphi = \omega_2\omega_1 dt,\qquad \beta = \omega_2\omega_1,\qquad \beta = \frac{v^2}{RL}.$$

Направлен вектор $\vec\beta$ будет так же, как векторное произведение $[\vec\omega_1\times\vec\omega_2]$, $\vec\beta = [\vec\omega_1\times\vec\omega_2]$.

ЗАДАЧИ

"А"

7.1. Цилиндры, изображенные на рис.7.18, вращаются с угловой скоростью ω вокруг осей, проходящих через точку О. Оси

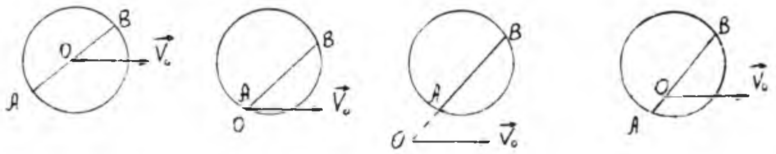


Рис.7.18

вращения перемещаются поступательно относительно земли со скоростью v_o. Изобразить как будут распределены скорости точек отрезков АБ относительно оси. Найти мгновенные оси вращения и указать отрезки в сечении цилиндров, для которых можно показать распределение скоростей.

7.2. Цилиндр вращается вокруг оси ОО′ и при этом премещается поступательно так, что а) скорость поступательного движения параллельна оси вращения; б) скорость поступательного движения образует угол α с осью вращения. Будет ли движение цилиндра в этих случаях плоскопараллельным (рис.7.19)? При каком условии движение цилиндра будет плоским?

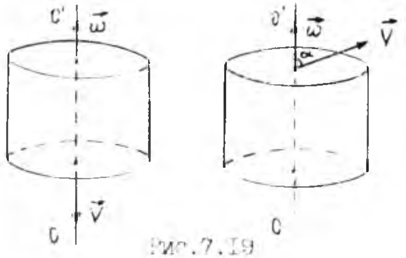


Рис.7.19

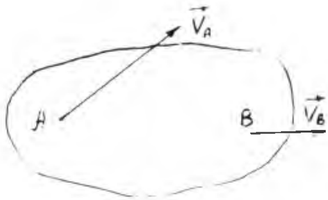


Рис.7.20

7.3. На рисунке 7.20 изображены скорости двух точек абсолютно твердого тела, совершающего плоское движение. Найти мгновенную ось вращения.

7.4. Скорость точки А абсолютно твердого тела при его плоском движении указана на рисунке 7.21. Что можно сказать о проекции скоростей точек В,С,Д на направление прямых, соединяющих эти точки с точкой А?

7.5. Известны скорость точки А и направление скорости точки В абсолютно твердого тела при его плоском движении. Найти скорость точки В (рис.7.22).

Рис.7.2I

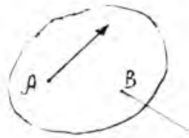


Рис.7.22

7.6. Известны скорость точки А абсолютно твердого тела при его плоском движении и положение мгновенной оси вращения О.

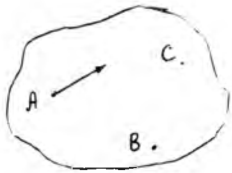


Рис.7.23

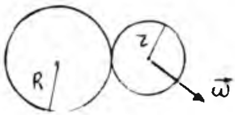


Рис.7.24

Найти скорости точек В,С (рис.7.23).

7.7. Два цилиндра приведены в соприкосновение (рис.7.24). Первый цилиндр вращается с угловой скоростью ω. С какой скоростью будет вращаться второй цилиндр, если друг относительно друга цилиндры движутся без скольжения? Радиусы цилиндров R и r.

7.8. Шар катится без скольжения по горизонтальной дороге. Скорость точки А относительно дороги в данный момент времени равна v. Определить в этот момент времени скорость точки В графическим построением (рис.7.25).

"Б"

7.9. Определить угловую скорость и скорость точек обода колеса радиуса r, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, зная скорость v_o центра колеса.

7.10. При свободном падении середина C стержня AB длиной 2L движется вертикально вниз с постоянным ускорением g, а сам стержень вращается вокруг центра C с постоянной угловой скоростью ω в вертикальной плоскости (рис.7.26). В начальный момент времени стержень горизонтален. Найти скорость его концов A и B в любой момент времени.

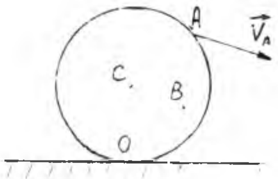


Рис.7.25

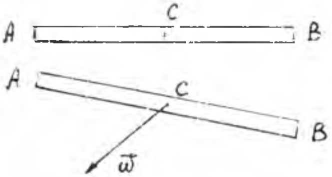


Рис.7.26

7.11. Центр колеса радиуса R, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, в данный момент времени имеет скорость v_o и ускорение w_o. Найти ускорение точек А,В,С,Д обода колеса (рис.7.27).

