

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР**

**Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королёва**

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**

Куйбышев 1986

ЦЕЛЬ РАБОТЫ- изучение колебаний пластин, расчета собственной частоты колебаний.

ЗАДАНИЯ:

1. Изучить расчетную модель пластины.
2. Изучить точный метод определения параметров колебания пластин, параметры колебаний.
3. Освоить расчет собственной частоты колебаний пластины применительно к конструкциям РЭА.
4. Освоить экспериментальный метод определения собственной частоты колебаний пластины.
5. Оценить погрешность расчетного метода определения собственной частоты колебаний пластины.

ПРАВИЛА ПО ОХРАНЕ ТРУДА:

1. Вся работа проводится строго в соответствии с данными методическими указаниями.
2. Включение оборудования для выполнения данной лабораторной работы производится только под наблюдением лаборанта и в присутствии преподавателя, проводящего занятия.
3. Не разрешается проводить на оборудовании любые другие работы, кроме рабочих манипуляций органами включения и регулирования, а также измерений линейных размеров печатной платы.
4. Не разрешается перемещать оборудование без специального разрешения преподавателя, проводящего занятия.
5. Не разрешается работать с неисправным оборудованием. При этом особое внимание должно быть обращено на исправность проводов питания.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.

В РЭА весьма широко представлены пластины, которые являются несущими элементами конструкций. К модели пластины приводятся такие элементы конструкций РЭА как стенки кожухов приборов, панели шасси, стенки экранов, платы, печатные платы, подложки микросхем и т.д. Таким образом, пластиной является плоский элемент конструкции, два измерения которого по много раз больше третьего (толщины).

Из всех возможных типов колебаний пластины наибольший практический интерес представляют изгибные колебания, т.е. колебания в направлении минимальной жесткости.

При проектировании РЭА возникает необходимость выполнения динамических расчетов для определения прочности и перемещений конструкций, приводимых к модели пластины, вычисления резонансных частот и нагрузок, возникающих в процессе эксплуатации РЭА.

Для составления расчетных уравнений, определяющих движение пластины, необходимо, в первую очередь, выбрать её динамическую модель, т.е. представить объект в виде некоторой совокупности инерционных, упругих и демпфирующих элементов. В частности, их определяют следующие допущения:

- а) изгибные деформации пластины в процессе колебаний малы по сравнению с её толщиной и подчиняются закону Гука;
- б) толщина пластины постоянна;
- в) нейтральный слой пластины (делящий её по толщине на равные объёмы) не подвержен деформациям растяжения-сжатия;
- г) материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный;

Используя уравнение изгиба пластины при действии распределенной статической нагрузки $q(x, y)$

$$D \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad (1)$$

и заменяя в соответствии с принципом Д'Аламбера эту нагрузку силой инерции $m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, получим уравнение свободных незатухающих (собственных) колебаний пластины:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (2)$$

где:

$z = z(x, y, t)$ — прогиб пластины в точке с координатами x, y в момент времени t ;

$D = \frac{EH^3}{12(1-\sigma^2)} = 0,09 EH^3$ — цилиндрическая жесткость, определяемая через E и σ — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины; H — её толщину.

m — масса единицы площади пластины.

Расчетная модель пластины представлена на рис. I.

Точное решение уравнения (2) для прямоугольной пластины можно получить, когда две противоположные стороны свободно оперты при любых граничных условиях на двух других краях. Наиболее простое решение получается, когда все края пластины свободно оперты. Решение уравнения (2) в этом случае имеет вид:

$$z(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega_0 t} \quad (3).$$

Амплитудная функция $W(x, y)$ (собственная форма колебаний пластины) определяется выражением:

$$W(x, y) = \text{sig} \sin(i \frac{x}{a}) \sin(f \frac{y}{b}) \quad (4).$$

Она удовлетворяет граничным условиям на контуре:

$$z=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, a;$$

$$z=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y=0, b.$$

(равенство нулю прогибов и изгибающих моментов)

