МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени С. П. Королева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное задание

КУЙБЫШЕВ 1980

УДК 65.012.122

Учебное задание составлено в соответствии с программой курса "Теория игр и исследование операций". В нем содержатся задачи по всем разделам курса, даны указания для их решения, а также примеры решения типовых задач.

Задание предназначено для студентов специальности "Прикладная математика" Куйбышевского авиационного института и может быть использовано для проведения практических занятий и комплектования домашних заданий по данному курсу.

Составитель С.М. Д у б и н а

Рецензент О.К. Р и т т е р

Утверждено редакционно-издательским советом института 9.01.80 г.

1. ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

К задачам дискретного программирования относятся различные оптимизационные задачи: с неделимыми объектами, на невыпуклых и несвязных областях, с разрывной целевой функцией, задачи дискретные по своей природе. В этом разделе рассматриваются основные типы задач дискретного программирования.

Задача о назначении

Необходимо выбрать перестановку из n чисел $< i_1, i_2, i_3 \cdots, i_n$ $i_j=\overline{1,n}$ так, чтобы $f=\sum_{j=1}^{n} c_{i_j j} \to$ *мин(макс)*, где c_{ij} задаются матрицей С размером $n \times n$:

1. $$C=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 9 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

Найти *мин.* (Ответ 46).

2. $$C=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 4 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & 10 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 11 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 6 & 12 & 3 & 1 & 10 \\ 12 & 11 & 1 & 7 & 10 & 4 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 8 & 13 & 13 & 17 & 14 \\ 16 & 17 & 19 & 18 & 14 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Найти *макс.*(Ответ 90).

3. $$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 5 & 9 & 16 & 8 & 17 \\ 6 & 8 & 11 & 8 & 18 & 19 & 20 \\ 7 & 13 & 10 & 3 & 4 & 14 & 18 \\ 5 & 9 & 6 & 21 & 12 & 17 & 22 \\ 5 & 4 & 11 & 6 & 13 & 14 & 11 \\ 17 & 7 & 12 & 13 & 16 & 17 & 9 \\ 13 & 0 & 8 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

Найти *макс.*(Ответ 114).

4. $$\begin{pmatrix} 5 & 13 & 6 & 10 & 13 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & 7 & 11 & 8 & 12 & 11 \\ 11 & 5 & 8 & 12 & 4 & 18 & 4 \\ 12 & 6 & 9 & 8 & 5 & 8 & 5 \\ 9 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 11 & 8 & 7 & 4 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 12 & 13 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Найти *макс.* (Ответ 82).

П р и м е р I. В задаче о назначениях найти минимум.

Решаем венгерским методом.

$$C=\begin{pmatrix} 20 & 5 & 12 & 13 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 4 & 5 & 4 \\ 10 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приводим матрицу C, вычитая из каждой строки минимальный элемент, затем из столбцов - минимальные в этих столбцах элементы.

Результат - матрица C''.

$$C''=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \to 5 \\ \to 9 \\ \to 4 \\ \to 3 \end{array}$$

Полученные нули матрицы C'' можно вычеркнуть тремя линиями: первой, второй вертикальной и третьей горизонтальной (их номера обведены). Это значит, что не существует системы независимых нулей, которые лежат на разных вертикалях и горизонталях так, что в каждой строке и в каждом столбце находится один независимый нуль.

Среди всех невычеркнутых элементов матрицы C'' находим минимальный. Его вычитаем из невычеркнутых и добавляем к вычеркнутым дважды. Получим матрицу C_1 :

$$C_1=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 0^* & 5 & 7 \\ 0^* & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0^* & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0^* \end{pmatrix} \end{array}$$

Нули матрицы C_1 нельзя вычеркнуть менее, чем четырьмя линиями. Следовательно, существует система независимых нулей. Найдем их. Для этого отыщем линию с наименьшим числом нулей. Это вертикаль I. Помечаем звездочкой единственный нуль первой вертикали. Удаляем из C_1 строку и столбец, содержащие помеченный нуль. В оставшейся матрице выбираем горизонталь I, содержащую наименьшее число нулей. Производим пометку, удаляем строку и столбец с помеченным нулем. В оставшейся матрице горизонталь 4 содержит один нуль. Помечаем его.После этого остается единственный нуль в третьей строке. Помечаем его. Помеченные нули дают решение задачи: $\langle 2,1,3,4 \rangle$. Значение f равно сумме констант приведения: $f = 5+9+4+3+1+1\cdot(2-1) = 23$, f можно найти непосредственно: $f = c_{12}+c_{21}+c_{33}+c_{44} = 5+9+5+4 = 23$.

Примечание. При поиске максимума выбираются наибольшие коэффициенты, а матрица C'' содержит неположительные элементы.

Задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП)

Найти *мин(макс)* линейной формы CX при условии AX=B, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, x_j - целые, $j \in J$.

5. $x_1 \to$ *макс.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad J = \{1,2,3,4,5\}. \text{(Ответ: 5)}$$

6. C = (2,-2,3,-3,0) *(макс.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad J = \{1,2,3,4,5\}. \text{(Ответ: 24)}$$

7. C = (1, -1, 1, -1) *(макс.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad J = \{1,2,3,4\}. \text{(Ответ: 2)}$$

8. C = (1,2,0,0,1) *(мин.)*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J = \{1,2,3,4,5\}. \text{(Ответ: 2)}$$

П р и м е р 2. Задача ЦЛП задана условиями: $x_1 + 4x_2 \to$ *макс*,

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, x_i - целые, $i = \overline{I,4}$. (I)

Решим ее, используя первый алгоритм Гомори.

а). Заполняем симплекс-таблицу (табл. I).

Поскольку план не является нормальным, введем $x_5 = 3 - (x_1 + x_2)$, так как из системы ограничений видно, что $x_1 + x_2 \leq 3$.

В строке x_5 выбираем генеральный элемент из условия лексикографической минимальности его столбца. Генеральный элемент подчеркнут. Результаты пересчета симплекс-таблицы составляют содержание табл. 2.

Таблица I

		x_1	x_2
x_0		-I	-4
x_1		-I	
x_2			-I
x_3	2	-I	2
x_4	6	3	2
x_5	3	I	<u>I</u>

Таблица 2

		x_1	x_5
x_0	I2	3	4
x_1		-I	
x_2	3	I	I
x_3	-4	<u>-3</u>	-2
x_4		I	-2

Решаем задачу максимилизации x_0 лексикографической модификацией метода уточнения оценок [I]. Генеральный элемент α_{ij} выбираем из условий:

$$i = \text{мин}\{k / \alpha_{k0} < 0\}, \ i = 3,$$

$$R_j = \underset{l}{\text{lex мин}} \left\{ \frac{R_l}{|\alpha_{il}|} \Big/ \alpha_{il} < 0 \right\}, \ j = 1.$$

Пересчитывая табл. 2, получаем табл. 3.

Выбираем в табл. 3 генеральный элемент: пересчитывая табл. 3, получаем табл. 4.

Получена точка максимума x_0 , но она не является целочисленной. Используя первый алгоритм Гомори [I], вводим отсечение по x_2:

$$x_6 = -1/2 - (-(3/8)x_3 - (1/8)x_4).$$

Таблица 3

		x_3	x_5
x_0	8	I	2
x_1	4/3	-I/3	2/3
x_2	8/3	I/3	I/3
x_3		-I	
x_4	-4/3	I/3	-8/3

Таблица 4

		x_3	x_4
x_0	7	5/4	3/4
x_1	I	-I/4	I/4
x_2	3/2	3/8	I/8
x_3		-I	
x_4			-I
x_6	-I/2	-3/8	-I/8

Полученную задачу решаем также лексикографической модификацией метода уточнения оценок (табл. 5). По x_1 вводим отсечение: $x_7 = -1/3 - (-(1/3)x_6 - (1/3)x_4)$. Решая новую задачу линейного программирования, получаем табл. 6. Она соответствует оптимальному целочисленному плану (I,I,I,I).

