САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

ГРАФИЧЕСКИЙ И СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИОННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ

САМАРА 1991

Государственный комитет РСФСР
по делам науки и высшей школы

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

ГРАФИЧЕСКИЙ И СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОДЫ В ОРГАНИЗАЦИОННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ

Методические указания

Самара 1991

Составители: В.П.Г л у х о в, Т.В.Г о л у б е в а, Л.А.Б о й к о в а

УДК 658.5

Графический и симплексный методы в организационно-экономических ситуациях: Метод.указ./ Куйбышев. авиац. ин-т; Сост. В.П.Г л у х о в, Т.В.Г о л у б е в а, Л.А.Б о й к о в а. Самара, 1991. 47 с.

Приводятся теоретические сведения по постановке задач линейного программирования, графическому и симплексному методам их решения традиционным способом и на ЭВМ СМ-1420 с помощью пакета прикладных программ "Оптимум".

Рекомендуются для самостоятельной подготовки студентов и при проведении практических занятий по курсам "Технология принятия решений" и "Организация, планирование и управление" на 3, 4, 5 курсах специальностей 0716, 1301, 1302, 1303, 2301, 2303. Подготовлены на кафедре организации производства.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С.П.Королева

Рецензент В.Г.З а с к а н о в

В экономике задачи математического программирования возникают в связи с многочисленностью вариантов создания или функционирования определенной экономической системы, с возможностью применения различного сырья, материалов, технологии для производства одной и той же продукции. Среди этих вариантов необходимо выбрать по некоторому критерию, отраженному в функции цели $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, наилучший (оптимальный) вариант. Множество вариантов функционирования конкретной экономической системы ограничено с точки зрения количества и качества получаемого сырья, технологии, времени, рабочей силы, денежных средств, станочного парка и других факторов. Ограничения формально можно выразить в виде условий $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant 0, \forall i = \overline{1, m}$, где $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – некоторые заданные функции; $x_1, x_2, \dots, x_n$ – факторы, которыми можно оперировать для достижения поставленной цели; m – количество ограничений.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ при условиях $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) \leqslant 0, \forall i = \overline{1, m}$.

В зависимости от свойств функций f и φ_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин. Если все функции f и φ_i линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования (ЗЛП). Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

В данных методических материалах рассмотрены только ЗЛП, к которым относятся возникающие при управлении производством на различных уровнях задачи распределения: оптимизации производственной программы предприятия (цеха); оптимального использования оборудования; оптимальной загрузки предприятий; установление рациональных связей по кооперированию.

После описания указанных задач изложены их подробные решения различными методами: на основе здравого смысла, графического и симплекс-метода. Дано теоретическое описание названных методов и схем решения задач по этим методам.

В случае дефицита контрольных задач, приведенных в разделе 3, рекомендуется использовать методические указания, предложенные в библиографическом списке [1, 7, 8].

1. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

1.1. Общая ЗЛП. Основные определения

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow max(min), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m_1}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \quad \forall i = \overline{m_1+1, m_1+m_2}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad \forall i = \overline{m_1+m_2+1, m_1+m_2+m_3}, \tag{4}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Основная или общая ЗЛП формулируется следующим образом: требуется найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе линейных ограничений (2)-(5), для которых функция цели (1) принимает экстремальное значение (c_j, a_{ij}, b_i - некоторые заданные числа).

Любая совокупность $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих ограничениям (2)-(5), называется допустимым решением или допустимым планом. Так как рассматриваемые задачи носят в основном экономический характер, наряду с понятием "решение" принимается аналогичное ему понятие "план". Если ЗЛП имеет хотя бы одно допустимое решение, то ее ограничения называются совместными, в противном случае - несовместными. Все допустимые решения образуют область определения ЗЛП или область допустимых решений. Допустимое решение, обеспечивающее экстремум целевой функции (I), называется оптимальным планом задачи. Если через $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ обозначить оптимальное решение ЗЛП, а через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – любое допустимое решение, то $f(x^*) \geq f(x)$ для задачи на максимум, $f(x^*) \leq f(x)$ для задачи на минимум.

Замечание: учитывая экономический смысл величины b_i, в рассматриваемых задачах предполагается, что $b_i \geq 0$ $\forall i = \overline{1, m}$. Но в некоторых ЗЛП, создаваемых искусственно для различных целей, может получиться, что отдельные ограничения $b_i < 0$. Тогда обе части такого ограничения умножаются на (–I), а знак неравенства меняется на противоположный.

I.2. Примеры ЗЛП

Классической распределительной ЗЛП является задача формирования оптимального плана.

Пусть для изготовления продукции видов $A_1, A_2, \dots, A_n$ используется сырье видов $B_1, B_2, \dots, B_m$. Запасы этого сырья ограничены и составляют соответственно $b_1, b_2, \dots, b_m$ единиц. Пусть a_{ij} – количество единиц сырья вида B_i, необходимое для изготовления единицы продукции вида A_j, C_j – доход, получаемый от сбыта единицы продукции вида A_j. Требуется составить такой план выпуска продукции видов $A_1, A_2, \dots, A_n$, при котором доход в результате сбыта всей продукции будет максимальным.

Обозначив через x_j количество единиц продукции вида A_j, получим следующую математическую модель:

$$f = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot x_j \to max, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m}, \tag{7}$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}. \tag{8}$$

На объем выпуска продукции могут быть наложены, помимо (8), дополнительные ограничения, например:

$$x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}. \tag{9}$$

Подобные ограничения позволяют учитывать реальные потребности в выпускаемой продукции. Их введение, естественно, сужает область поиска оптимального решения.

В качестве другого примера рассмотрим задачу выбора оптимального плана загрузки оборудования.

Требуется обеспечить программу выпуска изделий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в количестве $a_1, a_2, \ldots, a_n$ штук соответственно на m типах взаимозаменяемого оборудования, каждый из которых характеризуется фондом времени работы $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Известна матрица трудовых $\{\{t_{ij}\}_{j=1}^{n}\}_{i=1}^{m}$ и стоимостных $\{\{c_{ij}\}_{j=1}^{n}\}_{i=1}^{m}$ затрат при изготовлении единицы j -го изделия на i -м типе оборудования. Оптимальным будет считаться план выпуска продукции $\{\{x_{ij}\}_{j=1}^{n}\}_{i=1}^{m}$, обеспечивающий минимальную себестоимость изготовления программы выпуска, где x_{ij} - количество изделий j -го типа, изготавливаемых на i -м типе оборудования.

Математическая модель данной ЗЛП:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_j \qquad \forall j = \overline{1, n}, \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \ \forall j = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Здесь (11) - ограничения по фонду времени работы оборудования, (12)- ограничения по программе выпуска.

Для пояснения изложенного рассмотрим следующий пример.

Пусть для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. I. В ней же указаны прибыль от реализации данного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Таблица I

Вид сырья и прибыль	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
I	I2	4	300
II	4	4	I20
III	3	I2	252
Прибыль от реализации одного изделия, руб	30	40	

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Тогда математическая модель задачи запишется следующим образом:

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to max, \tag{I4}$$

$$12x_1 + 4x_2 \leq 300, \tag{I5}$$

$$4x_1 + 4x_2 \leq 120, \tag{I6}$$

$$3x_1 + 12x_2 \leq 252, \tag{I7}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{I8}$$

Согласно неравенству (I5), если изготавливать только изделия $A (x_2 = 0)$ и использовать на это все 300 кг I вида сырья, то можно произвести 25 единиц $(x_1 = 300/12)$ этого изделия, что дает 750 руб. прибыли (30·25). Причем из I20 кг II вида сырья используется только I00 кг (4·25), а 20 кг будут недоиспользованы. Недоиспользовано будет и сырье III вида: 252–3·25 = I77 кг. Однако, чтобы проверить возможность получения такой суммы прибыли, необходимо проанализировать и два следующих неравенства.

Из неравенства (I6) видно, что II вид сырья может обеспечить производство изделия A в количестве 30 единиц (I20/4). Прибыль в этом случае составляет уже 900 руб. При этом I вид сырья оказывается дефицитным ($12\cdot30 = 360 > 300$ кг), а III – будет недоиспользован на 162 кг ($252-3\cdot30$).

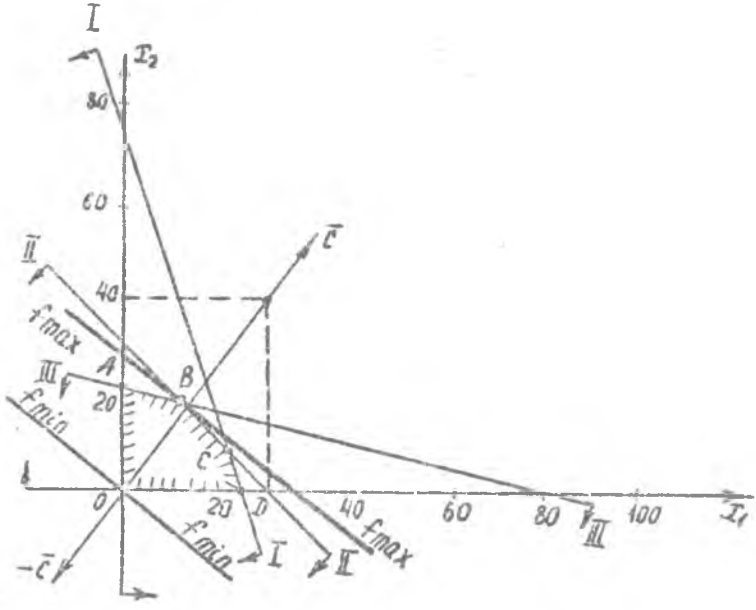
Из неравенства (17) определяем, что III вид сырья позволяет произвести $x_1 = 252:3 = 84$ единицы изделия A и получить 2520 руб. прибыли ($30\cdot84$). При этом дефицитными окажутся два первых вида сырья ($12\cdot84 = 1008 > 300$ и $4\cdot84 = 336 > 120$).