7.12. Шарик радиусом r катится равномерно и без скольжения по двум прямолинейным рельсам, расстояние между которыми равно d (рис.7.28). За время t точка C проходит путь S. С какими скоростями движутся верхняя и нижняя точки шара?

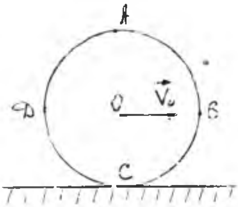


Рис.7.27

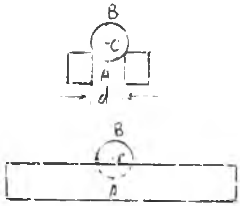


Рис.7.28

7.13. На катушку намотаны нити. За одни концы нитей катушка прикреплена к потолку, к другим концам нити подвешен груз так, как это показано на рис.7.29. Радиус внутреннего цилиндра r, а радиусы внешних цилиндров R. Определить зависимость от времени скорости оси катушки и груза относительно земли, если за время t груз, двигаясь равноускоренно, опустился на высоту h?

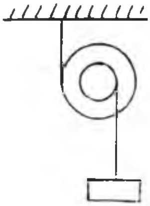


Рис.7.29

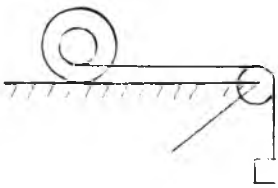


Рис.7.30

7.14.К катушке с намотанной нитью, лежащей на горизонтальном столе, прикреплен груз. Нить пропущена через блок, как это показано на рис.7.30. Катушка катится по поверхности стола без скольжения. Груз движется равноускоренно и за время t проходит путь s. Определить зависимость от времени угловой скорости и углового ускорения цилиндра, а также линейной скорости оси катушки. Радиус внутреннего цилиндра катушки r, внешнего R.

7.15.К оси цилиндра радиуса r, расположенного на горизонтальном столе, привязана нить. Цилиндр приводится в движение посредством груза, как это показано на рис.7.31. Груз движется равноускоренно и за время t проходит путь s. Цилиндр катится по поверхности стола без скольжения. Определить зависимость от времени угловой скорости и углового ускорения цилиндра, а также линейные скорости и линейные ускорения точек A,B,C,Д обода цилиндра в тот момент времени, когда они расположены как указано на рисунке.

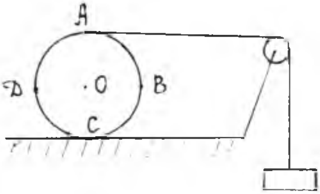


Рис.7.31

7.16.Винт аэросаней вращается с частотой n=360мин$^{-1}$. Скорость v поступательного движения аэросаней равна 54км/ч. С какой скоростью u движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1м?

7.17.Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных пересекающихся осей с постоянными угловыми скоростями ω_1= 3,0 рад/с и ω_2= 4.0рад/с. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

7.18.Тело участвует в двух вращениях, происходящих со скоростями $\vec{\omega}_1 = at^2\vec{i}$ и $\vec{\omega}_2 = 2at^2\vec{j}$ (a=1,00 рад/с^3). На какой угол φ повернется тело за первые 3,00 с? Вокруг какой оси произойдет этот поворот?

7.19.Точка A находится на ободе колеса радиуса R, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью v. Найти:

а)скорость и ускорение произвольной точки A в зависимости от времени;

б)полный путь S, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания поверхности и время, прошедшее между касаниями.

7.20.Цилиндр катится без скольжения со скоростью v (рис.7.32). Найти вектора скоростей точек A, B и C, выразить их через орты координатных осей.

"B"

7.21.По внутренней поверхности закрепленного цилиндра радиуса 2r катится равномерно без проскальзывания колесо радиуса r (рис.7.33). Скорость точки C равна v_c. Определить: а)угловую скорость вращения колеса; б)линейную скорость точек A и B; в)траекторию точек обода колеса.

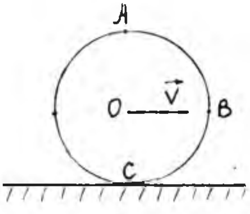


Рис.7.32

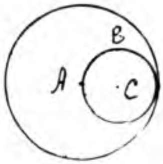


Рис.7.33

7.22.Вращающийся диск (рис.7.34) движется в положительном направлении оси x. Найти уравнение y(x), характеризующее положения мгновенной оси вращения, если в начальный момент ось C диска находилась в точке O и в дальнейшем движется: а)с постоянной скоростью v, а диск раскручивается без начальной угловой скорости с постоянным угловым ускорением β; б)с постоянным ускорением w (без начальной скорости), а диск вращается с постоянной угловой скоростью ω.