Таблица 5

		x_6	x_4
x_0	I6/3	I0/3	I/3
x_1	4/3	-2/3	I/3
x_2	I	I	
x_5	4/3	-8/3	I/3
x_4			-I
x_7	-I/3	-I/3	-I/3

Таблица 6

		x_6	x_7
x_0	5	3	I
x_1	I	-I	I
x_2	I	I	
x_3	I	-3	I
x_4	I	I	-3

б) Решим этот же пример методом Лэнд и Дойг [I]. Согласно табл. 4, оптимальное нецелочисленное решение задачи соответствует $X^0 = \langle 1, 3/2, 0, 0 \rangle$, $F = 7$. Следовательно, оценка $\xi(G_0)$ множества планов G_0, задаваемых системой равенств (I), равна 7 ($\xi(G_0) =]F(X^0)[$, так как гарантировано целое значение F).

Разделим G_0 на непересекающиеся множества G_1' и G_2':

$$G_1' = \{x \in G_0 \mid x_2 \leqslant 1\}, \quad G_2' = \{x \in G_0 \mid x_2 \geqslant 2\}.$$

Множество G_1^1 задается системой:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ x_2 + x_5 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5}. \qquad (2)$$

Максимизируя $x_1 + 4x_2$ при ограничениях (2), получаем

$$X' = (4/3, 1, 1, 1, 0); \quad F = 5\frac{1}{3}; \quad \xi(G_1') = [F(X')] = 5.$$

Множество G_2^1 задается системой:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ x_2 - x_5 &= 2, \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6. \qquad (3)$$

Система несовместна в области неотрицательных значений, поэтому $G_2 = \emptyset$.

Разделим G_1' на G_1^2 и G_2^2:

$$G_1^2 = \left\{ x \in G_1' \,\middle|\, x_1 \leq 1 \right\}, \; G_2^2 = \left\{ x \in G_1' \,\middle|\, x_1 \geq 2 \right\}.$$

Множество G_1^2 задается системой:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6, \\ x_2 + x_5 &= 1, \\ x_1 + x_6 &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Максимизируя F при ограничениях (4), получаем

$$X^2 = \langle 1, 1, 1, 1, 0, 0 \rangle; \quad F = 5, \ \xi(G_1^2) = 5.$$

Поскольку оценка $\xi(G_1^2)$ совпала с $\xi(G_1')$, то она является наилучшей. Следовательно, $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ – оптимальный целочисленный план задачи.

Задача о ранце

Дано n предметов, каждый из которых имеет цену c_i и вес a_i. Требуется выбрать К предметов так, чтобы их суммарный вес был не больше А, а суммарная стоимость максимальна.

9.

c_i	I0	II	2	3	5	7	5
a_i	8	7	I	2	4	3	2

А = I8 (Ответ:3I)

I0.

c_i	2	3	5	7	5
a_i	I	2	4	3	2

А = II (Ответ:20)

II.

c_i	2	I	2	5	6	8	7
a_i	4	5	3	2	I	6	3

А = 9 (Ответ:20)

I2.

c_i	7	6	6	5	3	8	9
a_i	5	4	7	I	3	4	5

А = I2 (Ответ:22)

Введением переменных $x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ задача о ранце сводится к задаче ЦЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \text{макс.};$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant A.$$

В этой постановке она может быть решена методами Гомори, Лэнд и Дойг.

П р и м е р 3. Задача о ранце:

c_i	2	3	5	7
a_i	I	2	4	3

А = 9.

Решим эту задачу, используя общий алгоритм метода ветвей и границ [I]. Оценку $\varphi(G)$ будем вычислять как целую часть от максимального значения формы в транспортной задаче, в которой поставщиками будут предметы, а потребителями - ранец и фиктивный потребитель. Определяем коэффициенты транспортной задачи:

$$C_{i1} = \frac{c_i}{a_i}; \quad C_{i2} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Решение транспортной задачи (табл. 7) найдено методом наибольшей стоимости [2]: F =I5,75; $\varphi(G^0) = [F] =$ I5. Ветвление будем производить, разделяя решения, содержащие некоторый предмет и не содержащие его: G_1' – решения, содержащие предмет I.

G_0' – решения, не содержащие предмет I.

Таблица 7

Предмет	Ранец	Фиктивный потребитель	a_i
I	2,5 I	0	I
П	I,5 2	0	2
Ш	I,25 3	0 I	4
IУ	2,3(3) 3	0	3
b_j	9	I	I0

Очевидно, что $\varphi(G_1') = \varphi(G^0) = 15$.

Решая транспортную задачу для П, Ш, IУ предметов, получим F' = I5,0, $\varphi(G_1')$= I5. Причем предметы П, Ш, IУ целиком поместились в ранце. Оценка $\varphi(G_2') = \varphi(G_1') = 15$ является лучшей и соответствует значению функции для решения, содержащего предметы П,Ш,IУ. Следовательно, на основании принципа оптимальности метода ветвей и границ выбор предметов П, Ш, IУ является решением данной задачи.

<u>Задача коммивояжера</u>

Задана матрица $\|C_{ij}\|_{n\times n}$ расстояний между городами i, j. Среди замкнутых маршрутов $D = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, проходящих через каждый город только один раз, необходимо найти кратчайший.

I3. $$C = \begin{pmatrix} \infty & 3I & I5 & I9 & 8 & 55 \\ I9 & \infty & 22 & 3I & 7 & 35 \\ 25 & 43 & \infty & 53 & 57 & I6 \\ 5 & 50 & 49 & \infty & 39 & 9 \\ 24 & 24 & 33 & 5 & \infty & I4 \\ 34 & 26 & 6 & 3 & 36 & \infty \end{pmatrix}$$

(Ответ: 74)

I4. $$C = \begin{pmatrix} \infty & 39 & 45 & 2 & 5I & 33 \\ 30 & \infty & 20 & 33 & 40 & 35 \\ 54 & I6 & \infty & 55 & 22 & 56 \\ I9 & 36 & 25 & \infty & I8 & 43 \\ 29 & 8 & 8 & I2 & \infty & 25 \\ I6 & 47 & 3I & I4 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

(Ответ: 95)

I5. $$C=\begin{pmatrix} \infty & 41 & 27 & 54 & 46 & 5 \\ 42 & \infty & 11 & 32 & 58 & 21 \\ 36 & 5 & \infty & 33 & 22 & 33 \\ 46 & 24 & 59 & \infty & 49 & 59 \\ 48 & 58 & 11 & 44 & \infty & 47 \\ 26 & 50 & 35 & 19 & 27 & \infty \end{pmatrix},$$

(Ответ: I29)

I6. $$C=\begin{pmatrix} \infty & 21 & 40 & 28 & 60 & 52 \\ 58 & \infty & 11 & 39 & 22 & 56 \\ 22 & 12 & \infty & 23 & 14 & 19 \\ 25 & 47 & 51 & \infty & 20 & 54 \\ 47 & 43 & 18 & 42 & \infty & 52 \\ 44 & 49 & 50 & 52 & 29 & \infty \end{pmatrix}$$

(Ответ: I47)

П р и м е р 4. Пусть матрица расстояний в задаче коммивояжера имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} \infty & 6 & 5 & 3 \\ 3 & \infty & 4 & 4 \\ 2 & 3 & \infty & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \infty \end{pmatrix}$$

Решаем задачу с помощью алгоритма Литтла [I].

Приведем матрицу, вычитая сначала из строк, затем из столбцов минимальные элементы. Получим матрицу C° :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ C^{\circ}= & \begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & 0^{*} \\ 0 & \infty & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \infty & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Оценка исходного множества циклов будет равна сумме вынесенных элементов - констант приведения: $\varphi(G^{\circ})=10$.

Выбираем 0 в C° так, чтобы сумма θ минимальных, кроме него,коэффициентов его строки и столбца была максимальна:

$$\theta\ (1,4) = 3.$$

Пусть G_1' - множество циклов, включающих переход $1 \to 4$. Такие циклы определяет матрица C_1' :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ C_1'= & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & 0 & \infty \\ \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Так как C_1' приведена, то $\varphi(G^{\circ})=\varphi(G_1')$.

Второе множество G_2^1 - множество циклов, не имеющих перехода $I \to 4$. Ему соответствует матрица C_2^1 :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} I & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \infty & 2 & 2 & \infty \\ 0 & \infty & I & I \\ 0 & 0 & \infty & I \\ I & I & 0 & \infty \end{pmatrix} & \begin{array}{c} I \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$\varphi(G_2^1) = \varphi(G^0) + \theta(1,4) = 13.$

Рассмотрим множество циклов с лучшей оценкой $- G_1^1$. В C_1^1 выбираем 0 с максимальной θ : θ (4,3) = 2.