Проведем аналогичные расчеты применительно к изделию $Б$, начав их с неравенства (17). Согласно этому неравенству при $x_1 = 0$ можно получить 21 единицу (252/12) изделия (прибыль в $40\cdot21 = 840$ руб, сырье I вида недоиспользовано на $300-4\cdot21 = 216$ кг, сырье II вида – на $120-4\cdot21 = 36$ кг. Неравенство (16), согласно которому $x_2 = 120:4 = 30$ единицам, обращает в дефицитное III вид сырья ($12\cdot30=360 > 252$ кг). А неравенство (15), согласно которому $x_2 = 300:4 = 75$ единицам, обращает в дефицитные II и III виды сырья ($4\cdot75 = 300 > 120$ и $12\cdot75 = 900 > 252$). Поэтому изделие $Б$ не может выпускаться ни в количестве 30 единиц, ни тем более в количестве 75 единиц. Значит, из шести рассмотренных вариантов остается только два, из которых видно, что изделие A можно произвести количеством не более 25 единиц (что дает 750 руб. прибыли), а изделие $Б$ – не более 21 единицы (840 руб. прибыли). Причем в обоих случаях не обеспечивается полное использование всего сырья. Очевидно, что существует такой вариант, который обеспечит полное их использование, а следовательно, и большую прибыль. Попытаемся найти такой вариант, используя экономико-математические методы решения ЗЛП. Начнем с графического метода. Рассмотрим его на том же примере.

1.3. Графический метод решения ЗЛП

Графическим методом можно решать ЗЛП, имеющие две переменные. В случае трех переменных графический метод становится менее наглядным, а при большем числе переменных – невозможным.

Построим область допустимых решений задачи (рис. 1). В первую очередь отобразим в прямоугольной системе координат условия неотрицательности переменных (18). В двумерном пространстве уравнению соответствует прямая, а неравенству – полуплоскость, лежащая по одну сторону от прямой. Прямые $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ совпадают с осями координат. Полуплоскости $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ лежат соответственно справа от оси Ox_2 и выше оси Ox_1. Множество точек, удовлетворяющих (18), лежат в первой четверти и на граничных полуосях. Сторона, в которой располагается полуплоскость от прямой, указывается стрелками.



Р и с. I.

Рассмотрим остальные ограничения задачи. Построим по порядку прямые

$$12x_1 + 4x_2 = 300, \tag{I}$$

$$4x_1 + 4x_2 = 120, \tag{II}$$

$$3x_1 + 12x_2 = 252. \tag{III}$$

Как известно, для построения прямой необходимо определить две точки, через которые она проходит:

для первой прямой – $(x_1 = 0, x_2 = 75)$ и $(x_1 = 25, x_2 = 0)$;

для второй прямой – $(x_1 = 0, x_2 = 30)$ и $(x_1 = 30, x_2 = 0)$;

для третьей прямой – $(x_1 = 0,\ x_2 = 21)$ и $(x_1 = 84,\ x_2 = 0)$.

Дальше определим, с какой стороны от этих прямых лежат полуплоскости, точки которых удовлетворяют соответственно строгим неравенствам:

$$12x_1 + 4x_2 < 300,$$
$$4x_1 + 4x_2 < 120,$$
$$3x_1 + 12x_2 < 252.$$

Для этого подставим координаты точек одной или другой полуплоскости в неравенство. Когда прямая, ограничивающая полуплоскость, не проходит через начало координат, удобнее всего подставить точку с координатами (0,0). Если координаты точки удовлетворяют неравенству, то эта точка лежит в полуплоскости, соответствующей самому неравенству. В противном случае неравенству будет соответствовать другая полуплоскость. Так, неравенству $12x_1 + 4x_2 < 300$ соответствует полуплоскость, лежащая ниже I прямой.

Область определения задачи (I4)-(I8) будет представлять собой пересечение всех построенных полуплоскостей. В данном случае это многоугольник $OABCД$, каждая точка которого включая и граничные, будет удовлетворять неравенствам (I5)-(I8).

Следующим этапом присвоим целевой функции f значение нуля и построим прямую

$$30x_1 + 40x_2 = 0. \qquad (I9)$$

Эта прямая, проходящая через начало координат, строится следующим образом. Легко заметить, что в левой части уравнения (I9) стоит скалярное произведение двух векторов $\bar{C} = (C_1, C_2) = (30, 40)$ и $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Построим вектор $\bar{C}$ [он проходит через начало координат и точку (30,40)] и перпендикулярно ему через начало координат проведем прямую. Это и будет прямая (I9).

Вектор $\bar{C}$ всегда показывает направление возрастания значения целевой функции, а противоположный ему вектор $(-\bar{C})$ – направление убывания значения целевой функции.

Если передвигать прямую (I9) по области определения параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{C}$, то значение целевой функции будет возрастать. Передвижение в направлении вектора $(-\bar{C})$ дает убывание значения целевой функции. Передвижение на графике прямой равносильно изменению значения b в уравнении $30x_1+40x_2=b$.

Каждому значению b соответствует прямая. Получаемые прямые параллельны между собой и называются линиями уровня. Особенность линии уровня состоит в том, что целевая функция принимает на ней одинаковые значения.

Целевая функция f в задаче (I4)-(I8) достигает своего минимального значения в точке (0,0), а максимального в точке B, которая является последней общей точкой функции цели и области определения задачи. Определим координаты этой точки, которая лежит на пересечениях прямых П и Ш. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1+4x_2=120, \\ 3x_1+12x_2=252. \end{cases}$$

В результате решения получаем $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит I2 изделий вида A и I8 изделий вида B, то оно получит максимальную прибыль.

$$f = 30\cdot12+40\cdot18=360+720=1080 \text{ руб}$$

При этом недоиспользовано будет сырье только I вида: 300-I2·I2-4·I8=84 кг. Сырье П и Ш вида используется полностью.

Алгоритм нахождения решения ЗЛП
на основе графической интерпретации

I. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник допустимых решений как пересечение найденных полуплоскостей.

4. Строят вектор $\bar{C}=(C_1,C_2)$ или вектор $(-\bar{C})$.

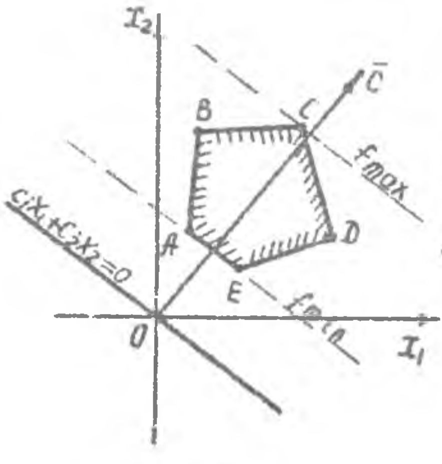
5. Строят прямую $C_1x_1+C_2x_2=b$, проходящую через многоугольник решений, где b - некоторое число.

6. Передвигая прямую $C_1x_1+C_2\cdot x_2=b$ в направлении вектора $\bar{C}$ [или вектора $(-\bar{C})$], находят точку многоугольника, в которой целевая функция приобретает максимальное (или минимальное) значение.

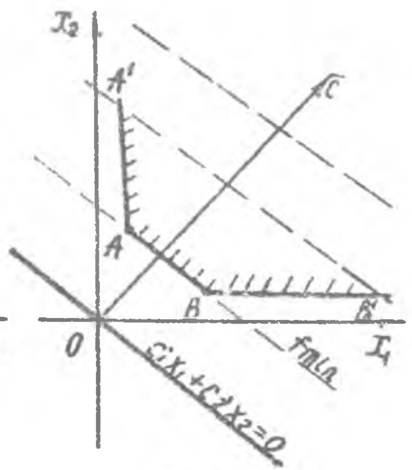
7. Определяют координаты точки экстремума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

В заключение можно сказать следующее: I. Целевая функция ЗЛП достигает своего экстремального значения в угловой точке многогранника решений. 2. Реальные ЗЛП всегда разрешимы, т.е. имеют оптимальный план. Однако некорректная постановка задачи или искусственно созданная задача может привести к ее неразрешимости.

При нахождении решения ЗЛП могут встретиться различные случаи, изображенные на рис. 2-5.



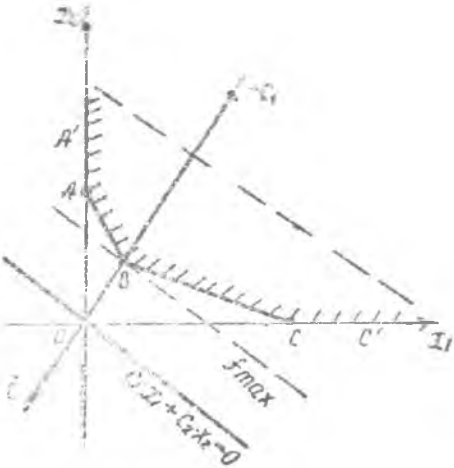
Р и с. 2.



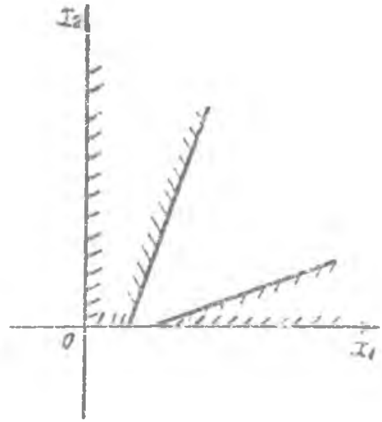
Р и с. 3.