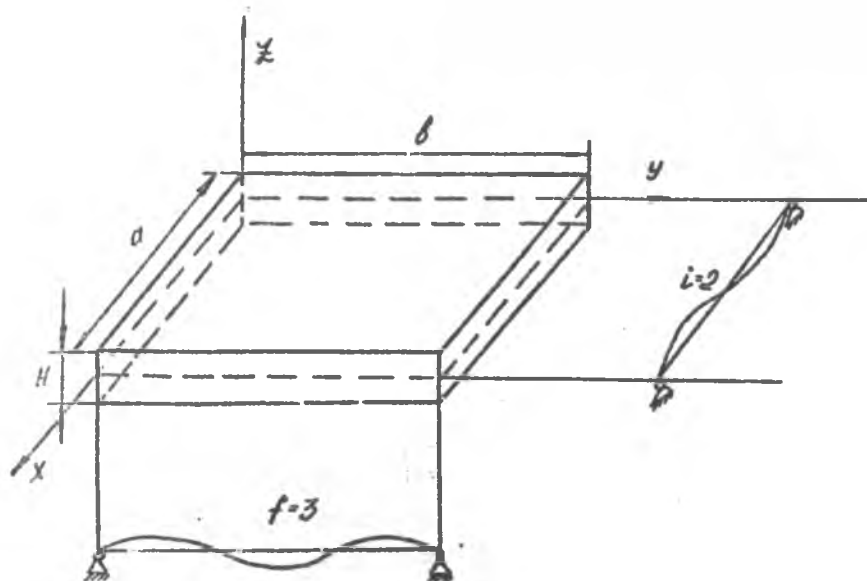


Рис. 1 Расчётная модель пластины и возможные формы её колебаний ($i=2; f=3$ - число полуволн колебаний в направлении X и Y соответственно.)

Подставляя (3) в (2), находим собственную частоту колебаний пластины.

$$\omega_{0ij} = J^2 \left[\left(\frac{L}{a}\right)^2 + \left(\frac{L}{b}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (5)$$

ρ - плотность материала пластины.

Граничные условия (условия закрепления пластины по краям) произвольного вида значительно усложняют задачу определения собственной частоты колебаний пластины. Поэтому она в таких случаях обычно решается приближенными энергетическими методами (методы Рэлея, Ритца, Бубнова-Галёркина и др.). Формула для собственной частоты колебаний имеет тот же вид и отличается коэффициентом, зависящим от граничных условий.

$$f_{0ij} = \frac{K_d}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{K_d}{2\pi a^2} \cdot \frac{\sqrt{D}}{\rho H} \quad [Гц] \quad (6)$$

где:

a, b, H - длина, ширина и толщина пластины, [м];

E - [Н/м²]; ρ - [кг/м³];

K_d - см. приложение I.

(для $L = f = 1$).

Дифференциальное уравнение (2) имеет существенный недостаток, ограничивающий его использование лишь для определения собственной частоты колебаний пластины. В нём не учтены потери энергии, которые всегда есть в реальных процессах. Поэтому при расчете прочности, нагрузок и перемещений, возникающих при эксплуатации, необходимо учитывать такие потери, а также внешние силы.

Учитывая эти соображения и принимая потери энергии пропорциональными деформации, преобразуем дифференциальное уравнение (2) в уравнение вынужденных колебаний пластины.

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D(1+jf) \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = P(x, y, t) \quad (7)$$

где:

γ - коэффициент механических потерь;

$P(x, y, t)$ - внешняя возбуждающая сила.