Пусть G_1^2 - множество циклов, включающих переходы $I \to 4 \to 3$. Ему соответствует приведенная матрица C_1^2 :

$$C_I^2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} I & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array},$$

$$\varphi(G_1^2) = \varphi(G_1^1) \quad = I0.$$

Тогда G_2^2 - множество циклов, содержащих переход $I \to 4$, но не содержащих $4 \to 3$. Ему соответствует матрица C_2^2 :

$$C_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & I \\ 0 & 0 & \infty \\ \infty & I & \infty \end{pmatrix},$$

$\varphi(G_2^2) = \varphi(G_1^1) + \theta(4,3) = 12,$

$G_3^2 = G_2^1 .$

Множество G_1^2 содержит единственный цикл (I,4,3,2), длина которого равна наилучшей оценке. Следовательно, этот цикл является кратчайшим. Схема ветвления решенной задачи показана на рис. I.

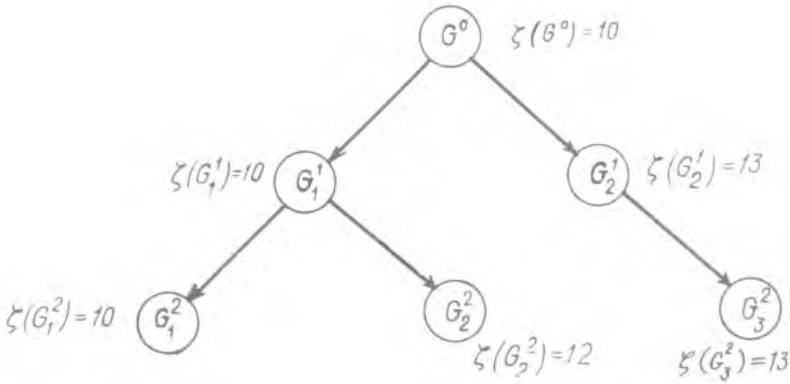


Рис. I

Сведение задач различного типа к задачам ЦЛП

В зависимости от причин, диктующих условия целочисленности переменных, различают задачи с неделимостью и задачи с альтернативными переменными [2].

Задачи с неделимостью

I7. Составить модель задачи по определению оптимального плана производства n типов машин при заданных объемах $a_i\ (i=\overline{1,m})$ ресурсов, норм расхода $a_{ik}\ (i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n})$ i-го ресурса на производство одной k-й машины и величинах $c_k\ (k=\overline{1,n})$ - прибыли при реализации одной машины k-го типа. Предполагается, что к концу планируемого периода не должно быть незавершенного производства.

I8. Имеются суда m типов в количествах $q_i\ (i=\overline{1,m})$, на каждом из которых имеются n грузовых емкостей грузоподъемностью $d_{ik}\ (i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,n})$. Подлежат перевозке p видов грузов в количествах $b_j\ (j=\overline{1,p})$. Составить математическую модель задачи по выбору оптимального состава судов, если затраты на эксплуатацию одного судна i-го типа равны c_i.

4-6606

П р и м е р 5. Имеется n маршрутов, по каждому из которых необходимо совершить b_k рейсов $(k=\overline{1,n})$, и m типов автомашин, каждая из которых может быть использована в течение a_i часов $(i=\overline{1,m})$. На выполнение i -й машиной рейса по k -му маршруту требуется t_{ik} часов при затратах c_{ik} руб. Составить модель для определения оптимального распределения машин по маршрутам.

Введем переменные x_{ik} – число рейсов i -той машины на маршруте k .

Общее время использования i -й машины определится как $\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_{ik}$. Эта величина должна быть не больше a_i. Общее число рейсов по k -му маршруту равно $\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$. Эта величина равна b_k. Суммарные затраты определятся как $\sum_i \sum_k c_{ik} x_{ik}$. Тогда общая постановка задачи будет:

$$\sum_i \sum_k c_{ik} x_{ik} \to \text{мин.},$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_{ik} \leqslant a_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = b_k, \quad k=\overline{1,n},$$

$$x_{ik} \geqslant 0, \quad x_{ik} - \text{целые}.$$

Задачи с альтернативными переменными

19. (Транспортная задача с фиксированными доплатами). В транспортной задаче [3] с ресурсами a_i $(i=\overline{1,m})$, потребностями d_j $(j=\overline{1,n})$ и матрицей затрат $\|c_{ij}\|$ вводится дополнительное условие, согласно которому устанавливается дополнительная оплата за эксплуатацию каждого маршрута $(i-j)$ в размере d_{ij}, если $x_{ij}>0$, и, равная нулю, в противном случае. Составить модель для нахождения оптимального плана перевозок, минимизирующего суммарные затраты.

20. (Задача с логическим условием "либо-либо"). Фабрика может производить n различных продуктов, располагая для этого s видами ресурсов в количестве a_i $(i=\overline{1,s})$. Для производства продуктов могут быть использованы m технологических способов. Заданы величины a^j_{ik} $(i=\overline{1,s},\ k=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m})$, характеризующие нормы

расхода i -го ресурса на единицу k -го продукта при изготовлении его j -м способом, и цены p_k единицы k -го продукта.

Составить модель задачи по определению оптимального набора продуктов и способов их производства из условия максимизации товарной продукции при дополнительном условии, согласно которому любой k -й продукт либо должен производиться в количестве не меньшем d_k, либо совсем не производиться.

21. (Задача с невыпуклыми областями). Привести к целочисленной задачу максимизации $z = x_1 + x_2$ в области, заданной двумя многогранниками:

$$1.\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 24, \quad x_1 \geqslant 5, \quad x_2 \geqslant 0;$$

$$2.\ x_1 + 2x_2 \leqslant 16, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

22. (Задача на конечном множестве). Свести задачу поиска линейной формы $x_1 + 2x_2 - x_3$ при условиях:

$$x_1 + x_2 \leqslant 5,$$
$$x_1 + x_3 \geqslant 3,$$
$$x_1 \in \{1,5;\ 3,3;\ 4,5\},\ x_2 \in \{0,3;\ 2,1;\ 1,5\},$$
$$x_3 \in \{0,9;\ 1,5;\ 0,3\}$$ к задаче ЦЛП.

Пример 6. Дана задача на конечном множестве:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{мин},$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \in A_j, \quad A_j = \{\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jk}\}. \qquad (5)$$

Введем переменные $y_{je} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$. Потребуем, чтобы $\sum_{e=1}^{k} y_{je} = 1$. Тогда $x_j = \sum_{e=1}^{k} \alpha_{je} y_{je}$.

Подставив значения x_j в условия (5), получим

$$\sum_j \sum_e c_j \alpha_{je} y_{je} \to \text{мин},$$

$$\sum_j \sum_e a_{ij} \alpha_{je} y_{je} = b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$0 \leqslant y_{je} \leqslant 1, \quad y_{je} - \text{целые}, \quad j = \overline{1,n}; \quad e = \overline{1,k}.$$

Методы последовательного анализа вариантов

Для решения задачи дискретного программирования на конечных множествах используются комбинаторные методы последовательного анализа вариантов [4], в частности аддитивный алгоритм Балаша [I].

Задачи псевдобулева программирования

23. $-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \to$ макс.,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\leqslant 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &\leqslant 6, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &\leqslant -2, \end{aligned} \qquad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}.$$

(Ответ: 2)

24. $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to$ макс.,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &\leqslant 1, \\ x_1 + x_2 \qquad - x_4 &\leqslant 0, \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 &\leqslant 3, \end{aligned} \qquad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}.$$

(Ответ: 4)

25. $x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \to$ макс.,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &\leqslant -3, \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_4 &\leqslant 12, \\ x_2 + x_3 \qquad &\leqslant 1, \end{aligned} \qquad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}.$$

(Ответ: 3)

26. $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to$ макс.,

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 &\leqslant 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqslant 4, \\ - x_2 - 3x_3 + x_4 &\leqslant 0, \end{aligned} \qquad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases} \quad i = \overline{1,4}.$$

(Ответ: 2)

П р и м е р 7. Дана задача псевдобулева программирования:

$$z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to мин., \qquad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = \overline{1,3}.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 2,$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 3,$$

а). Для того чтобы решить эту задачу с помощью аддитивного алгоритма [I], сделаем замену переменных:

$$t_1 = x_1, \quad t_2 = 1 - x_2, \quad t_3 = x_3$$

и перейдем от неравенств к равенствам:

$$z = -1 + t_1 + t_2 + 2t_3 \to мин, \qquad t_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = \overline{1,3},$$

$$y_1 = -1 + (t_1 - t_2 + t_3),$$

$$y_2 = -4 + (3t_1 + t_2 + 4t_3), \qquad y_1, y_2 \geq 0.$$

В качестве начального пробного плана возьмем T = (0,0,0). При этом линейная форма принимает наименьшее значение, но y_1 и y_2 отрицательны. Положим t_3 = I. Так как сумма коэффициентов при t_3 в строках с отрицательными y_i максимальна, этот план с $t_1 = t_2 = 0$ достраивается до допустимого плана T = (0,0,I), z =I, y_1 =0, y_2 = 0.