На рис. 2 задача имеет одно или бесконечное число оптимальных решений (в зависимости от того, определяется максимум или минимум функции цели). Бесконечное множество оптимальных решений получается в случае, если угловые коэффициенты целевой функции равны угловым коэффициентам одного из ограничений. На рис. 3 задача имеет бесконечное число решений (задача на минимум) либо вообще не имеет оптимальных решений (задача на максимум), так как значение целевой функции не ограничено из-за неограниченности множества допустимых решений.

На рис. 4 задача имеет либо одно решение (ЗЛП на максимум) либо не имеет оптимальных решений (ЗЛП на минимум). На рис. 5 задача не имеет ни одного допустимого решения, так как система ограничений задачи несовместна.



Р и с. 4.



Р и с. 5.

Если в ЗЛП больше двух неизвестных, то для ее решения применяет универсальный симплексный метод, суть которого рассмотрена ниже.

I.4. Симплекс-метод решения ЗЛП

В 1947 г. американский ученый Дж. Данциг создал универсальный метод решения ЗЛП, который получил название симплекс-метода в результате ранних исследований, когда рассматривалась задача оптимизации на симплексе, т.е. множестве вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n}.$$

Прежде чем излагать суть симплекс-метода, опишем каноническую (т.е. типовую) форму ЗЛП и приемы приведения ЗЛП к канонической форме. Требование приведения любой ЗЛП к канонической форме не обязательно и выдвигается здесь для решения любой задачи по единому алгоритму, т.е. с целью простоты изложения сущности симплекс-метода.

Каноническая форма ЗЛП:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i \qquad \forall i=\overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j=\overline{1,n},$$

$$b_i \geq 0 \qquad \forall i=\overline{1,m}.$$

Так как общая ЗЛП имеет ограничения не только вида "=", но и "$\geq$", "$\leq$", а целевая функция может не только максимизироваться, но и минимизироваться, поэтому задачу на минимум целевой функции необходимо свести к определению максимума функции цели, а все имеющиеся ограничения вида "$\leq$", "$\geq$" привести к ограничениям-равенствам.

Определение максимального значения целевой функции f можно свести к определению максимального значения функции $(-f)$, так как $\min f = -\max(-f)$. Для приведения ограничений вида "$\geq$" к ограничениям-равенствам необходимо из левой части каждого ограничения вычесть соответственно неотрицательные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, чтобы не изменить ее значения. Так, частная ЗЛП

$$\begin{gathered}
f = c_1\cdot x_1 + c_2\cdot x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n \to min,\\
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n \geq b_1,\\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n \geq b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n \geq b_m,\\
x_j \geq 0 \qquad \forall j=\overline{1,n},\\
b_i \geq 0 \qquad \forall i=\overline{1,m}
\end{gathered} \tag{21}$$

после ее приведения к канонической форме будет иметь вид

$$\begin{aligned}
f = -c_1\cdot x_1 - c_2\cdot x_2 - \ldots - c_n\cdot x_n + 0\cdot x_{n+1} + 0\cdot x_{n+2} + \ldots + 0\cdot x_{n+m} &\to max,\\
a_{11}\cdot x_1 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n - x_{n+1} &= b_1,\\
a_{21}\cdot x_1 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n - x_{n+2} &= b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a_{m1}\cdot x_1 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n - x_{n+m} &= b_m,\\
x_j \geq 0 \quad \forall j=\overline{1,n+m} &
\end{aligned}$$

Для приведения ограничений вида "$\leq$" к ограничениям-равенствам необходимо к левой части каждого ограничения прибавить неотрицательные переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$. Эти переменные вводятся в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, чтобы не изменить ее значение. Например, следующая частная ЗЛП

$$
\begin{aligned}
&f = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to max,\\
&\quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1,\\
&\quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2,\\
&\quad a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m,\\
&\qquad x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,n},\\
&\qquad b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1,n},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

после ее приведения к канонической форме будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&f = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} \to max,\\
&\quad a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1,\\
&\quad a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n + x_{n+2} = b_2,\\
&\quad \ldots\\
&\quad a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m,\\
&\qquad x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n+m}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ называются дополнительными. Экономически интерпретировать их, например для задачи использования ресурсов, можно как количество неиспользованных ресурсов.

После приведения общей ЗЛП к канонической форме необходимо определить исходное допустимое базисное решение, для составления которого могут быть использованы дополнительные переменные. На основании допустимого базисного решения с помощью симплекс-метода находят оптимальное решение или делают вывод о том, что задача не имеет решений.

Переменная будет являться базисной, если она входит только в одно из ограничений с коэффициентом, равным I. Все остальные переменные являются небазисными. Базисное решение – частное решение, полученное путем приравнивания небазисных (независимых) переменных к нулю и нахождению значений базисных (зависимых) переменных. Первое решение задачи, полученное таким образом называется исходным базисным решением. Базисное решение называется вырожденным, если значение хотя бы одной базовой переменной равно нулю. Задача, имеющая хотя бы одно вырожденное базисное решение, называется вырожденной, в противном случае – невырожденной.

После приведения частной ЗЛП (21) к канонической форме (22) переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ не могут быть приняты в качестве базисных, так как они входят в ограничения с коэффициентом (–I). Поэтому для выделения базисных переменных и нахождения допустимого базисного решения используется метод искусственного базиса, который заключается в следующем.

В каждое ограничение задачи (22) вводятся соответственно искусственные неотрицательные переменные $x_{n+m+1}, x_{n+m+2}, ..., x_{n+m+m}$, которые принимаются в качестве базисных. Искусственные переменные входят в целевую функцию с коэффициентом $(-M)$, где M – большое положительное число, во много раз больше заданных в условии задачи. После ввода искусственных переменных задача (22) принимает вид

$$f = -c_1 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2 - \ldots - c_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + \ldots + 0 \cdot x_{n+m} -$$
$$- M \cdot x_{n+m+1} - M \cdot x_{n+m+2} - \ldots - M \cdot x_{n+m+m} \to max,$$
$$a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1,$$
$$a_{21} \cdot x_1 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n - x_{n+m} + x_{n+m+m} = b_m,$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n+m+m}.$$

Пока искусственная переменная является базисной, она будет принимать положительные значения (если соответствующие ей значения $b_i > 0$) и, следовательно, уменьшать значение целевой функции по сравнению с максимальным. Так как эти переменные имеют большие по абсолютной величине отрицательные коэффициенты, в процессе решения задачи симплекс-методом они из числа базисных переводятся в небазисные. В силу того что значения небазисных переменных при получении базисного решения приравниваются к нулю, искусственные переменные не будут оказывать влияния на значение целевой функции.

Этот же метод используется и для ограничений вида "=". При получении исходного базисного плана необходимо стремиться к тому, чтобы он содержал минимальное количество искусственных переменных. Это дает возможность уменьшить число шагов для получения оптимального решения.

В некоторых ЗЛП в ограничениях вида "$\geqslant$" и "=" базисные переменные можно выделить сразу, не прибегая к методу искусственного базиса.

Процесс приведения ЗЛП к канонической форме и получения исходного базисного решения приведен в примерах 1, 2, 3 (стр. 21, 23, 25).

После приведения ЗЛП к каноническому виду и определения исходного базисного плана, а также значения целевой функции для этого плана применим симплекс-метод, чтобы найти решение задачи.

Из подразд. 1.3 известно, что оптимальное решение ЗЛП связано с угловыми точками многогранника решений. Количество угловых точек соответствует количеству базисных решений. Найти оптимальное решение, беспорядочно перебирая все базисные решения, затруднительно, так как при таком неупорядоченном поиске значения целевой функции необязательно будут монотонно возрастать (при поиске максимума)или монотонно убывать (при поиске минимума). Поиск еще больше усложняется при большом количестве ограничений.

Симплекс-метод, который в нашей литературе также называется методом последовательного улучшения плана, позволяет переходить от одного базисного решения к другому с постоянным возрастанием целевой функции (в задаче на максимум) или постоянным убыванием целевой функции (в задаче на минимум). Процесс решения задачи продолжается до получения оптимального плана либо до установления факта отсутствия решения задачи. Количество итераций симплекс-метода зависит от выбора исходного базисного плана и количества угловых точек многогранника решений, встречающихся при движении от исходного плана к оптимальному.

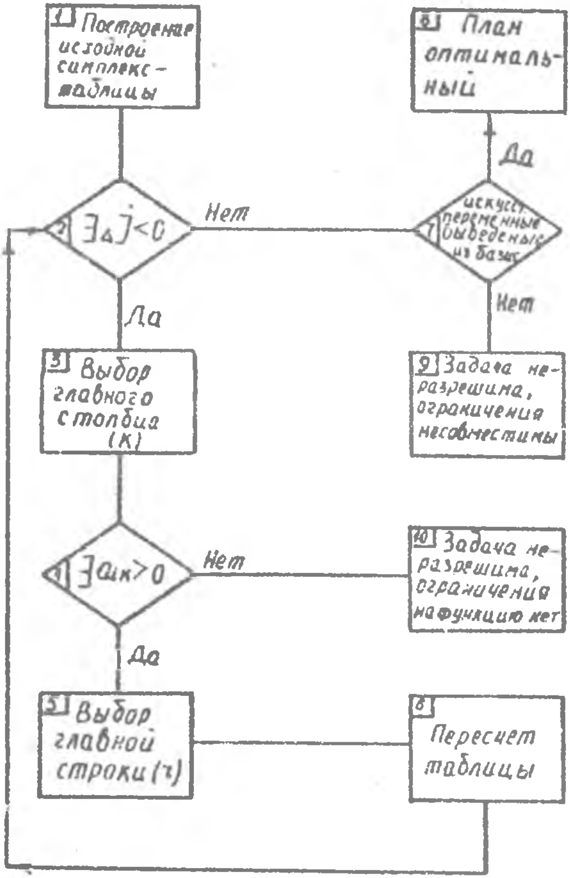
Критерий разрешимости ЗЛП: для того чтобы ЗЛП была разрешима, т.е. имела оптимальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ограничения задачи были совместными (множество допустимых решений не пусто) и целевая функция была ограничена при поиске максимума сверху, а при поиске минимума - снизу.