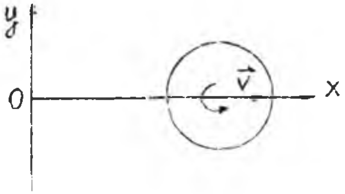


Рис.7.34

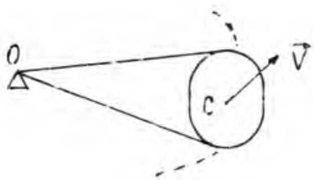


Рис.7.35

7.23.Круглый конус с углом полураствора $\alpha=30^\circ$ и радиусом основания R=5,0 см катится равномерно без скольжения по горизонтальной плоскости, как показано на рис.7.35. Вершина конуса закреплена шарнирно в точке O, которая находится на одном уровне с точкой C – центром основания конуса. Скорость точки C - v=10,0 см/с. Найти модули: а)угловой скорости конуса; б)углового ускорения конуса.

7.24.Шар вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, которая поворачивается в плоскости x, y с угловой скоростью $\vec{\omega}' = \omega'\vec{k}$ (рис.7.36). Найти:

а)угловую скорость $\vec{\Omega}$ и угловое ускорение $\vec{\beta}$ шара, а также модули этих векторов;

б)угол α между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{\omega}$;

в)угол φ между векторами $\vec{\beta}$ и $\vec{\Omega}$.

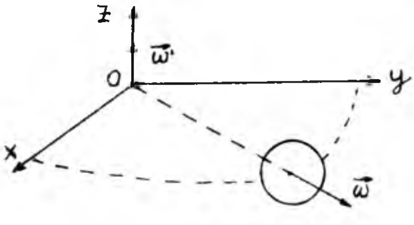


Рис.7.36

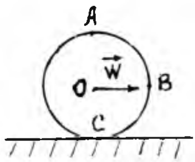


Рис.7.37

7.25.Шар радиуса R=9,0 см начинает катиться без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением w=2,50 см/с^2. Начальное положение шара соответствует рис.7.37. Найти скорости точек A и C и их ускорения через t=2,00 с после начала движения.

7.26. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус цилиндра равен r. Найти радиусы кривизны траектории точек A и B (рис.7.32).

7.27. До начала торможения автомобиль имел скорость v_0=60 км/ч. После начала торможения автомобиль двигался прямолинейно с непостоянным ускорением и остановился спустя время t=3,00 с. За это время он прошел путь S=20,0 м. Определить среднюю угловую скорость $\bar{\omega}$ и среднее угловое ускорение $\bar{\beta}$ колеса автомобиля за время торможения. Радиус колеса R=0,23 м. Колеса автомобиля катились без скольжения.

7.28. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω_0=0,50 рад/с вокруг горизонтальной оси AB. В момент t=0 ось AB начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением β_0=0,10 рад/с^2. Найти модули угловой скорости и углового ускорения тела через t=3,5 с.

7.29. Цилиндр катится без скольжения по поверхности доски, которая перемещается поступательно с ускорением w относительно стола. Определить в момент времени t: а) угловую скорость и угловое ускорение вращения цилиндра; в) линейные скорости и ускорения точек А,В,С,Д (рис.7.35.).

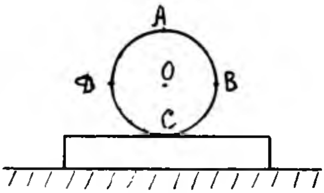


Рис.7.35

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Некоторые приближенные формулы. Если $\alpha \ll 1$, то

$$(1 \pm \alpha)^n = 1 \pm n\alpha \qquad \sin\alpha = \alpha$$

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha \qquad \cos\alpha = 1 - \alpha^2/2$$

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \alpha$$

3. Основные тригонометрические формулы.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad \mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

4. Таблица производных.

Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	nx^{n-1}	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-v'u}{v^2}$
e^{nx}	ne^{nx}	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathrm{arcctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

5. Таблица интегралов.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

$$\int \mathrm{tg}x\, dx = -\ln \cos x$$

$$\int \mathrm{ctg}x\, dx = \ln \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

[Ин]тегрирование "по частям": $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

6. Некоторые сведения о векторах.

а) Скалярное произведение векторов.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = ab\cos\alpha$;

$\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

б) Векторное произведение векторов.

$[\vec{a}\times\vec{b}] = -\,[\vec{b}\times\vec{a}]$; $|[\vec{a}\times\vec{b}]| = ab\sin\alpha$;

$[\vec{a},\vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}\times\vec{b}] + [\vec{a}\times\vec{c}]$.

в) Смешанное, или векторно-скалярное произведение трех векторов.

$\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}\times\vec{a}] = \vec{c}[\vec{a}\times\vec{b}]$;

$\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}] = -\,\vec{b}[\vec{a}\times\vec{c}] = -\,\vec{a}[\vec{c}\times\vec{b}]$.

г) Двойное векторное произведение:

$[\vec{a}[\vec{b}\times\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

ЗАНЯТИЕ I

"Б"

I.II. а) $\vec{v}(t_1) = \frac{\vec{a}}{2}$; $\vec{w}(t_1) = -2\alpha\vec{a}$; б) $\Delta t = \frac{1}{\alpha}$.