Значение рекорда для T равно I.

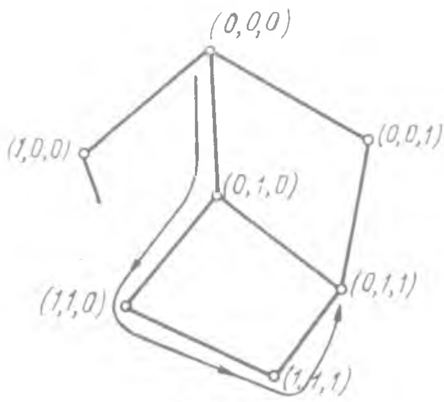
Вернемся к исходному пробному плану.

Полагаем t_1 = I. Так как $y_2 < 0$, то частичный план с t_1 =I не достраивается до плана со значением z, которое лучше рекорда; для частичного плана с t_2 = I имеют место аналогичные условия.

Следовательно, план T = (0,0,I) оптимальный:

$$X_I = 0, \quad X_2 = I, \; X_3 = I, \qquad z = I.$$

б). Решим эту задачу методом Лемке-Шпильберга [5]. Исходный план - X = (0,0,0) Он не является допустимым: по критерию предпочтительной переменной (КПП) перейдем по дереву решений (рис. 2) к вершине (0,I,0) (коэффициент при X_2 отрицателен). План (0,I,0) не



Р и с. 2

является допустимым. необходимо увеличение X_I или X_2. По КПП переходим к плану X = (I,I,0), так как он удовлетворяет первому ограничению и коэффициент в Z при X_I меньше, чем при X_3. Поскольку план X=(I,I,0) не является допустимым, переходим к X=(I,I,I). От X==(I,I,I) переходим к допустимому плану X=(0,I,I) с меньшим значением Z .План X=(0,I,I) является оптимальным, так как вершин верхнего уровня с меньшим значением Z , в которых еще остались не проанализированные переходы, нет.

П. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сетевое планирование - раздел исследования операций, в котором рассматривается решение задач управления техническими и организационными системами. В основе моделей сетевого планирования лежит ориентированный ациклический граф-сеть. Большинство задач этого раздела - задачи на сетях.

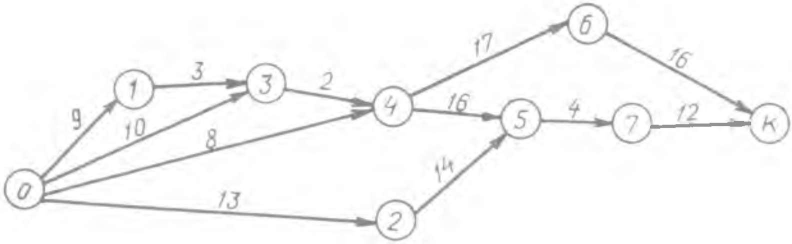
Задача поиска критического пути в сетевом графике

27. Найти критический путь для сети,изображенной на рис.3. (Ответ:47).

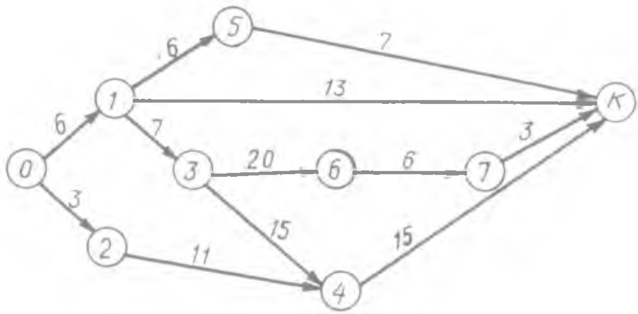
28. Найти критический путь для сети, представленной на рис.4 (Ответ: 43).

П р и м е р 8. а) Рассчитаем все временные характеристики сетевого графика просчетами с начала и с конца [6].

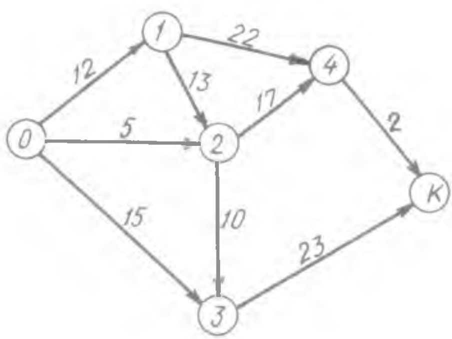
Просчет с начала:



Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

$$T_0^р = T_0^п = 0, \quad T_{рн}(0,1) = T_0^р, \quad T_{рн}(0,2) = T_{рн}(0,3),$$

$$T_{рк}(0,1) = T_{рн}(0,1) + t_{0,1} = 12, \text{ аналогично } T_{рк}(0,2) = 5, \ T_{рк}(0,3) = 15,$$

$$T_1^р = \max_j T_{рк}(j,1) = T_{рк}(0,1) = 12,$$

$$T_{рн}(1,2) = T_1^р = 12, \quad T_{рк}(1,2) = T_{рн}(1,2) + t_{12} = 25,$$

$$T_2^р - \max_j T_{рк}(j,2) = T_{рк}(1,2) = 25; \quad T_{рн}(2,3) = T_2^р = 25.$$

Рассчитывая аналогично, получим:

$T_3^р = 35,$	$T_{рн}(2,4) = 12,$	$T_{рк}(2,3) = 35,$
$T_4^р = 42,$	$T_{рн}(2,4) = 25,$	$T_{рк}(1,4) = 34,$
$T_к^р = 58,$	$T_{рн}(3,к) = 35,$	$T_{рк}(2,4) = 42,$
	$T_{рн}(4,к) = 42,$	$T_{рк}(3,к) = 58,$
		$T_{рк}(4,к) = 44.$

Просчет с конца:

$$T_к^п = T_к^р = 58, \quad T_{пк}(3,к) = T_{пк}(4,к) = T_к^п = 58,$$

$$T_{пн}(3,к) = T_{пк}(3,к) - t_{3к} = 35, \quad T_{пн}(4,к) = T_{пк}(4,к) - t_{4к} = 56,$$

$$T_4^п = \min_i T_{пн}(4,i) = T_{пн}(4,к) = 56, \quad T_3^п = 35.$$

Рассчитывая аналогично, получим:

$T_2^п = 25,$	$T_{пк}(2,3) = 35,$	$T_{пн}(2,3) = 25,$
$T_1^п = 12,$	$T_{пк}(2,4) = 56,$	$T_{пн}(2,4) = 39,$
	$T_{пк}(1,4) = 56,$	$T_{пн}(1,4) = 34,$
	$T_{пк}(1,2) = 25,$	$T_{пн}(1,2) = 12,$
	$T_{пк}(2,3) = 35,$	$T_{пн}(2,3) = 25,$
	$T_{пк}(0,1) = 12,$	$T_{пн}(0,1) = 0,$
	$T_{пк}(0,2) = 25,$	$T_{пн}(0,2) = 20,$
	$T_{пк}(0,3) = 35,$	$T_{пн}(0,3) = 20.$

Операции, соединяющие вершины с одинаковым ранним и поздним временем, - операции критического пути: $0 - 1 - 2 - 3 - к$

Обозначения: T_i^p T_i^n -раннее и позднее время наступления i -го события;

$T_{рн}(i,j)$, $T_{рк}(i,j)$ - ранние времена начала и конца операции $i-j$;

$T_{пн}(i,j)$, $T_{пк}(i,j)$ - поздние времена начала и конца операции $i-j$.