Если ЗЛП вырожденная, то при переходе от одного базисного решения к другому значение целевой функции может не меняться.

Схема алгоритма симплекс-метода приведена на рис. 6.

Этап 1. Строим и заполняем исходную симплексную таблицу (см. блок 1 рис. 6) по следующей схеме (табл. 2).

В столбце "Базис" записываются базисные переменные, в столбце



Р и с. 6.

"C" – коэффициенты при базисных переменных в целевой функции (C_i), в столбце "B" – свободные члены ограничений (b_i), т.е. значения базисных переменных. В столбцах x_j (небазисные переменные) отражаются коэффициенты при небазисных переменных в ограничениях (a_{ij}), над переменными x_j – коэффициенты при этих переменных в целевой функции (C_j). Строка "Δ" в столбце "B" содержит значение целевой функции, которое рассчитывается по формуле

$$f = \sum_{i \in I_б} c_i b_i , \qquad (25)$$

а столбцы x_j этой же строки – значения относительных оценок (Δ_j) небазисных переменных, рассчитываемых по формуле

Таблица 2

Базис	-1	0		...	c_j	...
	c	b		...	x_j	...
...						
x_i	c_i	b_i			a_{ij}	
...						
	Δ	f		...	Δ_j	...

$$\Delta_j = \sum_{i \in I_б} c_i \cdot a_{ij} - c_j , \; j \notin I_б , \qquad (26)$$

где $I_б$ – множество индексов базисных переменных.

Относительные оценки рассчитываются для проверки базисного плана на оптимальность.

Числа (-I) и 0, записываемые соответственно над столбцами "c" и "b", неизменно присутствуют в каждой симплексной таблице и носят вспомогательный характер, чтобы при расчете оценок Δ_j по таблице не забывать о вычитании c_j.

При определении значения f фактически нужно найти сумму произведений элементов столбца "c" на соответствующие элементы столбца "b", что равносильно подстановке базисного плана в целевую функцию; а при определении значения относительной оценки Δ_j – сумму произведений элементов столбца "c", включая (-I), на соответствующие элементы того столбца x_j, для которого она рассчитывается.

Этап 2. Проверим полученный базисный план на оптимальность по условию оптимальности. Если $\forall j \notin I_б \; \Delta_j \geq 0$ и среди базисных переменных нет искусственных, то план является оптимальным (см. блоки 2, 7, и 8 рис. 6).

Если $\forall j \notin I_б \; \Delta_j \geq 0$ и среди базисных переменных есть искусственные, то задача неразрешима, так как ее система ограничений несовместна (см. блоки 7 и 9 рис. 6).

Если $\exists \Delta_j < 0$, то полученный базисный план не является оптимальным и необходимо переходить к другому базисному плану (блоки 2 и 3 рис. 6).

Если в оптимальном плане $\exists \Delta_j = 0$, то задача имеет бесконечное множество планов (см. пример 3, стр. 25).

Этап 3. Для перехода к новому базисному плану, в первую очередь из числа небазисных переменных с отрицательными оценками Δ_j, выбирается переменная, которая вводится в базис (см. блок 3 рис. 6). В базис вводится та переменная x_k, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка Δ_j:

$$(\Delta_k) = \max_j (\Delta_j). \tag{27}$$

Столбец, отвечающий переменной x_k, называется г л а в н ы м. Если окажется несколько одинаковых наибольших по абсолютной величине отрицательных оценок, то выбирается любая из соответствующих им переменных.

Этап 4. Выбираем переменную, которая выводится из базиса (см. блоки 4 и 5 рис. 6). Ее индекс r находится из соотношения

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i \frac{b_i}{a_{ik}} \quad \text{по} \ \forall i : a_{ik} > 0. \tag{28}$$

Выбранная таким образом переменная x_r выводится из базиса. Строка таблицы, в которой получено наименьшее отношение $\left(\frac{b_r}{a_{rk}}\right)$ элемента столбца "B" к соответствующему положительному элементу главного столбца, называется г л а в н о й.

Если окажется несколько одинаковых наименьших значений отношений, то выбирается любая из соответствующих им переменных.

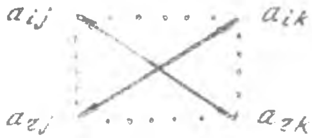
Элемент, стоящий на пересечении главной строки и главного столбца, называется главным (обозначается через a_{rk}).

В случае отсутствия значений $a_{ik} > 0$ ЗЛП неразрешима, так как ее целевая функция не ограничена на множестве планов задачи (см. блоки 4 и 10 рис. 6).

Этап 5. Для определения нового базисного плана производим пересчет элементов таблицы (см. блок 6 рис. 6) и результаты заносим в новую симплексную таблицу. Выбранные переменные в новой таблице меняются местами вместе со своими коэффициентами в целевой функции. Остальные переменные переписываются без изменений со своими коэффициентами. Элементы новой симплексной таблицы рассчитываются по следующей схеме:

1. Главный элемент заменяется единицей.
2. Остальные элементы главной строки остаются без изменения.
3. Остальные элементы главного столбца меняют свои знаки.
4. Оставшиеся элементы определяются по правилу прямоугольника.

Пусть требуется пересчитать элемент a_{ij} и имеет место следующая схема расположения элементов:



Тогда на месте элемента a_{ij} в новой симплекс-таблице будет стоять число $a_{ij} \cdot a_{rk} - a_{rj} \cdot a_{ik}$.

5. Все элементы, вычисленные в первых четырех пунктах, делятся на главный элемент a_{rk}.

Если из числа базисных исключается искусственная переменная, то соответствующий ей столбец в новую симплексную таблицу не включается и, следовательно, не пересчитывается.

Этап 6. Проверяем правильность расчета значений целевой функции f и оценок Δ_j по формулам (25) и (26). Переходим к этапу 2.

Для пояснения решения ЗЛП симплекс-методом рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим задачу об использовании ресурсов (14)-(18), постановка которой приведена в подразд. 1.3. Эта задача была решена графическим методом, теперь решим симплекс-методом.

Математическая модель задачи:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to max \\
& 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\
& 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Р е ш е н и е. Приведем задачу к канонической форме:

$$
\begin{aligned}
& f = 30x_1 + 40x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to max, \\
& 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\
& 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\
& 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252, \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,5}.
\end{aligned}
$$

Выделим базисные переменные, количество которых должно быть равно количеству ограничений. Переменные x_3, x_4, x_5 – базисные, так как каждая из них присутствует только в одном ограничении с коэффициентом, равным I. Переменные x_1, x_2 – небазисные. Исходный базисный план $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 300$, $x_4 = 120$, $x_5 = 252$ и целевая функция $f = 0$. Это означает, что никаких изделий производиться не будет и сырье использоваться не будет.

Исходные данные задачи, а также вычисленные по формуле (25) значение целевой функции ($f = (-1)\cdot 0 + 0\cdot 300 + 0\cdot 120 + 0\cdot 252 = 0$) и по формуле (26) значения относительных небазисных переменных ($\Delta_1 = (-1)\cdot 30 + 0\cdot 12 + 0\cdot 4 + 0\cdot 3 = -30$ и $\Delta_2 = (-1)\cdot 40 + 0\cdot 4 + 0\cdot 4 + 0\cdot 12 = -40$ перенесем в исходную симплексную табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Базис	-I	0	30	40
	C	B	x_1	x_2
x_3	0	300	12	4
x_4	0	120	4	4
x_5	0	252	3	12
	Δ	0	-30	-40

Т а б л и ц а 4

Базис	-I	0	30	0
	C	B	x_1	x_5
x_3	0	216	11	-1/3
x_4	0	36	5	-1/3
x_2	40	21	1/4	1/12
	Δ	840	-20	10/3

Т а б л и ц а 5

Базис	-I	0	0	0
	C	B	x_4	x_5
x_3	0	84	-11/5	8/9
x_1	30	12	1/5	-1/9
x_2	40	18	-1/12	1/9
	Δ	1080	22/5	101/19

Проверим полученный план на оптимальность по условию оптимальности ($\Delta_j \geqslant 0$). Так как $\Delta_1 < 0$ и $\Delta_2 < 0$, то план не является оптимальным. Необходим переход к другому базисному плану. Для этого среди небазисных переменных на основании (27) выберем ту, которая будет вводится в базис: $(\Delta_k) = max(|\Delta_1|, |\Delta_2|) = max(|-30|, |-40|) = 40$. В базис будет вводится переменная x_2, так как этой переменной соответствует максимальная по модулю относительная оценка $|\Delta_2| = 40$. Ввод в базис переменной x_2 обеспечивает большую прибыль, чем ввод x_1, так как коэффициент, с которым x_2 входит в целевую функцию больше коэффициента, с которым x_1 входит в ту же функцию.

Далее на основании (28) выберем переменную, которая будет выводиться из базиса:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = min\left(\frac{300}{4}, \frac{120}{4}, \frac{252}{12}\right) = min(75, 30, 21) = 21.$$

Из базиса выводится переменная x_5 , так как этой переменной соответствует минимальное отношение, равное 21.