Уравнение (7) можно решить, используя метод разложения функции в ряд по собственным формам колебаний.

$$z = z(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}(t) w_{ij}(x, y); \quad (8)$$

$$P(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{ij}(t) w_{ij}(x, y) \quad (9);$$

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$z(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{b_{ij}(t) w_{ij}(x, y)}{m(\omega_{0ij}^2 - \omega^2 + \gamma j_{ij} \omega_{0ij}^2)} \quad (10)$$

При кинематическом возбуждении мест крепления А получим коэффициенты передачи по перемещению и ускорению:

$$k_{ij}(x, y) = \frac{z(x, y, t)}{z_A(t)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{k_{ij}(x, y)}{\sqrt{(1 - D_{ij}^2)^2 + \gamma_{ij}^2 D_{ij}^2}} \omega_{0ij}^2 \quad (12)$$

$$k_{ij}^*(x, y) = \frac{\ddot{z}(x, y, t)}{\ddot{z}_A(t)} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{k_{ij}(x, y)}{\sqrt{(1 - D_{ij}^2)^2 + \gamma_{ij}^2 D_{ij}^2}} \quad (13)$$

При резонансе:

$$k_{ij} = \frac{k_{ij}(x, y)}{\omega_{0ij}^2 j_{ij}}; \quad (14)$$

$$k_{ij}^* = \frac{k_{ij}(x, y)}{j_{ij}} \quad (15)$$

$$D_{ij} = \frac{10}{\omega_{0ij}};$$

Зависимости (I_2, I_3) имеют экстремумы при резонансах и отражают влияние механических потерь при колебаниях. Аналогичные зависимости можно получить при силовом возбуждении.

Таким образом, для определения собственной частоты колебаний пластины требуется либо в уравнении (7) задать кратковременно силу $P(x, y, t)$ и после её исчезновения измерить частоты затухающих колебаний, либо задавать эту силу по гармоническому закону в полосе частот, включающей резонансные, и снимать зависимость типа $(I_2), (I_3)$, по экстремумам которых определить требуемые частоты. Первый способ определения собственной частоты колебаний пластины относительно более сложен в техническом исполнении, однако обладает повышенной точностью по сравнению со вторым.

Граничные условия для пластины выбираются в зависимости от реального закрепления её в РЭА. Существуют три типа классических граничных условий:

- 1-опёртый край (обозначается на схеме пунктиром -----);
- 2-защемленный край (обозначается на схеме //////////);
- 3-свободный край (обозначается на схеме _____).

Практика показывает, что если край пластины задан с натягом, то такое закрепление считается защемленным. Кроме того, пластины могут быть закреплены в отдельных точках по периметру пластины, например, в четырёх угловых точках.

Пластина, как система с распределенными параметрами, имеет бесконечное число резонансных частот. Наиболее опасен первый резонанс ($\omega = \omega_1 = 1$), т.к. он вызывает обычно максимальные перегрузки и амплитуды.

2. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ.

Схема лабораторной установки приведена на рис.2.

- 1-генератор звуковой частоты (например, ГЗ-48), амплитуду U_0 и частоту f которого можно задать;
- 2-макет, питаемый от сети $\sim 220В$;
- 3-усилитель мощности;
- 4-катушка силового возбуждения пластины.5 (выполнена как печатная плата), взаимодействующая с силой $P(t)$ с магнитом (NS);
- 6-вибропреобразователь ускорения $\ddot{z}(t)$ -электрический сигнал;
- 7-измерительный усилитель;
- 8-стрелочный измерительный прибор, показывающий виброускорение в относительных единицах.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ПОДГОТОВЛЕННОСТИ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.

- 3.1.Определение пластины.
- 3.2.Назовите элементы РЭА, приводимые к модели пластины.
- 3.3.Постановка задачи расчета параметров колебаний пластины.
- 3.4.Напишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний пластины и поясните физическую природу его членов.
- 3.5.Какие виды закреплений краев пластины различают?
- 3.6.Как можно определить собственную частоту колебаний пластины в эксперименте?