б). Сформулируем задачу поиска критического пути как задачу линейного программирования. Для этого будем считать, что единичный поток входит в нулевой узел, а выходит из конечного. Пусть y_{ij} - поток по ребру $i-j$.

Тогда условие баланса задает ограничения на потоки для сети (см.рис.5):

$$\begin{aligned}
&y_{01}+y_{02}+y_{03}=1,\\
&y_{01}=y_{14}+y_{12},\\
&y_{02}+y_{12}=y_{23}+y_{24},\\
&y_{03}+y_{23}=y_{3к},\\
&y_{14}+y_{24}=y_{4к},\\
&y_{3к}+y_{4к}=1.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Если потребовать $\sum\limits_{ij} t_{ij}\, y_{ij} \to макс$, то поток распределится по критическим путям. Таким образом,максимизация формы

$$12y_{01}+5y_{02}+15y_{03}+13y_{12}+10y_{23}+22y_{14}+17y_{24}+23y_{3к}+2y_{4к}$$

при ограничениях (6) формулирует задачу поиска критического пути как задачу линейного программирования.

Задача составления календарного плана операции при ограничениях на ресурсы

29. Для 20 единиц ресурса, которым организация располагает в каждый момент времени, сетевого графика из задачи 27 и потребностей работ в ресурсах (в каждый момент времени), заданных табл.8, составить оптимальный по времени календарный план выполнения работ.

Т а б л и ц а 8

Номер работы	0-I	0-2	0-3	0-4	I-3	2-5	3-4	4-5	4-6	5-7	6-к	7-к
Ресурс	5	3	6	8	2	4	IO	7	3	2	8	IO

30. Для 5 единиц первого ресурса и IO единиц второго ресурса, которыми располагает организация в каждый момент времени, сетевого графика из задачи 28 и потребностей в ресурсах (в каждый момент времени), заданных табл. 9, составить оптимальный по времени календарный план выполнения работ.

Т а б л и ц а 9

Номер работы	0-I	0-2	I-3	I-5	I-к	2-4	3-4	3-6	4-к	5-к	6-7	7-к
Ресурс 1	5	2	3	2	3	4	2	I	I	3	4	I
Ресурс 2	I	8	3	5	4	2	6	2	4	2	5	3

П р и м е р 9. Для сети, представленной на рис. 5, и потребностей работ в ресурсах, которые постоянны в течение времени выполнения работы $i-j$ и заданы табл. IO, составить календарный план минимальной длительности. В каждый момент времени имеем 5 единиц ресурса I и 3 единицы ресурса 2.

Т а б л и ц а IO

Номер работы	0-I	0-2	0-3	I-2	I-4	2-3	2-4	3-к	4-к
Ресурс I	2	3	4	2	I	I	I	2	3
Ресурс 2	I	I	2	2	I	2	2	I	2

Решим эту задачу, используя субоптимальный алгоритм Брукса [6]. Вычислим ДМОЧ работ, воспользовавшись временами, рассчитанными в примере 8:

ДМОЧ (0,I) = $T^{p}_{к}$ − $T_{пн}$ (0,I) = 58−0=58, ДМОЧ (0,2) = 38,

ДМОЧ (0,3) = 38. ДМОЧ(I,2) = 46, ДМОЧ(I,4)=24,

ДМОЧ (2,3)=33, ДМОЧ (2,4)=I9, ДМОЧ(3,к)=23, ДМОЧ (4,к)=2.

Расположим работы в табл. II в порядке убывания ДМОЧ

Т а б л и ц а II

Номер работы	0-I	I-2	0-2	0-3	2-3	I-4	3-к	2-4	4-к
ДМОЧ	58	46	38	38	33	24	23	I9	2
Длительность	I2	I3	5	I5	I0	22	23	I7	2
Потребный ресурс I	2	2	3	4	I	I	2	I	3
Потребный ресурс 2	I	2	I	2	2	I	I	2	2
Время начала работы	0	I2	0	25	40	I2	50	50	67
Текущее время t	0	5	I2	25	34	40	50	67	
Располагаемый ресурс в момент t	5/3 0	3	5/3 2	4/0	I	5/4	5/3 2	3/0	
То же для ресурса 2	3/2 I	2	3/I I	2/0	I	3/I	3/2 0	2/0	
Допустимый набор	0-I 0-2 0-3	0-3	0-3 I-2 I-4	0-3 2-3 2-4	2-3 2-4	2-3 2-4	3-к 2-4	4-к	

В начальный момент времени (текущее время t =0) могут начаться работы 0-I, 0-2, 0-3 (строка I0 табл. II). Выбираем из них работу с наибольшей ДМОЧ. Корректируем располагаемые ресурсы (строки 8,9 табл.II). Вносим в строку 6 (табл.II) время начала работы 0-I. По оставшимся ресурсам проходит работа 0-2. Вносим в эту строку время начала работы 0-2, равное текущему времени. Корректируем ресурсы (третьи числа в 8-й и 9-й строках таблицы).

До момента t = 5 (окончание работы 0-2) ресурс I отсутствует. Вносим в столбец 3 новое текущее время. При t = 5 допустимый набор состоит из работы 0-3, так как работы, предшествующие остальным, еще не закончились. Работа 0-3 не проходит по ресурсу I.

При t = I2 (окончание работы 0-I) ресурсы полностью высвобождаются. Допустимый набор (строка I0) содержит работы 0-3, I-2, I-4. Из них наибольшую ДМОЧ имеет работа I-2. Считаем текущее время временем ее начала. Корректируем ресурсы. По оставшимся ресурсам из допустимого набора проходит только работа I-4. Начинаем ее также при t = I2. Корректируем ресурсы.

Следующий момент времени t = 25. Допустимый набор-0-3,2-3, 2-4. Поступаем аналогично и находим остальные времена начала работ.

Задачи обмена стоимости на время

3I. Для операции, заданной сетевым графиком из задачи 27, провести сокращение общей длительности на 7 единиц при минимальных дополнительных затратах, используя данные табл. I2 (Δc_i - затраты на Δt_i единиц сокращения длительности работы на i -том шаге).

Т а б л и ц а I2

Номер работы	Δt_1	Δc_1	Δt_2	Δc_2
0 - I	2	2	I	2
0 - 2	I	2	-	-
0 - 3	3	2	2	2
0 - 4	2	I	I	I
I - 3	I	3	-	-
2 - 5	2	I	3	2
3 - 4	-	-	-	-
4 - 5	2	3	I	2
4 - 6	3	4	2	3
5 - 7	I	2	-	-
6 - К	3	2	2	I
7 - К	2	3	I	3

32. Для операции, заданной сетевым графиком задачи 28, провести сокращение общей длительности на 5 единиц при минимизации дополнительных затрат. Необходимые данные представлены в табл.13. Обозначения такие же, как и в предыдущей задаче.

Таблица 13

Номер работы	Δt_1	Δc_1	Δt_2	Δc_2
0 - 1	2	1	1	1
0 - 2	1	3	-	-
1 - 3	2	1	1	2
1 - 5	1	3	-	-
1 - к	-	-	-	-
2 - 4	2	5	-	-
3 - 4	3	1	2	1
3 - 6	5	2	3	2
4 - к	3	2	2	2
5 - к	2	3	-	-
6 - 7	2	2	1	2
7 - к	1	3	-	-

Пример 10. Для операции, заданной сетевым графиком (рис. 5), сократить время выполнения на 18 единиц при минимальных затратах, пользуясь данными, приведенными в табл. 14.

Таблица 14

Номер работы	Δt_1	Δc_1	Δt_2	Δc_2
0 - 1	3	2	5	7
0 - 2	1	2	-	-
0 - 3	2	3	3	5
1 - 2	4	2	6	8
1 - 4	10	5	5	10
2- 3	3	2	3	3
2 - 4	1	2	-	-
3 - к	5	6	5	5
4 - к	-	-	-	-

а). На основании решения примера 8 критический путь задается цепочкой событий – 0-I-2-3-κ. Длительность его ($T_{\kappa n}$) равна 58.