Если, например, из базиса будет выводиться переменная x_3 , то сырье II-го и III-го вида станет дефицитным ($4 \cdot 75 = 180 + 120$ и $12 \cdot 300:4 = 900 > 252$), т.е. переменные x_3, x_4 станут отрицательными, что недопустимо.

На пересечении главной строки, соответствующей переменной x_5 и главного столбца, соответствующего переменной x_2 , находится главный элемент, равный 12. Для удобства расчетов можно пометить этот элемент в таблице (обвести кружком).

Строим новую симплексную табл. 4, в которой переменные x_5 и x_2 , меняются местами вместе со своими коэффициентами в целевой функции. Остальные переменные переписываются без изменений со своими коэффициентами.

Пересчитываем элементы табл. 3 и результаты заносим в соответствующие клетки табл. 4. Главный элемент пересчитывается путем деления 1 на главный элемент (1/12), элементы главной строки - путем деления каждого элемента этой строки на главный элемент (252/12 = 21, 3/12 = 1/4), элементы главного столбца - путем деления каждого элемента этого столбца на главный элемент со знаком минус (-4/12 = -1/3, -4/12 = -1/3, -(-40/12) = 10/3). Все остальные элементы табл. 4 определяются аналогично клетке $x_3 x_1$: $(12 \cdot 12 - 3 \cdot 4)/12 = 11$.

Проверяем правильность расчета значений целевой функции f и оценок Δ_1 и Δ_5 по формулам (25) и (26) соответственно:

$$f = (-1)0 + 0 \cdot 216 + 0 \cdot 36 + 40 \cdot 21 = 840,$$

$$\Delta_1 = (-1)30 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 3 + 40 \cdot \frac{1}{4} = -30 + 10 = -20,$$

$$\Delta_5 = (-1)0 + 0\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\left(-\frac{1}{3}\right) + 40 \cdot \frac{1}{12} = \frac{10}{3}.$$

Полученный в табл. 4 план не является оптимальным, так как существует $\Delta_1 = -20 < 0$. В число базисных переменных вводится переменная x_1 , а из базиса исключается x_4 ($\min$ (216:11, 36:3, 21:0,25) = $\min\left(19\frac{7}{11}, 12, 84\right) = 12$).

Пересчитываем элементы табл. 4 и результаты заносим в табл. 5. После проверки правильности расчета f и оценок Δ_4, Δ_5 делаем вывод о том, что полученный в табл. 5 план является оптимальным, так как оценки Δ_4 , $\Delta_5 > 0$.

О т в е т. Для получения максимальной прибыли в размере 1080 руб. предприятию необходимо выпустить 12 изделий вида $A(x_1)$ и 18 изделий вида $Б(x_2)$, т.е. оптимальный план тот же, что и при решении задачи графическим методом. Недоиспользованным остается только сырье I вида в размере 84 кг. Улучшить этот план нельзя, поскольку ввод в базис любой из переменных x_4 или x_5 не улучшит значения целевой функции, ибо эти переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

Пример 2. Математическая модель задачи:

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to max,$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$$

$$2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,4}.$$

Р е ш е н и е. Исходная задача записана в канонической форме. Для выделения базисных переменных обе части первого ограничения разделим на 3 и тогда в качестве базисной можно взять переменную x_2, а во второе ограничение введем искусственную переменную x_5:

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - Mx_5 \to max,$$

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 1,$$

$$2 \cdot x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 4,$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,5}.$$

Исходный базисный план: $x_2 = 1, x_5 = 4, x_1 = x_3 = x_4 = 0$; значение целевой функции $f = -5 - 4M$.

Заполним исходную симплекс-таблицу (табл. 6). При проверке плана на оптимальность для выбора наибольшей по абсолютной величине относительной оценки достаточно рассматривать ту часть строки - тельных Δj, которая содержит M (в силу того, что M - очень большое положительное число). Только при наличии нескольких одинаковых наибольших по абсолютной величине частей Δj, содержащих M, рассматривается та часть Δj, которая M не содержит.

Таблица 6

Базис	-1	0	1	-1	1
	C	B	x_1	x_3	x_4
x_2	-5	1	1/3	1	1/3
x_5	$-M$	4	2	3	-1
	Δ	$-4M-5$	$-2M-\frac{8}{3}$	$-3M-4$	$M-\frac{8}{3}$

Таблица 7

Базис	-1	0	1	-5	1
	C	B	x_1	x_2	x_4
x_3	-1	1	1/3	1	1/3
x_5	$-M$	1	1	-3	-2
	Δ	$-M-1$	$-M-\frac{4}{3}$	$3M+4$	$2M-\frac{4}{3}$

Анализ табл. 6 показывает, что в базис вводится переменная x_3, а выводится x_2. Пересчитываем элементы табл. 6 по известным формулам. Дальнейшее решение задачи показано в табл. 7-9. Так как в табл. 7 из базиса исключается искусственная переменная x_5, то соответствующий ей столбец в новую симплексную таблицу 8 не включается.

Таблица 8

Базис	-1	0	-5	1
	C	B	x_2	x_4
x_3	-1	2/3	2	1
x_1	1	1	-3	-2
	Δ	1/3	0	-4

Таблица 9

Базис	-1	0	-5	-1
	C	B	x_2	x_3
x_4	1	2/3	2	1
x_1	1	7/3	1	2
	Δ	3	8	4

Полученный в табл. 9 план является оптимальным, так как искусственные переменные (x_5) в базисе отсутствуют и относительные оценки Δ_2, $\Delta_3 > 0$.

Ответ: $x_1^* = \frac{7}{3}$, $x_2^* = x_3^* = 0$, $x_4^* = \frac{2}{3}$, $f = 3$.

Пример 3. Рассмотрим процесс решения ЗЛП, имеющей бесконечное число планов (решений):

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 2,$$
$$x_1 - 2x_2 \leqslant 1,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

После приведения задачи к канонической форме для получения исходного базисного плана во второе ограничение введем искусственную переменную x_6. Тогда модель задачи примет вид

$$
\begin{aligned}
&f(x) = -x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - M\cdot x_6 \to \max,\\
&x_1 - x_2 + x_3 = 2,\\
&x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 2,\\
&x_1 - 2x_2 - x_5 = 1,\\
&x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,6}.
\end{aligned}
$$

Процесс получения оптимального плана показан в табл. 10–12.

Таблица 10

Базис	-1	0	-1	-1	0
	C	B	x_1	x_2	x_4
x_3	0	2	1	-1	0
x_6	$-M$	2	1	1	-1
x_5	0	1	1	-2	0
	Δ	$-2M$	$-M+1$	$-M+1$	M

Таблица 11

Базис	-1	0	-1	0
	C	B	x_1	x_4
x_3	0	4	2	-1
x_2	-1	2	1	-1
x_5	0	5	3	-2
	Δ	-2	0	1

Таблица 12

Базис	-1	0	0	0
	C	B	x_5	x_4
x_3	0	2/3	$-2/3$	1/3
x_2	-1	1/3	$-1/3$	$-1/3$
x_1	-1	5/3	1/3	$-2/3$
	Δ	-2	0	1

Оптимальный план $x_1^* = 0$, $x_2^* = 2$, $f_{min} = 2$ получен в табл. 11, так как $\Delta_1, \Delta_4 \geq 0$. Наличие в оптимальном плане оценки $\Delta_1 = 0$ говорит о том, что задача имеет бесконечное число решений. Включение в число базисных переменных x_1, которой отвечает оценка $\Delta_1 = 0$, и исключение из базиса переменной x_5 не изменит значения целевой функции, но приведет к изменению базисного плана (см. табл. 12). Новый оптимальный план: $x_1^* = \frac{5}{3}$, $x_2^* = \frac{1}{3}$, $f_{min} = 2$.

Оптимальные решения данной задачи будут лежать на отрезке, заключенном между точками (0,2) и (5/3, I/3). Целевая функция $f_{min}=2$ в любой точке этого отрезка, координаты которой могут быть найдены из следующих соотношений:

$$x_1 = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\cdot \frac{5}{3},$$

$$x_2 = \alpha \cdot 2 + (1-\alpha)\cdot \frac{1}{3}, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

При α = I получаем план табл. II [т.е. точка (0,2)]. при α = 0 получаем план табл. I2 [т.е. точка (5/3, I/3)].

При решении практических задач наличие бесконечного числа оптимальных планов дает возможность выбирать такой план, который в наибольшей степени отвечает сложившейся производственной ситуации.

Применение изложенного симплексного метода в управлении производством не ограничивается рассмотренной задачей по обеспечению максимальной прибыли.

Рассмотрим следующий пример.

Оптимальное использование оборудования

Пусть T_k – время работы k -го станка в течение планового периода; x_{ijk} – доля времени работы k -го станка при изготовлении i -й детали на j -й операции; t_{ijk} – трудоемкость изготовления i -й детали по j -й операции на k -м станке.

Тогда общее количество i -х деталей, прошедших j -ю операцию, составит

$$L_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{T_k \cdot x_{ijk}}{t_{ijk}}. \qquad (29)$$

Суммирование выполняется по всем m станкам разных типов, на которых может выполняться j -я операция над i -й деталью.

Исходные данные. Допустим, цех должен произвести некоторое количество изделий, для комплектования которых необходимо изготовить четыре детали, затратив на двух операциях определенное время, причем все работы выполняются на шести станках; фонд времени работы каждого станка T_k составляет 400 ч. Исходные данные представлены в табл. I3.

Требуется рассчитать оптимальную загрузку оборудования.

Р е ш е н и е. Из таблицы видно, что обработка деталей I, 2, 4 требует выполнения двух операций, детали 3 – одной операции.