I.I3. $\vec{r}(t_1) = \frac{3}{8}\tau\vec{v}_o$; $\vec{r}(t_2) = \frac{1}{2}\tau\vec{v}_o$; $\vec{v}(t_1) = \frac{1}{2}\vec{v}_o$; $\vec{v}(t_2) = 0$;

$\vec{w}(t_1) = \vec{w}(t_2) = -\frac{1}{\tau}\vec{v}_o$.

"В"

I.I7. $\vec{r} = \vec{v}_o t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$; $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{g}t$.

I.I8. $\vec{r} = \vec{v}_o t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{\vec{b}t^3}{6}$.

ЗАНЯТИЕ 2

"Б"

2.I2. б) $y = b\,\frac{(x+\alpha)^2}{(\alpha a)^2}$; в) $\cos\varphi = \frac{2bt}{\sqrt{(\alpha a)^2+(2bt)^2}}$;

г) $\vec{v} = \alpha a\vec{i} + \frac{2b}{a}\vec{j}$; $\vec{w} = 2b\vec{j}$; $v = \sqrt{(\alpha a)^2+(2b/a)^2}$; $w = 2b$.

2.I3. а) $\vec{v} = a\vec{i} + a(1-2\alpha t)\vec{j}$; $\vec{w} = -2\alpha a\vec{j}$; $v = a\sqrt{1+(1-2\alpha t)^2}$;

$w = 2\alpha a$; б) $y = x(1 - \frac{\alpha}{a}x)$; в) $\cos\varphi = -\frac{1-2\alpha t}{\sqrt{1+(1-2\alpha t)^2}}$;

г) $\vec{r}(t_o) = 0$; $\vec{v}(t_o) = a\vec{i} + a\vec{j}$; $\vec{w}(t_o) = -2a\alpha\vec{j}$; $r(t_o) = 0$;

$v(t_o) = a\sqrt{2}$; $w(t_o) = 2a\alpha$; $\vec{r}(t_1) = \frac{a}{\alpha}\vec{i}$; $\vec{v}(t_1) = a\vec{i} - a\vec{j}$;

$\vec{w}(t_1) = -2a\alpha\vec{j}$; $r(t_1) = \frac{a}{\alpha}$; $v(t_1) = a\sqrt{2}$; $w(t_1) = 2a\alpha$.

2.I4. б) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 = 1$; в) $\vec{v}(t_1) = -a\omega\vec{i}$; $v(t_1) = a\omega$;

$\vec{w}(t_1) = -b\omega^2\vec{j}$; $w(t_1) = b\omega^2$; $\vec{v}(t_2) = a\omega\vec{i}$; $v(t_2) = a\omega$;

$\vec{w}(t_2) = b\omega^2\vec{j}$; $w(t_2) = b\omega^2$.

2.I5. б) $x = \dfrac{b}{2\tau c^2}z^2$; в) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{c\tau}{bt}\right)^2}}$; г) $\vec{r}(t_1)= \frac{1}{2}b\tau\vec{i}+c\tau\vec{k}$;

$\vec{v}(t_1) = b\vec{i} + c\vec{k}$; $\vec{w}(t_1) = \frac{b}{\tau}\,\vec{i}$; $r(t_1) = \tau\sqrt{\frac{1}{4}b^2+ c^2}$;

$v(t_1) = \sqrt{b^2+ c^2}$; $w(t_1) = \frac{b}{\tau}$; $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+(c/b)^2}$.

2.I6. б) $y = r_o(\sin\alpha - \frac{c}{a}\cos\alpha) + \frac{c}{a}x$; в) $\cos\varphi = 1$; $\varphi = 0^o$;

г) $\Delta\vec{r} = \frac{at^2}{2}\vec{i} + \frac{ct^2}{2}\vec{j}$; $\Delta r = \dfrac{\sqrt{a^2+ c^2}}{2}t^2$.

2.I7. б) $x = \dfrac{a}{6b^3}y^3$; в) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2b}{at^2}\right)^2}}$.

2.I8. б) $\left(\frac{\omega^2}{a}x - 1\right)^2+ \left(\frac{\omega^2}{b}y\right)^2 = 1$;

в) $\cos\alpha = \dfrac{(a^2-b^2)\sin2\omega t}{2\sqrt{(a^2\cos^2\omega t+b^2\sin^2\omega t)(a^2\sin^2\omega t+b^2\cos^2\omega t)}}$;

г) $\vec{v}(t_1)= \frac{a}{\omega}\,\vec{i}$; $v(t_1)= \frac{a}{\omega}$; $\vec{w}(t_1)= b\vec{j}$; $w(t_1)= b$; $\alpha(t_1)= \frac{\pi}{2}$.

"В"

2.I9. $v = \sqrt{\frac{w}{2b}(1+a^2)}$.

2.20. $v(t) = \frac{1}{2}a^2t$; $w(t) = \frac{1}{2}a^2$.