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

- 4.1.Зачитать собственную частоту колебаний печатной платы, установленной на макете, без учета электрорадиоэлементов ($f_{св}$) и

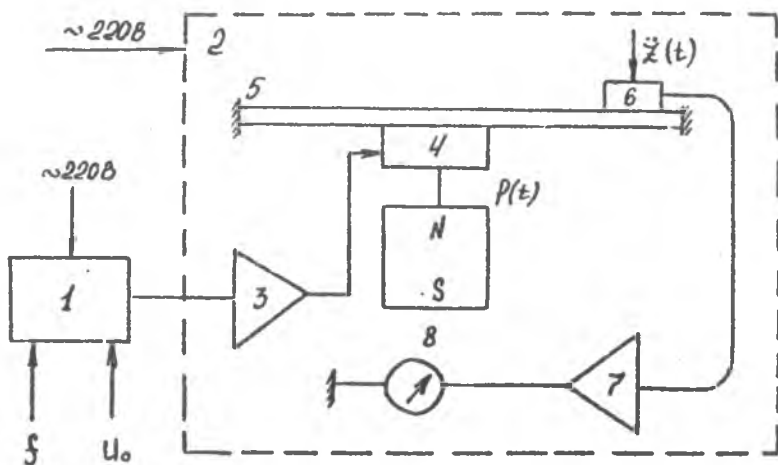


Рис.2 Структурная схема лабораторной установки для исследования колебаний прямоугольных пластин.

с учетом их (f_{011}) (масса интегральной микросхемы-Иг, масса вибропреобразователя-ИОг, масса катушки силового возбуждения, установленная на плате-Эг). Материал печатной платы-стеклотекстолит СФ I-35 (см. приложения 2,3).

4.2. Снять в относительных единицах зависимости

$$h^*(f) \text{ при } 20 \leq f \leq 1,5 f_{011}$$

(не менее 10 точек) и построить их в одной системе координат:

а) при максимальном силовом возбуждении $P(t)$;

б) при пониженном (в 1,5 раза) силовом возбуждении.

Примечания:

1. $P(t)$ практически постоянна в полосе частот при $U_0 = const$

2. Рекомендуется уменьшать шаг по f в районе острейшей h^* .

4.3. Определить по построенным графикам собственную частоту колебаний печатной платы f_{011}^* - как среднее по данным двух графиков.

4.4. Найти погрешности расчетных способов определения собственной частоты колебаний печатной платы:

$$\delta_1 = \frac{f_{011} - f_{011}^*}{f_{011}^*} 100\%;$$

$$\delta_2 = \frac{f_{011}^* - f_{011}}{f_{011}^*} 100\%$$

Провести анализ причин возникновения погрешностей вследствие идеализации условий закрепления, приближенности используемых формул, точности определения геометрических и электрических параметров, физико-механических констант материалов, конструкции радиомикроэлектронного узла на печатной плате.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА.

Отчет должен содержать необходимые разделы со следующими данными:

5.1. Цель работы.

5.2. Структурная схема лабораторной установки.

5.3. Расчет собственных частот колебаний печатной платы.

5.4. Экспериментальное определение коэффициента передачи по ускорению и собственной частоты колебаний печатной платы.

5.5. Определение погрешностей расчетного способа определения собственной частоты печатной платы.

Примечание: Все разделы отчета должны быть увязаны по изложению, обозначениям, терминологии, и т.п., содержать необходимые выкладки и пояснения.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ОТЧЕТА ПО РАБОТЕ.

6.1. Нарисуйте схему лабораторной установки и объясните её работу.

6.2. Начертите и объясните зависимость $\zeta^*(f)$.

6.3. Как можно возбудить пластину на собственной частоте колебаний?

6.4. Каков порядок выполнения работы?

6.5. Что такое амплитудная функция?

6.6. Напишите уравнение колебаний пластины.

6.7. Каковы граничные условия при решении задачи колебания пластины при её свободном опирании по контуру?

Литература:

























1. Токарев М.Ф. и др.

Механические воздействия и защита радиомэлектронной аппаратуры.
М.: Радио и связь, 1984г. -224с.

2. Справочник конструктора РЭА. Общие принципы конструирования.
(под редакцией Р.Г.Варламова).

М.: Советское радио, 1980г. -480с.