Т а б л и ц а I3

Распределение работ на станках по операциям

Номера деталей	Выполняемые операции	Время обработки деталей на различных станках, ч					
		I	II	III	IУ	У	УI
1	I		200	800			
	2	160	80				
2	I				160	270	
	2	320	40				
3	I	320	100		80	110	300
	2						
4	I		240	270			800
	2				320		

Время выполнения первой операции, например для детали I, на станке II составит $t_{112} = 200$ ч ($T_2 = 400$), на станке III – $t_{113} = 800$ ч ($T_3 = 400$).

Отсюда общее количество первых деталей, прошедших первую операцию, составляет

$$L_{11} = \frac{400}{200} \cdot x_{112} + \frac{400}{800} \cdot x_{113} = 2x_{112} + 0,5x_{113}.$$

Аналогичные уравнения строятся для всех деталей и операций.

Для обеспечения комплектности изготовления необходимо, чтобы по каждому наименованию деталей было изготовлено одинаковое число L, т.е. должно быть $L_{ij} = L$.

Для рассматриваемого примера i = I, 2, 3, 4; j = I, 2.

Какими должны быть величины x_{ijk}, чтобы L (или выработка на станке) была максимальной?

Так как время работы каждого станка не может превышать фонда времени работы станка T_k, то сумма долей работы по всем деталям и операциям каждого станка удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leq 1 \; (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (30)$$

Суммирование производится только по тем деталям n и операциям p, которые выполняются на данном станке k.

Таким образом, ограничения по всем условиям примера имеют вид:

$$2x_{112}+0{,}5x_{113}=L;$$
$$5/2\,x_{121}+5x_{122}=L;$$
$$5/2\,x_{214}+3/2\,x_{215}=L;$$
$$5/4\,x_{221}+10x_{222}=L;$$
$$5/4\,x_{311}+4x_{312}+5x_{314}+3{,}65x_{315}+4/3\,x_{316}=L;$$
$$5/3\,x_{412}+3/2\,x_{413}+1/2\,x_{416}=L;$$
$$5/4\,x_{424}=L;$$
$$x_{121}+x_{221}+x_{311}\leqslant 1;$$
$$x_{112}+x_{122}+x_{222}+x_{312}+x_{412}\leqslant 1;$$
$$x_{113}+x_{413}\leqslant 1;$$
$$x_{214}+x_{314}+x_{424}\leqslant 1;$$
$$x_{215}+x_{315}\leqslant 1;$$
$$x_{316}+x_{416}\leqslant 1.$$

В качестве целевой функции, максимум которой следует найти, удобно взять равенство

$$5/4\,x_{424}=L=max.$$

Воспользовавшись им для исключения L из остальных ограничений, получим

$$2x_{112}+0{,}5x_{113}-5/4\,x_{424}=0;$$
$$5/2\,x_{121}+5x_{122}-5/4\,x_{424}=0;$$
$$5/2\,x_{214}+3/2\,x_{215}-5/4\,x_{424}=0;$$

$$5/4\,x_{221} + 10\,x_{222} - 5/4\,x_{424} = 0;$$

$$5/4\,x_{311} + 4x_{312} + 5x_{314} + 3{,}65\,x_{315} + 4/3\,x_{316} - 5/4\,x_{424} = 0;$$

$$5/3\,x_{412} + 3/2\,x_{415} + 1/2\,x_{416} - 5/4\,x_{424} = 0;$$

$$x_{121} + x_{221} + x_{311} \leqslant 1;$$

$$x_{112} + x_{122} + x_{222} + x_{312} + x_{412} \leqslant 1;$$

$$x_{113} + x_{413} \leqslant 1;$$

$$x_{214} + x_{314} + x_{424} \leqslant 1;$$

$$x_{215} + x_{315} \leqslant 1;$$

$$x_{316} + x_{415} \leqslant 1.$$

Дальнейшее решение задачи симплекс-методом приводит к следующему результату:

$x_{121} = 39/80$; $x_{222} = 1/8$; $x_{215} = 5/6$; $x_{311} = 41/80$;
$x_{412} = 79/160$; $x_{315} = 1/6$; $x_{112} = 3/8$; $x_{113} = 1$;
$x_{416} = 41/48$; $x_{122} = 1/160$; $x_{424} = 1$.

Подстановка найденных значений x_{ijk} в формулу (29) позволяет определить загрузку каждого станка:

I – 39/80 + 41/80 = 1.
II – 3/8 + 1/160 + 1/8 + 79/160 = 1.
III – 1.
IV – 1.
V – 5/6 + 1/6 = 1.
VI – 41/48 = 0,854.

Видим, что все станки, за исключением шестого, загружены полностью. Последний станок загружен на 85,4%. В среднем же загрузка всех станков достигает 98%. Отсюда можно сделать вывод: поскольку $x_{424} = 1$, то при найденном способе закрепления деталей за станками возможно перевыполнение плана на 25% ($\lambda = 5/4\,x_{424} = 1{,}25$).

Оптимизация производственной программы объединения

Задача о выборе производственной программы описывается следующим образом. Имеется m предприятий, на которых нужно произвести n продуктов в заданном ассортименте $l_1, l_2, \dots, l_n$. Известна производительность i -го предприятия в единицу времени, если оно выпускает j -й продукт (a_{ij}).

Предполагается; что $\max a_{ij} > 0$, т.е. каждый продукт может производиться хотя бы на одном предприятии. Требуется составить программу работы предприятий (указать долю времени, отведенную на производство каждого продукта на данном предприятии), причем так, чтобы получить максимальную суммарную продукцию в заданном ассортименте в единицу времени.

Иначе говоря, имеется в виду случай, когда продукция дефицитна, производительные мощности ограничены и должны полностью использоваться.

Обозначим через x_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ долю рабочего времени i -го предприятия, отводимую под j -продукт. Поиск оптимальной программы загрузки предприятий сводится к решению следующей задачи – найти x_{ij} из условий:

целевая функция

$$z = \min_j \frac{y_j}{l_j} \longrightarrow \max$$ (количество ассортиментных наборов продуктов);

ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1$$ (сумма всех долей не превосходит полного времени работы предприятия);

$$y_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$$ (количество j -го продукта, произведенное на всех предприятиях);

$$x_{ij} \geqslant 0$$ (доля времени не может быть отрицательной).

На основании общей теоремы линейного программирования оптимальный план характеризуется тем, что существуют оценки $q_1, q_2, \dots, q_n$ для производимых продуктов и $d_1, d_2, \dots, d_m$ для рабочего времени различных предприятий, которые дают

$q_j \cdot a_{ij} = d_i$, при $x_{ij} > 0$

(если i -е предприятие выпускает j -й продукт, то оценка полученного в единицу времени продукта равна оценке единицы времени этого предприятия):

$q_j \cdot a_{ij} \leq d_i$ при $x_{ij} = 0$

(если i -е предприятие не выпускает j -го продукта в оптимальном плане, то оценка продукта, который можно было бы получить в единицу времени на этом предприятии, не превосходит оценки единицы времени i -го предприятия);

$q_j = 0$ при $y_j \geq l_j z$

(если продукт избыточен, то его оценка равна нулю. Разумеется, избыточность продукта понимается только в рамках данной задачи. Избыточный продукт - это продукт, произведенный в объеме, превышающем ассортиментный, нереализуемый);

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, при $d_i > 0$

(если оценка единицы рабочего времени предприятия положительна, то предприятие загружено все установленное время).

Перечисленные выше ограничения и функция цели характеризуют оптимальный план. В нем каждое предприятие используется для выпуска именно тех продуктов, которые наиболее целесообразно производить именно на этом предприятии. В соответствии с таким планом на каждом предприятии принят к производству тот вид продукции, для которого оценка продукции предприятия оказывается наибольшей, а оценка расхода времени на производство продукции наименьшая. Иначе говоря, если $x_{ij} > 0$, то

$$a_{ij} q_j = \max_j a_{ij} = d_i \quad \text{и} \quad d_j = \min_i \frac{d_i}{a_{ij}} \; .$$

Можно охарактеризовать оптимальный план и с точки зрения затрат на его реализацию. Как правило, все затраты на выпуск продукции состоят из двух частей:

затраты, не зависящие от того, где выпускается данный продукт (материальные затраты);

затраты предприятия, не зависящие от вида производимой на нем продукции.

Раз это так, то даже без всяких формул ясно, что оптимальный план дает минимально возможные затраты на весь комплексный выпуск продукции. Ведь согласно оптимальному плану за данный период производится наибольшее число комплектов и, значит, по любому другому плану для выполнения того же числа комплектов потребуется больший срок. А это приведет к тому, что часть затрат, связанных с работой предприятий, возрастает, материальные же затраты по крайней мере не уменьшатся.

И с х о д н ы е   д а н н ы е. Имеются три предприятия, деятельность которых характеризуется производственно-экономическими данными, представленными в табл. 14.

Т а б л и ц а 14

Предприятие	Месячная производительность, тыс. шт.		Месячные затраты на обработку (без мат.) тыс. руб.	Затраты на обработку, руб.		Материалы, руб.		Себестоимость, руб.	
	Изд. I	Изд. 2		Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2
А	4	2	44	11	22	6	4	17	26
Б	6	4	30	10	15	6	4	16	19
В	5	5	40	8	8	6	4	14	12

В таблице указана месячная производительность каждого предприятия, если оно будет выпускать либо первое, либо второе изделие, и, кроме того, выделены затраты на работу каждого предприятия, которые не зависят от вида изделий. Нужно, чтобы за год было произведено одинаковое число изделий I и изделий 2.

Требуется найти оптимальный план загрузки предприятий. Определить, сколько месяцев в году каждое предприятие производит изделие I и сколько месяцев – изделие 2, чтобы общий выпуск изделий был м а к с и м а л ь н ы м.