2.2I. $x = \dfrac{w_o t^2}{2}$; $y = v_o t$; $x = \dfrac{w_o}{2v_o^2}y^2$.

2.22. $v_\rho= 0$; $V_\varphi= a\beta$; $v_z= b$; $w_\rho=- a\beta^2$; $w_\varphi= 0$; $w_z= 0$; $w = a\beta^2$;

$v =\sqrt{(a\beta)^2+b^2}$; $x = a\cos\beta t$; $y = a\sin\beta t$; $z = bt$.

2.23. $V_\rho= - a\beta\sin\frac{\beta t}{2}$; $V_\varphi= a\beta\cos\frac{\beta t}{2}$; $w_\rho= - a\beta^2\cos\frac{\beta t}{2}$;

$w_\varphi= - a\beta^2\sin\frac{\beta t}{2}$; $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2+ \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$.

2.24. $V_\rho = \alpha ae^{\alpha t}$; $V_\varphi = \alpha ae^{\alpha t}$; $V = \alpha ae^{\alpha t}\sqrt{2}$; $w_\varphi = 2a\alpha^2e^{\alpha t}$;

$w = 2a\alpha^2e^{\alpha t}$; $x^2+ y^2 =(ae^{\alpha t})^2$.

2.25. $\rho = a$; $\varphi = \omega t$; $z = ct$; $V_\rho = 0$; $V_\varphi = a\omega$; $V_z = c$; $v = \sqrt{(a\omega)^2 + c^2}$;

$w_\rho = -a\omega^2$; $w_\varphi = 0$; $w_z = 0$; $w = a\omega^2$.

ЗАНЯТИЕ 3

"Б"

3.5. $\alpha = 76^\circ$.

3.6. $S = v_o\cos\alpha\,\dfrac{v_o\sin\alpha + \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g}$; $H = \dfrac{v_o^2\sin^2\alpha}{2g} - h$.

3.7. $H = h + \dfrac{gS^2}{2v_o^2}$.

3.8. $S = v_o\cos\alpha\,\dfrac{v_o\sin\alpha + \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$;

$\tau_{12} = \dfrac{v_o\sin\alpha \pm \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha - 2g(H-h)}}{g}$, если $H > h$, то тело будет на высоте H в моменты τ_1 и τ_2, если $H < h$, то тело будет на высоте H в момент τ_1 (знак "+" перед корнем).

$v_k = \sqrt{v_o^2 - 2v_o g t_k \sin\alpha + g^2 t_k^2}$, $t_k = \dfrac{v_o\sin\alpha + \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha + 2gh}}{g}$.

3.9. $\mathrm{tg}\alpha = -\dfrac{v_o^2}{gS} \pm \sqrt{\left(\dfrac{v_o^2}{gS}\right)^2 + \dfrac{2hv_o^2}{gS^2} - 1}$.

3.10. $h_1 = h_2 = h_3 = 20$ м; $v_1 = 54$ м/с; $v_2 = 78$ м/с; $v_3 = 102$ м/с.

3.11. $S = 8h\sin\alpha$.

3.12. $t_k = \sqrt{\dfrac{2}{g^2}\left[v_o^2 \pm \sqrt{v_o^4 - S^2 g^2}\right]}$.

3.13. $\Delta t = 4$ с.

3.14. $\sqrt{\dfrac{2h}{g}} > \dfrac{S}{v_{01} + v_{02}}$.

3.15. $\cos\alpha = \dfrac{v}{v_o}$; $t_n = \dfrac{\sqrt{v_o^2 - v^2} \pm \sqrt{v_o^2 - v^2 - 2gh}}{g}$.

"В"

3.16. $tg2\alpha = -\frac{S}{h}$; $v_o = \sqrt{\frac{gS^2\sqrt{S^2+h^2}}{S^2-h^2-h\sqrt{S^2+h^2}}}$.

3.17. $tg\alpha = \frac{v_o}{\sqrt{v_o^2+2gh}}$.

3.18. $v_o = S\sqrt{\frac{g}{h+\sqrt{S^2+h^2}}}$.

3.19. $\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$.

3.20. $y = \pm\left|\frac{gx^2}{2v_o^2} - \frac{v_o^2}{2g}\right|$.

3.21. Если $v_o^2 < gl\sin 2\alpha$, то ни одна из траекторий не коснется укрытия и $L_{max} = \frac{v_o^2}{g}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (где φ - угол, под которым произведен выстрел). Если $\varphi_{max} \geq \frac{\pi}{2}$ и $\sin 2\alpha \geq \frac{v_o^2}{2gl+v_o^2}$, то $L_{max} = \frac{v_o^2}{g}$, если $\sin 2\alpha < \frac{v_o^2}{2gl+v_o^2}$, то $L_{max} = \frac{v_o^2}{g}\sin 2\varphi_{max}$.

3.22. $S = 2v_o\cos\alpha\,\frac{v_o\sin\alpha - \sqrt{v_o^2\sin^2\alpha - 2gh}}{g}$.