Среди всех работ критического пути выбираем работу с минимальным отношением $\frac{\Delta c_1}{\Delta t_1}$. Это – работа I-2. Эффективность обмена для нее равна $\frac{\Delta c_1(1,2)}{\Delta t_1(1,2)} = \frac{1}{2}$. Обмениваем 4 единицы длительности на 2 единицы стоимости. Получаем новую длительность работы I-2: t'_{12}=I3-4=9, $T'_{\kappa n}$ =54. Критический путь не изменился. Выбираем наиболее экономичный обмен: 3 единицы длительности работы 0-I на 2 единицы стоимости – $\frac{\Delta c_1(0,1)}{\Delta t_1(0,1)} = \frac{2}{3}$, t'_{01} =I2-3=9, $T_{\kappa n}$ =5I. Критический путь тот же.

Поступая аналогично, обмениваем 3 единицы времени работы 2-3 (t'_{23} = I0-3=7, $T_{\kappa n}$ = 48) на 2 единицы стоимости. Среди всех оставшихся обменов наиболее экономичен обмен трех единиц времени работы 2-3 на 3 единицы стоимости:

$$t^2_{23} = 7 - 3 = 4, \quad T_{\kappa n} = 45.$$

На последнем этапе обмениваем 5 единиц работы 3-κ на 6 единиц стоимости: $t_{3\kappa}$ = 23-5=I8, $T_{\kappa n}$ = 40.

Суммарные затраты составили: $\sum \Delta c = \Delta c_1(1,2) + \Delta c_1(0,1) +$

$$+ \Delta c_1(2,3) + \Delta c_2(2,3) + \Delta c_1(3,\kappa) = 2 + 2 + 2 + 3 + 6 = 15.$$

б). Сформулируем задачу обмена стоимости на время как задачу ЦЛП. Длительность t_{ij} каждой работы может принимать дискретные значения:

$$\tilde{t}_{ij} \in \left\{ t_{ij},\ t_{ij} - \Delta t_1(i,j),\ t_{ij} - \Delta t_1(i,j) - \Delta t_2(i,j) \right\}$$

при соответствующих дополнительных затратах

$$\tilde{c}_{ij} \in \left\{ 0,\ \Delta c_1(i,j),\ \Delta c_1(i,j) + \Delta c_2(i,j) \right\}.$$

Для учета связей сетевого графика необходимо наложить ограничения – $T_{pH}(i,j) + t_{ij} \leqslant T_{pH}(j,e), j=0,1,..,\kappa$. Эти ограничения связывают работы, заканчивающиеся или начинающиеся событием j.

Поступая, как в примере 6, введем переменные $y^e_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ и запишем ограничения $\sum_{e=1}^{3} y^e_{ij} = 1 \ \forall_{i,j}$.

Тогда задача обмена стоимости на время для данных табл. I4 запишется в виде:

$$t_{01} = 12y_{01}^1 + 9y_{01}^2 + 4y_{01}^3,$$
$$\sum_{k=1}^{3} y_{01}^k = 1,$$
$$c_{01} = 2y_{01}^2 + 7y_{01}^3;$$
$$t_{02} = 5y_{02}^1 + 4y_{02}^2,$$
$$c_{02} = 2y_{02}^2,$$
$$y_{02}^1 + y_{02}^2 = 1;$$
$$t_{03} = 15y_{03}^1 + 13y_{03}^2 + 10y_{03}^3,$$
$$c_{03} = 3y_{03}^2 + 5y_{03}^3,$$
$$\sum_{k=1}^{3} y_{03}^k = 1;$$
$$\vdots$$
$$t_{3k} = 23y_{3k}^1 + 18y_{3k}^2 + 13y_{3k}^3,$$
$$c_{3k} = 0y_{3k}^2 + 11y_{3k}^3,$$
$$\sum_{j=1}^{3} y_{3k}^j = 1,$$
$$t_{4k} = 2,$$

$$T_{рн}(0,1) = T_{рн}(0,2) = T_{рн}(0,3) = 0,$$
$$T_{рн}(0,1) + t_{01} \leqslant T_{рн}(1,2),$$
$$T_{рн}(0,1) + t_{01} \leqslant T_{рн}(1,4),$$
$$T_{рн}(0,2) + t_{02} \leqslant T_{рн}(2,3),$$
$$T_{рн}(1,2) + t_{12} \leqslant T_{рн}(2,3),$$
$$T_{рн}(0,2) + t_{02} \leqslant T_{рн}(2,4),$$
$$T_{рн}(1,2) + t_{12} \leqslant T_{рн}(2,4),$$
$$\vdots$$
$$T_{рн}(4,k) + t_{4k} \leqslant 40,$$
$$T_{рн}(3,k) + t_{3k} \leqslant 40.$$

$$c_{01} + c_{02} + c_{03} + c_{12} + c_{14} + c_{23} + c_{24} + c_{3k} \to мин.$$

Ш. МАТРИЧНЫЕ И БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Матричные и биматричные игры - модель конфликтных ситуаций двух лиц с конечным числом альтернатив их поведения. Матричные игры соответствуют ситуациям, когда выигрыш одного равен проигрышу другого. Когда выигрыши и проигрыши участников конфликта не равны между собой, применяются биматричные модели.

Найти оптимальные стратегии игроков в антагонистических играх, заданных матрицами:

33. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

34. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,

35 $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 9 & 6 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 8 & 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

38. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

39. $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

П р и м е р II. Найти решение матричной игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

а) Так как $\text{макс}\,\text{мин}\, a_{ij} \neq \text{мин}\,\text{макс}\, a_{ij}$, то матрица не имеет седловой точки [7]. Поэтому решение будем искать в смешанных стратегиях.

Используя соотношение превосходства [7], сведем исходную игру к игре с матрицей

$$\begin{array}{c} \\ I \\ II \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array},$$

так как третью строку строго превосходит линейная комбинация первых двух строк с коэффициентами 0,5.

Решим полученную игру, используя свойства оптимальных стратегий [7]:

$$
\begin{aligned}
&E(i, Y^*) \leqslant v, \quad i = 1,2; \\
&E(X^*, j) \geqslant v, \quad j = \overline{1,5},
\end{aligned} \qquad (7)
$$

где E – математическое ожидание выигрыша,

v – цена игры.

Добавив к (7) условия

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 1;$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

где y_i и x_i – i -е компоненты оптимальных стратегий, получим для рассматриваемой игры систему:

$$
\begin{aligned}
&5y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + y_5 \leqslant v, \\
&y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 5y_5 \leqslant v, \\
&5x_1 + x_2 \geqslant v, \\
&2x_1 + 4x_2 \geqslant v, \\
&3x_1 + 3x_2 \geqslant v, \\
&4x_1 + 2x_2 \geqslant v, \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 1, \\
&x_1 + 5x_2 \geqslant v, \qquad x_1 + x_2 = 1.
\end{aligned} \qquad (8)
$$

Предположим: $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, $y_3 = y_4 = y_5 = 0$,

тогда система (8) превратится в систему:

$$
\begin{aligned}
&5y_1 + 2y_2 = v, \\
&y_1 + 4y_2 = v, \\
&5x_1 + x_2 = v, \\
&2x_2 + 4x_2 = v, \\
&y_1 + y_2 = 1, \\
&x_1 + x_2 = 1, \\
&3x_1 + 3x_2 \geqslant v, \\
&4x_1 + 2x_2 \geqslant v, \\
&x_1 + 5x_2 \geqslant v.
\end{aligned} \qquad (9)
$$

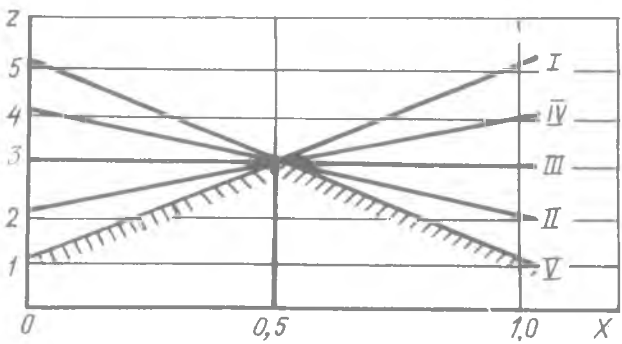
Из первых пяти равенств системы (9) находим $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{2}{3}$, $v = 3$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Пятое равенство в (9) и все неравенства выполняются, значит, найденное решение является оптимальным.