Р е ш е н и е. Анализируя затраты на обработку, на предприятии А вместо одного изделия 2 можно изготовить два изделия I, а на предприятиях Б и В – соответственно полтора и одно изделие I. Значит, первое изделие целесообразнее всего производить на предприятии А, второе изделие – на предприятии В, а время работы предприятия Б разделить между этими изделиями. Ясно также, что оценка для изготовления изделий в оптимальном плане относится как 2:3. В соответствии с этим можем получить табл. 15.

Т а б л и ц а I5

№ предприятия	Работа предприятия, месяцы		Годовая производственная программа, тыс. шт.		Месячная чистая продукция по условным оценкам (2:3) тыс.усл.ед.	
	Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2
А	I2	–	48=I2·4		8	6
Б	6	6	36=6·6	24=6·4	I2	I2
В	–	I2		60=I2·5	I0	I5

В оптимальном плане на каждом предприятии производятся изделия, которые для него более выгодны. Соответствующие оптимальному плану оценки месячной продукции в таблице подчеркнуты.

Предположим, что установленная оптовая цена комплекта из двух видов изделий равна 40 руб., а затраты материалов на одно изделие составляют соответственно 6 и 4 руб. Тогда стоимость обработки (изготовления) комплекта должна быть принята равной 40–6–4 = 30 руб. Поскольку оценки изготовления изделий I и 2 относятся как 2:3, то стоимость обработки каждого изделия должна равняться I2 и I8 руб. Теперь можно определить цену каждого изделия, так как она складывается из материальных затрат и стоимости обработки. Получаем A_1 = 6 + I2 = I8 руб., A_2 = 4 + I8 = 22 руб.

Цена каждого изделия определяется суммой затрат на изготовление, реализацию и запланированным доходом с одного изделия. Исходя из этого, легко рассчитать доход каждого предприятия от выпуска изделий I и 2 (табл.I6).

Итак, чистый доход предприятий составляет: P_1 = 4000 (I8–I7) = 4000 руб. (для предприятия А), P_2 = 3000 (I8–I6) + 2000(22–I9) = I2000 руб. (для предприятия Б), P_3 = 5000(22–I2) = 50000 руб. (для предприятия В). Например, для предприятия А чистый доход P_1 = 4000·I8 – 6·4000 – 4000·II = 4000 руб. в месяц.

Смысл этих величин (норм дохода) состоит в том, что они выражают тот вклад в общий доход, который может быть получен от данного предприятия за один месяц.

Решения, соответствующие оптимальному плану, оказываются выгодными и предприятиям и обществу, нерациональные же отчетливо демонстрируют свою невыгодность. Кроме того, оценки оптимального плана могут служить для принятия правильных оперативных решений при появления новых возможностей, не предусмотренных планом. Например, обнаружилась возможность дополнительного выпуска изделий 2 на предприятии В путем использования менее производительных станков – применения способа с затратами I2 руб. вместо 8 руб. на изготовление одного изделия. Следует ли реализовать такую возможность?

Таблица I6

Предприятие	Месячные затраты на работу предприятия, тыс. руб	Месячные прокатные оценки, тыс.руб	Затраты на единицу изделия, руб.							
			Затраты по изготовлению		Доход с одного изделия		Материальные затраты		Полные затраты	
			Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2	Изд. I	Изд. 2
А	44	4	II	22	I	2	6	4	I8	28
Б	60	I2	IO	I5	2	3	6	4	I8	22
В	40	50	8	8	IO	IO	6	4	24	22

Правильное решение состоит в том, чтобы организовать дополнительный выпуск изделий на данном предприятии: затраты (I2+4=I6 руб) будут ниже 22 руб. – рассчитанной цены на их изготовление. Следовательно, увеличение выпуска продукции повысит доход предприятий в целом. Такое решение и подсказывается оптимальным подходом. Если же подойти к этому вопросу (так, как нередко делается на практике) исходя из показателя себестоимости, то было бы принято неверное решение.

Существуют и другие модели задачи о распределении производственной программы, учитывающие иные условия или дополнительные факторы и усложняющие обстоятельства.

2. ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С ЭВМ СМ-1420

2.1. Вход пользователя в системy

1. Включите дисплей.

2. Нажмите на клавиши „CAPS LOCK" и „CR". Ответ на экране дисплея должны появиться сообщения:

MTS4VM V05,13A(C)

линия # 7 (или другой номер)

18 - мая - 90 10:05:45 (текущие дата и время)

Введите шифр:

Прежде чем выполнять следующие команды, запомните:

после каждого правильного ввода информации необходимо нажать на клавишу „CR" (или для других вариантов клавиатуры „ВК" или „ВВОД"). Если же информация была выбрана неверно, а клавиша „CR" еще не нажата, то можно исправить неточно набранную информацию клавишей „DEL" (или для других вариантов клавиатуры „ЗБ" - забой), с помощью которой "стирается" предшествующий курсору символ;

шифры могут вводиться как с основной, так и с дополнительной клавиатуры.

3. Ввведите шифр 1,3.

В ответ на это появится сообщение

Пароль:

4. Введите пароль USER. Помните, что пароль на экране не высвечивается! В ответ на экране должно появиться сообщение:

Добро пожаловать в систему MTS.

.

Точка в начале строки свидетельствует о том, что система готова к диалогу с Вами.

При наборе нижеследующих команд подчеркнутую точку перед командой на экране набирать не нужно.

5. Смонтируйте магнитный диск пользователя: _._V␣DN␣RKS

6. Смонтируйте виртуальный носитель: _._MO␣OPTIM

7. Закрепите виртуальный носитель LD за логическим устройством DK: _._ASS␣LD␣DK

8. Вызовите интересующую вас программу SGSTMP.

2.2. Решение задач линейного программирования симплекс-методом с помощью программ. GGSIMP

Для получения навыка работы с программой GGSIMP прежде чем самостоятельно решать задачи с помощью этой программы, выполните последнюю на примере 2 из подразд.1.4.

Математическая модель задачи:

$$f = x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to max,$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3,$$
$$2x_1 \qquad - 3x_3 - x_4 = 4,$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,4}.$$

Вызовите программу: $\underline{\cdot}$ RU ␣ LD:GGSIMP

В ответ на экране появится:

Симплекс-метод

В первой строке введите количество переменных (целое число не более трех знаков): 4

Во второй строке введите количество ограничений (целое число не более трех знаков): 2

В третьей строке – символ оптимизации (∅-min, I-max):1

В ответ на экране появляется следующая запись:

(максимизация)

число переменных 4

число ограничений 2

В четвертой строке введите вектор типа ограничений через запятую (1–≥; -1–≤; ∅–=): ∅,∅

В ответ появится сообщение:

Вектор типа ограничений

∅ ␣ ␣ ∅

В пятой строке введите вектор правых частей ограничений как вещественные числа (т.е. с точкой). Максимально может быть 3 знака до точки и 3 знака после точки. Каждое вещественное число отделяется от другого запятой: 3., 4.

На экране появится сообщение:

Правая часть ограничений:

3.∅∅∅ ␣ ␣ ␣ 4.∅∅∅

В ш е с т о й строке введите вектор коэффициентов целевой функции как вещественные числа (описанные выше), через запятую: -I., -5., -I., I.

В ответ на экране дисплея появится сообщение:

Коэффициенты линейной формы:

I.ØØØ ⊔⊔ - 5.ØØØ ⊔⊔ - I.ØØØ ⊔⊔⊔ I.ØØØ

Исходная матрица

Начиная с с е д ь м о й строки, введите коэффициенты матрицы ограничений по строкам как вещественные числа (см. описание выше), через запятую. После ввода каждой строки нажмите на клавишу [illegible] : I., 3., 3., I.

На экране :

I. ØØØ ⊔⊔⊔ 3. ØØØ ⊔⊔⊔ 3. ØØØ ⊔⊔⊔ I. ØØØ

В в о с ь м о й строке введите коэффициенты второго ограничения: 2., Ø., 3., -I.

В ответ на это на экране дисплея:

2. ØØØ ⊔⊔⊔ Ø. ØØØ ⊔⊔⊔ 3. ØØØ ⊔⊔ -I. ØØØ

I.ØØØØØØ
-5.ØØØØØØ
-I.ØØØØØØ
I.ØØØØØØ
I.ØØØØØØ
-5.ØØØØØØ
-I.ØØØØØØ
I.ØØØØØØ
4
I
2
I.ØØØØØØ
-5.ØØØØØØ
-I.ØØØØØØ
I.ØØØØØØ

Результат:

Оптимальное значение функции цели 3.ØØØ

Индексы базисных переменных	Оптимальные значения базисных переменных
4	0,667
I	2,333

Количество итераций - 3

STOP - -

О т в е т: f = 3 при x_1 = 2,333; x_4 = 0,667.

Замечания: I. Программа *GGSIMP* допускает решение ЗЛП с максимальной размерностью 10x10 (т.е. 10 переменных - 10 ограничений).

2. Аварийный выход из выполняющейся программы: одновременно нажмите клавиши „*CTRL*" и „*C*" . В ответ в начале следующей строки появится точка, означающая, что выполнение программы закончено аварийно и система готова к принятию следующей команды.

2.3. Выход пользователя из системы *NTS*

I. .. *OFF*

В ответ появится сообщение:

Конец сеанса пользователя: I,3.

2. Выключите дисплей.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

Ниже приведены контрольные задачи для проверки усвоения вышеизложенного материала. При решении этих задач нужно самостоятельно составить математическую модель, выбрать метод решения (если он не указан в условиях) и определить оптимальный план.