3.23. а) $l = \frac{v_o^2\sin 2\alpha}{g} - S$; б) $l = \frac{v_o^2\sin 2\alpha}{g} - S + 4v\left(\frac{v_o\sin\alpha}{g} - \frac{S}{v_o\cos\alpha}\right)$.

ЗАНЯТИЕ 4

"Б"

4.16. $w_\tau = \alpha$; $w_n = \frac{\alpha^2 t^2}{R}$; $w = \alpha\sqrt{1+\frac{\alpha^2 t^4}{R^2}}$; $tg\varphi = \frac{\alpha}{R}t^2$;

$l = l_o + \frac{\alpha t^2}{2}$; $S = \frac{\alpha t^2}{2}$.

4.17. $S(t_1) = 100$ м; $S(t_2) = 250$ м; $S(t_3) = 450$ м.

4.18. $S(t_1) = 50$ м; $S(t_2) = 150$ м; $S(t_3) = 275$ м.

4.19. а) $y = \frac{b}{2a}x^2$; б) $R = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^{3/2}$; в) $w_n = \frac{ab}{\sqrt{1+b^2t^2}}$;

$w_\tau = \frac{ab^2 t}{\sqrt{1+b^2t^2}}$; $w = ab$.

4.20. $w = a\sqrt{1+16\pi^2 n^2} = 0{,}80$ м/с^2 .

4.21. а) $w(l=0) = \frac{a^2\omega^2}{R}$; $w(l=\pm a) = a\omega^2$; б) $w_{min} = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{4a^2-R^2}$;

$l = \pm\sqrt{a^2 - \frac{R^2}{2}}$.

4.22. $R = \frac{a^3}{2bS}$; $w = \sqrt{\left(\frac{4bS^2}{a^2}\right)^2 + a^2}$.

4.23. $S = \frac{2}{3}a\tau^2$. Для нахождения w_n и w нужно знать R.

4.24. $w_n = \frac{6at}{\sqrt{\tau^4+9t^4}}$; $w_\tau = \frac{18at^3}{\tau^4\sqrt{1+9t^4/\tau^4}}$; $R = \frac{a}{6\tau^4 t}\left(\tau^4 + 9t^4\right)^{3/2}$.

"B"

4.25. $v = \sqrt{2ax}$.

4.26. а) $w = 2\alpha v^2$; $R = \frac{1}{2\alpha}$; б) $w = \pm\frac{\beta}{\alpha^2}v^2$; $R = \frac{\alpha^2}{\beta}$.

4.27. $v = 2\omega R$; $w = w_n = 4\omega^2 R$.

4.28. а) $w_\tau = 0$; $w_n = w = a\omega^2$; $R = a$; $l = a\omega t$; $S = a\pi$.

б) $w_n = 0$; $w_\tau = w = 2\sqrt{2}\,a\omega^2\cos 2\omega t$; $R = \infty$; $l = \frac{\sqrt{2}}{2}a(1-\cos 2\omega t)$;

$S = 2\sqrt{2}\,a$. в) $w_\tau = 3a\omega^2\cos 2\omega t$; $w_n = \frac{3}{2}a\omega^2\sin 2\omega t$;

$w = \frac{3}{2}a\omega^2\sqrt{3\cos^2 2\omega t+1}$; $R = \frac{3}{2}a\sin 2\omega t$; $l = \frac{3}{4}a(1-\cos 2\omega t)$; $S = 3a$.

4.29. I) $w_\tau=0$; $w_n = w = a\omega^2$; $R = \dfrac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$; 2) $w_\tau = \dfrac{2b}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a\omega}{2bt}\right)^2}}$

$$w_n = a\omega^2\sqrt{1+\frac{4b^2}{\omega^2(a^2\omega^2+4b^2t^2)}}\ ;\quad w = \sqrt{a^2\omega^4+4b^2}\ ;$$

$$R = \frac{a^2\omega^2+4b^2t^2}{a\omega^2\sqrt{1+\dfrac{4b^2}{\omega^2(a^2\omega^2+4b^2t^2)}}}\ .$$

4.30. а) $v(t) = \dfrac{Rv_o}{R+v_o t}$; $v(S) = v_o e^{-S/R}$; б) $w(v) = \sqrt{2}\,\dfrac{v^2}{R}$;

$$w(S) = \sqrt{2}\,\frac{v_o^2}{R}\,e^{-2S/R}\ .$$

4.3I. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2S}{R}$.

4.32. а) $s = \dfrac{v_o}{b}(1 - e^{-bt})$; б) $v = v_o e^{-bt}$; в) $s \simeq v_o t$; $v \simeq v_o$.

4.33. $t = \displaystyle\int_0^S \frac{dS}{v(S)}$.

ЗАНЯТИЕ 5

"Б"

5.II. $w = 0{,}7$ м/с^2 .