Для исходной задачи с учетом вычеркнутой строки

$$X^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \rangle, \quad Y^* = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0 \rangle.$$

б) Поскольку игра сведена к игре 2x5, то ее можно решить графически. Построим $z_j = E(x, j) \geq v$ (рис. 6).

Из рис. 6 видно, что $v = 3$, $x = x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.



Р и с. 6

В качестве решения для второго игрока можно выбрать чистую стратегию 3, так как при этом выигрыш игрока 2 не зависит от стратегии первого игрока и равен цене игры.

в) Найдем все решения игры. Для этого нам достаточно найти все крайние точки множества решений [7], которые соответствуют подматрицам B_i матрицы игры.

Выделим B_I:

$$B_1 = \begin{array}{c|cc|c} & I & II & \\ \hline & 5 & 2 & I \\ & 1 & 4 & II \end{array}, \quad \dot{X} = \frac{(adj\, B_1) J_2}{J_2'(adj\, B_1) J_2} = \frac{\begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix}} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$\dot{Y} = \frac{(adj\, B_1)' J_2}{J_2'(adj\, B_1) J_2} = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle, \quad v = \frac{|B_1|}{J_2'(adj\, B_1) J_2} = 3,$$

$X_1^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $Y_1^* = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0 \rangle$. Эти векторы удовлетворяют свойствам оптимальных стратегий. Выделим B_2:

$$B_2 = \begin{array}{c c} \mathrm{I} & \mathrm{III} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}, \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle 0, 1 \rangle,$$

$X_2^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $Y_2^* = \langle 0, 0, 1, 0, 0 \rangle$.

Подматрица B_3 не соответствует никакому решению, так как $\dot{Y}$ содержит отрицательную компоненту:

$$B_3 = \begin{array}{c c} \mathrm{I} & \mathrm{IV} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}$$

Выделим остальные подматрицы:

$$B_4 = \begin{array}{c c} \mathrm{I} & \mathrm{V} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array} \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$X_3^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad Y_3^* = \langle \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \rangle;$$

$$B_5 = \begin{array}{c c} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array} \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle 0, 1 \rangle, \quad Y_4^* = Y_2^*;$$

$$B_6 = \begin{array}{c c} \mathrm{II} & \mathrm{IV} \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{array} \right\|} \end{array}, \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle,$$

$$X_5^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad Y_5^* = \langle 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \rangle:$$

$$B_7 = \begin{array}{c c} \mathrm{II} & \mathrm{V} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}$$ (B_7 не соответствует никакому решению);

$$B_8 = \begin{array}{c c} \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}, \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle 1, 0 \rangle, \quad Y_6^* = Y_2^*;$$

$$B_9 = \begin{array}{c c} \mathrm{III} & \mathrm{V} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array}, \quad Y_7^* = Y_2^*;$$

$$B_{10} = \begin{array}{c c} \mathrm{IV} & \mathrm{V} & \\ \multicolumn{2}{c}{\left\| \begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{array} \right\|} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \end{array} \quad \dot{X} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad \dot{Y} = \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle,$$

$$X_8^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle, \quad Y_8^* = \langle 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle.$$

Итак, для первого игрока в исходной задаче существует единственная стратегия $X^* = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \rangle$, для второго – бесчисленное множество стратегий:

$$Y^* = \alpha_1 Y_1^* + \alpha_2 Y_2^* + \alpha_3 Y_3^* + \alpha_4 Y_5^* + \alpha_5 Y_8^*,$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}, \qquad \sum_{i=1}^{5} \alpha_i = 1.$$

Используя приближенный способ, найти цену игры.

41. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 42. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 43. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

П р и м е р 12. Решить приближенно игру с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть первая итерация-партия начинается с выбора игроком I стратегии α_1. В табл. 15 приведены результаты первых четырех итераций-партий.

Т а б л и ц а 15

k	$\alpha_i(k)$	$\mu\beta_1(k)$	$\mu\beta_2(k)$	$\nu_1(k)$	$\beta_i(k)$	$\mu\alpha_1(k)$	$\mu\alpha_2(k)$	$\nu_2(k)$
1	α_1	$\underline{2}$	4	2	β_1	2	$\underline{3}$	3
2	α_2	$\underline{5}$	5	2,5	β_1	4	$\underline{6}$	3
3	α_2	8	$\underline{6}$		β_2	$\underline{8}$	7	2,66
4	α_1	$\underline{10}$	10	2,5	β_1	$\underline{10}$	10	2,5

Введены обозначения:

k – номер итерации-партии,

$\alpha_i(k)$ – чистая стратегия игрока I в k-й итерации-партии,

$\mu\beta_i(k)$ – суммарный выигрыш игрока I за k итераций-партий при выборе игроком II стратегии β_i,

$\nu_1(k)$- оценка снизу для цены игры,
$\beta_i(k)$- чистая стратегия игрока П в k - й итерации,
$\mu\alpha_i(k)$- суммарный выигрыш игрока I за k итераций при выборе им стратегии x_i ,
$\nu_2(k)$- оценка сверху для цены игры.

Некооперативные игры

Решить следующие игры как некооперативные:

45. $\begin{pmatrix} (2,1) & (3,1) & (4,1) \\ (3,2) & (3,2) & (4,2) \\ (3,1) & (4,0) & (3,0) \end{pmatrix}$,

46. $\begin{pmatrix} (1,4) & (2,3) & (3,2) \\ (2,5) & (4,1) & (2,2) \\ (3,6) & (4,5) & (3,2) \end{pmatrix}$,

47. $\begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (-1,1) \\ (2,2) & (2,1) & (3,0) \\ (4,4) & (3,2) & (2,0) \end{pmatrix}$,

48. $\begin{pmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (2,2) & (3,3) & (1,1) \\ (4,4) & (2,2) & (0,0) \end{pmatrix}$.

П р и м е р 13. Решить некооперативную игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) \\ (3,3) & (1,1) \end{pmatrix}$$

Пары стратегий (П, I) и (I,П) являются уравновешенными [7], но не взаимозаменимыми, поэтому игра не разрешима в смысле Нэша. Так как пара П,I совместно доминирует над парой I,П, то игра разрешима в строгом смысле.

Кооперативные игры

Решить следующие игры как кооперативные:

49. $\begin{pmatrix} (1,4) & (2,3) & (3,2) \\ (0,3) & (1,4) & (3,1) \\ (-1,2) & (5,6) & (7,0) \end{pmatrix}$

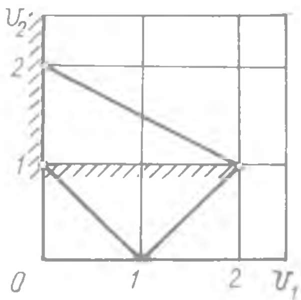
50. $\begin{pmatrix} (5,5) & (4,7) & (3,6) \\ (-1,3) & (2,4) & (3,-1) \\ (0,4) & (5,3) & (2,0) \end{pmatrix}$

51 $\begin{pmatrix} (2,0) & (0,2) & (2,3) \\ (3,-1) & (1,5) & (-1,6) \\ (4,-1) & (2,3) & (4,4) \end{pmatrix}$, 52. $\begin{pmatrix} (1,3) & (0,4) & (1,4) \\ (1,2) & (1,3) & (1,2) \\ (0,2) & (0,2) & (2,3) \end{pmatrix}$.

П р и м е р 14. Решить кооперативную игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (2,1) & (0,2) \end{pmatrix}$$

Построим выпуклую оболочку множества платежей игроков (рис. 7)



Р и с. 7

Множество Парето платежей – линия, соединяющая точки (2,1) и (0,2). Выделим из него переговорное множество, для этого найдем минимаксные платежи каждого игрока. Для игрока I матрица условной антагонистической игры имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Она имеет 2 седловые точки, минимаксный платеж первого игрока равен 0. Аналогично определяется равный 1 минимаксный платеж второго игрока по матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Таким образом, точка минимаксных платежей на рис. 7 соответствует точке (0,1), следовательно, переговорное множество есть множество Парето без точек (0,2), (2,1). Переговорное множество – решение кооперативной игры.