Задача I

Три вида продукции могут производиться различными технологическими способами, интенсивность которых лимитируется фондом времени намоточного, монтажного и регулировочного оборудования. Характеристики способов заданы в табл. I7.

Выбрать технологический способ производства и рассчитать план, обеспечивающий максимум прибыли.

Задача 2

В группе, включающей пять инженеров-конструкторов, выпускается документация на четыре детали. Исходные данные представлены в табл. I8. Необходимо добиться максимальной суммарной прибыли от разработки конструкторской документации.

Таблица I7

Тип оборудования и прибыль	Вид изделия								Полезный фонд времени, ч
	Первый			Второй			Третий		
	Технологический способ								
	I	II	III	I	II	III	I	II	
Намоточное (трансформаторы)	2	2	I	3	0	4	3	3	20
Монтажное	3	I	2	I	2	0	5	6	34
Регулировочное	0	I	3	2	3	I	I	0	48
Прибыль, руб.	II	7	5	9	6	7	I8	I5	

Таблица I8

Ресурсы	Потребное время на выполнение конструкторской документации на деталь, ч				Полезный фонд времени инженеров-конструкторов в планируемом периоде, ч
	Вид детали				
	I	2	3	4	
Инженеры-конструкторы:					
А	4	2	0	I	800
Б	2	0	2	I	700
В	2	2	2	0	740
Г	2	2	I	I	770
Д	0	2	2	2	700
Затраты на разработку конструкторской документации на I деталь, руб/дет.	7,5	6	8	7	
Договорная цена разработки конструкторских документов на I деталь, руб/дет.	I2	9	I0	II,5	

Задача 3

В условиях задачи 2 добиться минимальных затрат на разработку конструкторской документации при запланированной стоимости разработки конструкторских документов – 5300 руб.

Задача 4

Цех выпускает три вида изделий, причем суточная программа выпуска составляет: 90 штук изделия А, 70 штук изделия Б и 60 штук изделия В. Производственные возможности цеха характеризуются следующими данными:

а) суточный фонд рабочего времени оборудования – 780 ч.;

б) суточный расход материала – 850 т;

в) суточный расход электроэнергии – 790 кВт·ч.

Нормы затрат производственных ресурсов на единицу различных изделий приведены в табл. 19.

Таблица 19

Ресурсы	Нормы затрат на единицу изделия		
	А	Б	В
Оборудование, ч	2	3	4
Материалы, т	I	4	5
Электроэнергия, кВт·ч	3	4	2
Оптовая цена изделия, руб/шт.	8	7	6

Составить план производства продукции, обеспечивающий максимальный доход от реализации продукции, выпускаемой сверх плана.

Задача 5

Определить оптимальный план производства приборов, обеспечивая максимум выпуска продукции в стоимостном выражении. Исходные данные заданы в табл. 20.

Пропускная способность оборудования по цехам: сборочного – I2 тыс. ч., механического I0 тыс. ч., заготовительного – 40 тыс. ч.

Задача 6

В условиях задачи 5 определить оптимальный план производства продукции, исходя из максимума прибыли.

Задача 7

Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Зат-

Таблица 20

Модель прибора	Оптовая цена единицы изделия, руб.	Прибыль единицы изделия, руб.	Трудоемкость изготовления изделия по цехам, н-ч		
			[illegible]	[illegible]	[illegible]
А	60	10	[illegible]	10	[illegible]
[illegible]	70	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	80	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

раты времени на обработку одного изделия для каждого типа оборудования указаны в табл. 21. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого типа используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Определить: сколько изделий и какого вида следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Таблица 21

Тип оборудования и прибыль	Затраты времени (ст.-ч) на обработку одного изделия			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	[illegible]	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, руб.	10	14	12	

Задача 8

Определить план изготовления изделий A, B и C, обеспечивающий максимальный их выпуск в стоимостном выражении с учетом ограничений на возможное использование сырья трех видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия каждого вида, количество имеющегося сырья приведены в табл. 22.

Задача 9

Составить план загрузки производственного оборудования, обеспечивающий максимальный доход. Исходные данные приведены в табл. 23.

Т а б л и ц а 22

Вид сырья и цена	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	B	C	
I	18	15	[illegible]	360
II	6	4	8	198
III	[illegible]	3	3	180
Цена одного изделия, руб.	[illegible]	10	[illegible]	

Т а б л и ц а 23

Группа оборудования и доход	Использование оборудования в течение смены на производство единицы продукции		Производственные мощности, ед.
	A	B	
I	I	I	I8
II	0,5	I	I2
III	2	0	24
IV	0	2	I8
Доход от реализации ед. продукции	4	6	

Задача IO

На участке цеха имеется токарное и фрезерное оборудование. Затраты станочного времени при выполнении детале-операций двумя технологическими способами представлены в табл. 24.

Определить программу выпуска изделий, обеспечивающую максимальную прибыль.

Задача II

Два цеха производят продукцию I и II. Программа цеха А по продукции I – IO единиц, по продукции II – 20 единиц. Программа цеха Б соответственно 20 и 8 единиц. Часть продукции линий I и 4 идет на экспорт, при этом для выполнения плана экспортных поставок необходимо, чтобы суммарное производство продукции I на линиях I

Т а б л и ц а 24

Группа оборудования и прибыль	Затраты времени, ст-ч/шт. (в числителе)/программа выпуска по одному из технологических способов, шт. (в знаменателе)			Фонд времени, ст-ч
	А	Б	В	
Токарная:				
1-й тех.способ	$0{,}6/x_1$	$0{,}6/x_3$	$0{,}5/x_5$	180
2-й тех.способ	$0{,}3/x_2$	$0{,}4/x_4$	$0{,}9/x_6$	
Фрезерная:				
1-й тех.способ	$0{,}7/x_1$	$0{,}7/x_3$	$0{,}7/x_5$	210
2-й тех.способ	$0{,}3/x_2$	$0{,}5/x_4$	$0{,}8/x_6$	
Прибыль от реализации одного изделия, руб/шт.	0,2	0,25	0,5	

и 4 составляло 11 единиц, а производство продукции I на линии 1 превышало производство продукции II на линии 4 на 1 единицу. Удельные затраты на производство продукции (руб./шт), пропускные способности технологических линий заданы в табл. 25.

Т а б л и ц а 25

Вид продукции и пропускная способность	Удельные затраты на производство продукции (руб./шт.) на технологических линиях цехов			
	Цех А		Цех Б	
	линия 1	линия 2	линия 3	линия 4
I	5 (x_1)*	4 (x_2)	3 (x_3)	5 (x_4)
II	1 (x_5)	3 (x_6)	1 (x_7)	10 (x_8)
Пропускная способность технологических линий, ед.	10	20	30	10

* В скобках указаны программы выпуска продукции на технологических линиях.

Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий минимум затрат.

4. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

I. $f_{max} = 142$; $x_2 = 7{,}6$; $x_4 = 1{,}6$; $x_5 = 12{,}4^*$.

I. $f_{max} = 2182{,}5$; $x_1 = 105$; $x_4 = 380^*$.

3. $f_{min} = 3241{,}25$; $x_1 = 77{,}5$; $x_4 = 380^*$.

4. $f_{max} = 337{,}5$; $x_1 = 22{,}5$; $x_3 = 26{,}25^*$.

5. $f_{max} = 53333{,}33$; $x_3 = 666{,}67^*$.

6. $f_{max} = 3333{,}33$; $x_3 = 666{,}67^*$.

7. $f_{max} = 492$; $x_1 = 24$; $x_2 = 18^*$.

8. $f_{max} = 400$; $x_2 = 8$; $x_3 = 20^*$.

9. $f_{max} = 84$; $x_1 = 12$; $x_2 = 6$.

10. $f_{max} = 270$; $x_2 = 600$; $x_5 = 300^*$.

11. $f_{min} = 171$; $x_1 = 1$; $x_2 = 9$; $x_3 = x_4 = 10$; $x_5 = 9$; $x_6 = 11$; $x_7 = 8^*$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анализ плановых решений в организационных экономических системах /Сост. В.Г.З а с к а ч о в, Г.М.Г р и ш а н о в, В.П.К у р е н к о в а; Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1984.

2. Е р е м и н И.И. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М., 1976.

3. Е с и п о в Б.А. Инструкция к использованию ППП "Методы оптимизации" для выполнения курсовой работы по курсу "Исследование операций" /Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1989.

4. З у х о в и ц к и й С.И., А в д е е в а Л.И. Линейное и выпуклое программирование. М., 1967.

5. Линейное и нелинейное программирование /Под общ. ред. Л я ш е н к о. Киев, 1975.

6. М а л и к Г.С. Основы экономики и математические методы в планировании. М., 1988.

7. Методические указания к проведению практических занятий по разделу "Автоматизированные системы управления" /Сост. Е.Н.П е т р о в; Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1983.

8. Экономико-математическое моделирование производственных ситуаций /Сост. С.Д.С м и р н о в, В.П.К у р е н к о в а, Г.М.Г р и ш а н о в; Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1985.

---

* Остальные неизвестные равны нулю.

СОДЕРЖАНИЕ

ГРАФИЧЕСКИЙ И СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОДЫ
В ОРГАНИЗАЦИОННО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИТУАЦИЯХ

Составители: Г л у х о в Виктор Павлович,
Г о л у б е в а Татьяна Владимировна,
Б о й к о в а Лариса Алексеевна

Редактор Н.Д.Ч а й н и к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Л.Я.Ч е г о д а е в а

Подписано в печать 19.06.91. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 2,8.
Усл.кр.-отт. 2,9. Уч.-изд.л. 2,7. Тираж 100 экз.
Заказ 151 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии Куйбышевского
авиационного института. 443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.