Приложение 1

Эскизы	Ка	Эскизы	Ка
	$9,87 (1 \cdot a^2/b^2)$		$3,52 \sqrt{1 \cdot 2,48 a^2/b^2 + a^4/b^4}$
	$9,87 \sqrt{1 \cdot 2,33 a^2/b^2 + 2,44 a^4/b^4}$		22,37
	$15,42 \sqrt{1 \cdot 0,95 a^2/b^2 + 0,41 a^4/b^4}$		$22,37 a^2/b^2$
	$9,87 \sqrt{1 \cdot 2,57 a^2/b^2 + 5,14 a^4/b^4}$		3,52
	$22,37 \sqrt{1 \cdot 0,48 a^2/b^2 + 0,19 a^4/b^4}$		$3,52 a^2/b^2$
	$15,42 \sqrt{1 \cdot 1,11 a^2/b^2 + a^4/b^4}$		15,42
	$22,37 \sqrt{1 \cdot 0,57 a^2/b^2 + 0,47 a^4/b^4}$		$15,42 a^2/b^2$
	$15,42 \sqrt{1 \cdot 1,19 a^2/b^2 + 2,1 a^4/b^4}$		$3,52 \sqrt{1 \cdot 5,56 a^2/b^2 + 19,2 a^4/b^4}$
	$22,37 \sqrt{1 \cdot 0,61 a^2/b^2 + a^4/b^4}$		$15,42 \sqrt{1 \cdot 0,29 a^2/b^2 + 0,6 a^4/b^4}$
	$3,52 a^2/b^2$		$3,52 \sqrt{1 \cdot 1,58 a^2/b^2}$
	$9,87 a^2/b^2$		$3,52 \sqrt{1,58 a^2/b^2 + a^4/b^4}$
	9,87		$22,37 \sqrt{0,1 a^2/b^2 + a^4/b^4}$
	$9,87 \sqrt{0,43 a^2/b^2 + a^4/b^4}$		$22,37 \sqrt{1 \cdot 0,1 a^2/b^2}$
	$9,87 \sqrt{1 \cdot 0,43 a^2/b^2}$		$15,42 \sqrt{0,34 a^2/b^2 + a^4/b^4}$
	$3,52 \sqrt{1 \cdot 5,97 a^2/b^2 + 4,05 a^4/b^4}$		$15,42 \sqrt{1 \cdot 0,34 a^2/b^2}$
	$22,37 \sqrt{1 \cdot 0,14 a^2/b^2 + 0,02 a^4/b^4}$		а - длинная сторона б - короткая сторона

Материал	H мм	E $\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$	ρ $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$
СФ 1-35	1,0	2,1 · 10 ⁵	2,0
	1,5	2,1 · 10 ⁵	2,0
	2,0	2,1 · 10 ⁵	1,8
	2,5	2,1 · 10 ⁵	1,8
С2-35	1,0	2,1 · 10 ⁵	2,3
	1,5	2,1 · 10 ⁵	2,12
	2,0	2,1 · 10 ⁵	2,1
	2,5	2,1 · 10 ⁵	2,0

Основание : ГОСТ 10316-78

"Тетинакс и стеклотекстолит фольгированные".

Общие технические условия: ГОСТ 10292-74.

"Стеклотекстолит конструкционный. Технические условия."

ПРОГРАММА РАСЧЕТА РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ
ПЛАСТИНЫ С ПОМОЩЬЮ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

Программа обеспечивает расчет на программируемых микрокаль-
куляторах (МК) семейства "Электроника ВЗ-31" нижней резонансной
частоты f_0 (Гц) пластин преимущественно печатных плат радио-
электронной аппаратуры (РЭА).

Исходные данные и распределение памяти для них

длина пластины (м) - П1; ширина пластины (м) - П2; масса установ-
ленных на пластине элементов (кг) - П3; толщина пластины (м) - П4;
 d_1 -П1, d_2 -П2, d_3 -П3, d_4 -П4, см. табл. I,2;
модуль упругости материала пластины (Па) - П6, плотность материала
пластины, (кг/м³) - П7;

Типы заделок краев пластины

Таблица I.