5.I2. а) $\omega_{ср} = 4$ с$^{-1}$; $\beta_{ср} = 6$ с$^{-2}$; б) $\beta = -12$ с$^{-2}$.

5.I3. $t = 7$ с .

5.I4. $n = 1{,}6$ с$^{-1}$.

5.I5. $w_\tau = 5\cdot10^{-2}$ м/с^2; $w_n = 10^{-1}$ м/с^2; $w = 11\cdot10^{-2}$ м/с^2.

5.I6. $w_\tau = 0{,}92$ м/с^2; $w_n = 33{,}8$ м/с^2; $w = 33{,}8$ м/с^2.

5.I7. $\beta = 3{,}14$ с$^{-2}$; $N = 25$.

5.18 $\beta = 0{,}5\ c^{-2}$; $N = 150$.

5.19. $\beta = 1{,}3\ c^{-2}$.

5.20. $\Delta t = 7{,}85$ c ; $N = 22$.

5.21. $\operatorname{tg}\varphi = \beta t^2$.

5.22. $\varphi = \frac{H}{2R}$; $\omega = \frac{H}{R\tau}$; $w_A = \frac{H}{\tau^2}\sqrt{1+\left(\frac{H}{R}\right)^2}$.

5.23. $\omega = 7.8\ c^{-1}$; $\beta = 1.3\ c^{-2}$.

"В"

5.24. $\omega_{cp} = \frac{1}{3}\omega_o$.

5.25. а) $\varphi = \frac{\omega_o}{a}(1 - e^{-at})$; б) $\omega = \omega_o e^{-at}$.

5.26. $\omega = \pm\sqrt{2\beta_o \sin\varphi}$

5.27. $\Delta N = \frac{\omega^2}{2\pi a}$.

5.28. $\varphi = \frac{\omega_1}{2t_1}t^2$, где $0 < t \le t_1$; $\varphi = \frac{\omega_1 t_1}{2} + \omega_1(t-t_1)$, где $t_1 < t \le t_2$;

$\varphi = \frac{\omega_1 t_1}{2} + \omega_1(t_2-t_1) + \omega_1(t-t_2) - \frac{\omega_1(t-t_2)^2}{2(t_3-t_2)}$, где $t_2 < t \le t_3$.

5.29. $w = R(a + 2bt)$; $H = R\tau^2\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\tau\right)$.

5.30. $\varphi(t_1) = \frac{1}{3}\beta_o t_1^2$; $\omega(t_1) = \frac{1}{2}\beta_o t_1$; $\varphi(t_2) = \frac{1}{3}\beta_o t_1^2 + \frac{1}{6}\beta_2(t_2-t_1)^2$;

$\omega(t_2) = \frac{1}{2}\beta_2(t_2-t_1)$; $\varphi(t_3) = \frac{1}{3}\beta_o t_1^2 + \frac{1}{6}\beta_2(t_2-t_1)^2 + \frac{1}{2}\beta_2(t_3-t_2)^2$;

$\omega(t_3) = \beta_2(t_3-t_2)$.

ЗАНЯТИЕ 6

"Б"

6.11. $\vec{w} = (\omega - \omega_o)^2\vec{r}$; $w = -(\omega - \omega_o)^2 r$.

6.12. $v_o = \frac{l}{2\tau} = 3$ км/ч .

6.I3. $v' = \sqrt{v_o^2 + v^2 + 2v_o v\cos\varphi} = 40$ км/ч; $\varphi' = I9^o$.

6.I4. $l = 22$ м.

6.I5. $tg\alpha = \frac{v}{v_o}$.

6.I6. $l = 500t$; $l = I500$ км.

6.I7. $\cos\varphi = \frac{v_1 + v_2}{v_o}$.

6.I8. $t = 2$ мин.

6.I9. $v_A = 70$см/с; $w_A = 10$см/с^2; $v_B = 50$см/с; $w_B = 280$см/с^2.

6.20. $v' = 25$ м/с; $w' = 166$ м/с^2.

"В"

6.2I. а) $t = 0.7$ с; б) $l = 0.7$ м; $S = I.3$ м.

6.22. $n = I00$ ступенек.

6.23. $u = \dfrac{v_o}{\dfrac{v'}{\sqrt{v'^2 - v_o^2}} - 1} = 3$ км/ч.

6.24. $S = \frac{2}{3} u_o \frac{h}{v'} = 7 \cdot I0^2$м.

6.25. а) $v' = 24$км/ч; $w' = 0.33$ м/с^2: б) $v' = 27$ км/ч; $w' = 0.30$ м/с^2

6.26. $S = \frac{v\omega}{2}\left(t_2^2 - t_1^2\right) = 570$ м.

ЗАНЯТИЕ 7

"Б"

7.9. $\omega = \frac{v_o}{r}$; $v = 2v_o \sin\frac{\varphi}{2}$.

7.I0. $v = \sqrt{(gt)^2 + (\omega L)^2 + 2g\omega Lt\cos\omega t}$.