IV. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ

Непрерывные игры – модель конфликтных ситуаций двух лиц с бесчисленным множеством стратегий поведения.

53. Задача защиты двух объектов.

X – мощь нападения,

Y – мощь защиты,

μ – количество единиц мощи нападения, уничтожаемых единицей мощи защиты.

Объект считается захваченным, если мощь нападения, направленная на него, превосходит увеличенную в r раз мощь защиты на этом объекте. X и Y делятся на оба объекта в любом отношении. Найти оптимальные стратегии защиты и нападения.
Указания: сформулировать игру как непрерывную с критерием, учитывающим оставшуюся мощь нападения:

а) X = I0, $Y = 8$, $r = 2$,

б) X = I0, $Y = 6$, $r = 3$.

П р и м е р I5. Пусть непрерывная игра задана платежной функцией

$$M(x,y)=((1+x)(1+y))/(1+xy)^2.$$

Проверим, что решение этой игры имеет вид:

$$v=1/\ln 2,\quad F^*(x)=1/(\ln 2(1+x)),\quad G^*(y)=1/(\ln 2(1+y)).$$

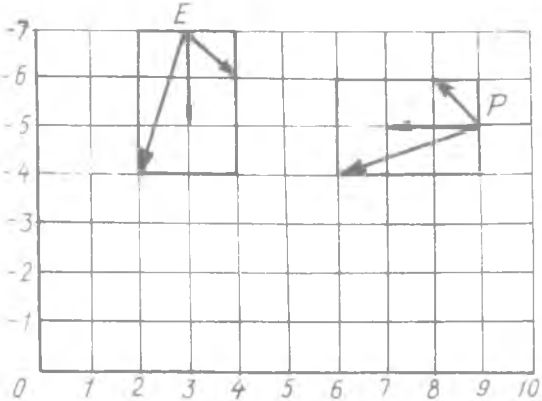
Для оптимальных стратегий G^* и F^* [7] должно выполняться соотношение:

$$\forall x\,\forall y \int_0^1 M(x,y)\,G^*(y)\,dy \leq v \leq \int_0^1 M(x,y)\,F^*(x)\,dx.$$

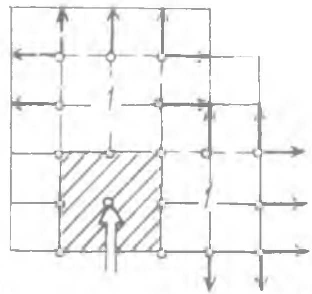
Действительно,

$$\int_0^1 \frac{(1+x)(1+y)}{(1+xy)^2}\,\frac{1}{\ln 2(1+y)}\,dy=\frac{1}{\ln 2}\quad \forall x;$$

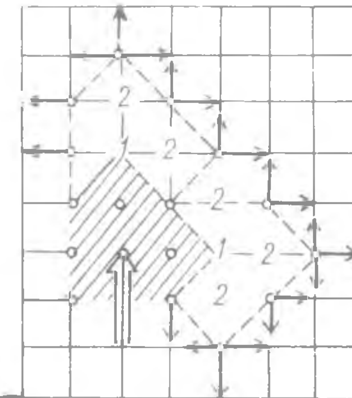
$$\int_0^1 \frac{(1+x)(1+y)}{(1+xy)^2}\,\frac{1}{\ln 2(1+x)}\,dx=\frac{1}{\ln 2}\quad \forall y.$$



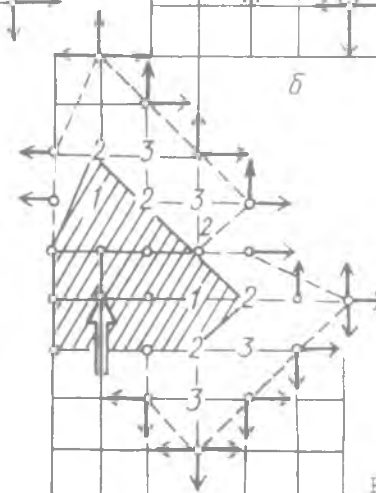
Р и с. 8



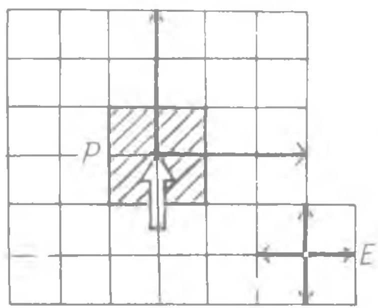
а



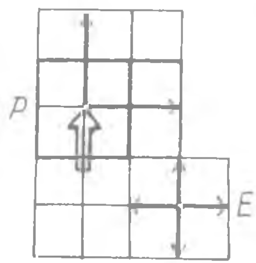
б



в



Р и с. 9



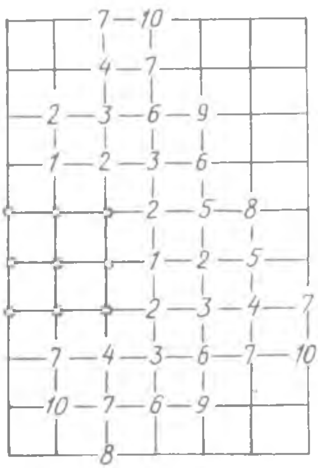
Р и с. 10

Р и с. 11

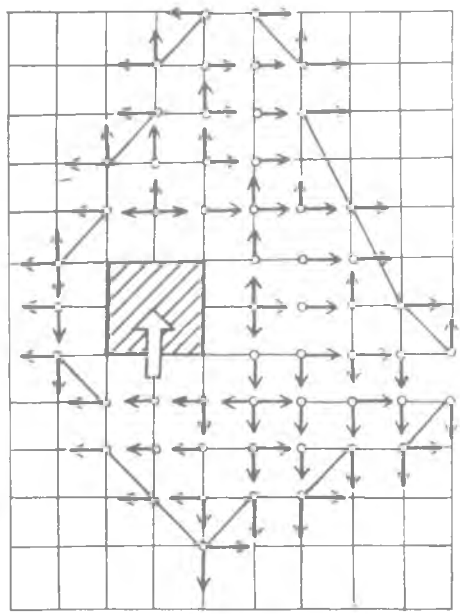
У. ДИСКРЕТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

54. Решить антагонистическую игру на уничтожение. Терминальная поверхность - оси координат. На них нанесены значения платежей для игрока Е . Вектограммы игроков приведены на рис. 8.

55. Решить игру преследования. Вектограммы и область захвата приведены на рис. 9.



Р и с. I2,а



Р и с. I2,б

П р и м е р I6. Рассмотрим игру преследования с вектограммами, заданными на рис. I0, в редуцированном пространстве, приведенном к центру Р. На рис. II,а показаны точки редуцированного пространства, попадающие на терминальную поверхность за один полный ход (сначала ходит Е, потом Р), на рис. II,б - за 2 полных хода, на рис. II,в - за 3 полных хода.

Результат решения приведен на рис. I2 (линией выделен барьер Е).

Л и т е р а т у р а

1. К о р б у т А.А., Ф и н к е л ь ш т е й н Ю.Ю. Дискретное программирование. М.: Наука, 1969.

2. К а л и х м а н И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высшая школа, 1975.

3. З а й ч е н к о Ю.П. Исследование операций. Киев.:Вища школа, 1975.

4. К о в а л е в М.М. Дискретная оптимизация. Минск. Изд-во БГУ, 1977.

5. К о ф м а н А., А н р и - Л а б о р д е р А. Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1977.

6. М о д е р Дж., Ф и л л и п с С. Метод сетевого планирования в организации работ (ПЕРТ). Л.: Энергия, 1966.

7. М а к - К и н с и Дж. Введение в теорию игр. М.: Физ-мат. лит., 1960.

Сергей Митрофанович Д у б и н а

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Учебное задание

Редактор Э. Г р я з н о в а
Техн.редактор Н. К а л е н ю к
Корректор С. Р у б а н

Подписано к печати 20.10.80 г. Формат 60x84 I/16.
Бумага оберточная белая. Оперативная печать. Усл.п.л. 2,3.
Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 400 экз. Заказ № 6606
Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. С.П.Королева, г.Куйбышев,
ул. Молодогвардейская, I5I.

Областная типография им. В.П.Мяги, г. Куйбышев,
ул. Венцека, 60.