№	Тип заделки	d				№	Тип заделки	d			
		d ₁	d ₂	d ₃	d ₄			d ₁	d ₂	d ₃	d ₄
I	2	3	1	5	6	I	2	3	4	5	6
1.		9,87	I	2	I	10.		3,52	0	I	0
2.		9,87	I	2,33	2,44	11.		9,87	0	0	I
3.		15,42	I	0,95	0,41	12.		9,87	I	0	0
4.		9,87	I	2,57	5,14	13.		9,87	0	0,13	I
5.		22,37	I	0,48	0,19	14.		9,87	I	0,43	0
6.		15,42	I	1,11	I	15.		3,52	I	5,97	40,5
7.		22,37	I	0,57	0,47	16.		22,37	I	0,14	0,02
8.		15,42	I	1,3	2,1	17.		3,52	I	2,48	I
9.		22,37	I	0,61	I	18.		22,37	I	0	0

I	2	3	4	5	6	I	2	3	4	5	6
19.		22,37	0	0	I	26.		3,52	I	1,58	0
20.		3,52	I	0	0	27.		3,52	0	1,58	I
21.		3,52	0	0	I	28.		22,37	0	0,1	I
22.		15,42	I	0	0	29.		22,37	I	0,1	0
23.		15,42	0	0	I	30.		15,42	0	0,34	I
24.		3,52	I	5,56	19,2	31.		15,42	I	0,34	0
25.		15,42	I	0,29	0,05						

- заделка с натягом;

- заделка шарнирная (угловое перемещение);

- нет заделки (свободный край).

При закреплении пластины в 1,5,6 точках:

Таблица 2

Количество точек крепления	1	5	6
d_1	I	1	1
d_2	0	I	0

Инструкция по работе с программой:

1. Разработать исходные данные (см. выше).
2. Включить МК, перейти в режим программирования - F ПРГ
3. Набрать программу (см. ниже).
4. Перейти в режим автоматического счета - F АВТ
5. Ввести исходные данные (см. выше).
6. Обнулировать программный счетчик - В/0.
7. Ввести тип заделки: по таблице 1 - 0; по таблице 2 - I;
8. Пустить программу - С/П.
9. После останова прочитать f_c .

ПРОГРАММА

00. $Fx = 0$	01. 29	02. ИПА	03. ИПВ	04. +
05. Fx^2	06. \uparrow	07. \uparrow	08. ИПЗ	09. x
10. XY	11. Fx^2	12. ИП4	13. x	14. +
15. ИП2	16. +	17. $F\sqrt{\quad}$	18. ИП1	19. x
20. 2	21. +	22. $F\pi$	23. +	24. ИПА
25. Fx^2	26. +	27. БП	28. 47	29. ИПВ
30. Fx^2	31. ИП2	32. x	33. ИПА	34. Fx^2
35. +	36. ИП1	37. XY	38. +	39. ИПВ
40. Fx^2	41. $F1/x$	42. +	43. $F\pi$	44. x
45. 2	46. +	47. ИП6	48. ИПО	49. Fx^2
50. x	51. И5	52. 9	53. ВП	54. 2
55. /-/	56. x	57. ИП7	58. +	59. $F\sqrt{\quad}$
60. x	61. ИПО	62. ИПА	63. x	64. ИПВ
65. x	66. ИП7	67. x	68. ПС	69. ИИД
70. XY	71. +	72. I	73. +	74. $F\sqrt{\quad}$
75. +	76. $d\pi$			

Контрольный пример:

0,18 - ПА; 0,12 - ПВ; 0,106 - ПД; $1,5 \cdot 10^{-9}$ - ПО; $\frac{7}{0,2 \cdot 10^3 + 0,05 \cdot 10^6}$ - П1;
 0 - П2; 0 - П3; 0 - П4; $3 \cdot 10^{10}$ - П6; $2,18 \cdot 10^3$ - П7; $\sqrt{1}$;
 $f_0 = 166, 32944.$