7.11. $w_A = \sqrt{4w_o^2 + \frac{v_o^4}{R^2}}$; $w_B = \sqrt{\left(w_o - \frac{v_o^2}{R}\right)^2 + w_o^2}$;

$w_D = \sqrt{\left(w_o + \frac{v_o^2}{R}\right)^2 + w_o^2}$; $w_C = \frac{v_o^2}{R}$.

7.12. $v_A = \frac{S}{t}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-(d/2)^2}} - 1\right)$; $v_B = \frac{S}{t}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2-(d/2)^2}} + 1\right)$.

7.13. $v_o = \frac{2hR}{(R+r)t}$; $v = \frac{2h}{t}$.

7.14. $\omega = \frac{2S}{(R-r)t}$; $\beta = \frac{2S}{(R-r)t^2} = \text{const}$; $v_o = \frac{2SR}{(R-r)t}$.

7.15. $\omega = \frac{s}{rt}$; $\beta = \frac{s}{rt^2}$; $v_A = \frac{2s}{t}$; $v_B = v_D = \frac{\sqrt{2}\,s}{t}$; $v_c = 0$; $w_c = \frac{s^2}{rt^2}$;

$w_A = \frac{2s}{t^2}\sqrt{1+\left(\frac{s}{2r}\right)^2}$; $w_B = \frac{s}{t^2}\sqrt{\left(1-\frac{s}{r}\right)^2+1}$; $w_D = \frac{s}{t^2}\sqrt{\left(1+\frac{s}{r}\right)^2+1}$.

7.16. $u = 41$ м/с.

7.17. а) $\varphi = \frac{at^3}{3}\sqrt{5} = 20$ рад; б) ось лежит в плоскости xoy и образует с осью x угол равный 63^o.

7.18. $\omega' = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = 5$ c^{-1}; $\beta = \omega_1\omega_2 = 12$ c^{-2}.

7.19. а) $w_A = \frac{v^2}{R}$; $v_A = 2v\sin\frac{\omega t}{2}$, где $\omega = \frac{v}{R}$, ускорение направлено по радиусу к оси; б) $S = 8R$; $T = \frac{2\pi R}{v}$.

7.20. $\vec{v}_A = 2v\vec{i}$; $\vec{v}_B = v\vec{i} - v\vec{j}$; $\vec{v}_C = 0$.

"В"

7.21. а) $\omega = \frac{v_o}{r}$; б) $v_A = 2v_o$; $v_B = v_o\sqrt{2}$.

7.22. а) $y = \frac{v^2}{\beta x}$; б) $y = \frac{1}{\omega}\sqrt{2wx}$.

7.23. а) $\omega = \frac{v}{R\cos\alpha} = 2{,}3\ c^{-1}$; $\beta = \frac{v^2}{R^2}\mathrm{tg}\alpha = 2.3\ c^{-2}$.

7.24. а) $\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \vec{\omega}'$; $\Omega = \sqrt{\omega^2+(\omega')^2}$; $\vec{\beta} = [\vec{\omega} \times \vec{\omega}']$; $\beta = \omega\,\omega'$;

б) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega'}{\omega}$; в) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

7.25. $v_A = 10$ см/с; $v_C = 2{,}7$ см/с; $w_A = 4{,}9$ см/с^2; $w_c = 4{,}1$ см/с^2.

7.26. $R_A = 4r$; $R_B = 2\sqrt{2}\,r$.

7.27. $\bar{\omega} = \frac{S}{Rt} = 29\ c^{-1}$; $\bar{\beta} = \frac{v_o}{Rt} = 24\ c^{-2}$.

7.28. $\omega = \sqrt{\omega_o^2+(\beta_o t^2)} = 0{,}6\ c^{-1}$; $\beta = \beta_o\sqrt{1+(\omega_o t)^2} = 0{,}2\ c^{-2}$.

7.29. а) $v_A = 2\omega R + v$; $v_B = v_D = \sqrt{(\omega R + v)^2 + (\omega R)^2}$; $v_C = v$;

$w_A = w_B = w_C = w_D = \omega^2 R$.

б) $v_A = 2\omega R + wt$; $v_B = v_D = \sqrt{(\omega R + wt)^2 + (\omega R)^2}$; $v_C = wt$;

$w_A = \sqrt{w^2 + (\omega R)^2}$; $w_B = w - (\omega R)^2$; $w_C = w_A$; $w_D = w + (\omega R)^2$.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор - Н.А.Волынкина
Техн.редактор - О.Ю.Старцева
Корректор - Н.В.Голубева

Подписано в печать 16.06.93 . Формат 60×84I/I6.
Бумага белая оберточная. Печать оперативная.
Обьем 6 печ.л., 5,58 уч. - изд.л. Тираж 500 экз.
С. Заказ N 2805.
Самарский госуниверситет, 443011, г.Самара,
ул.акад.Павлова,I.
СП "СамВен", 443099, г.Самара,ул.Венцека, 60.