Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Самарский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть I. КОМБИНАТОРИКА

Методические разработки к курсу „Дискретная математика"
для студентов специальностей
„Математика" и „Прикладная математика"

Издательство "Самарский университет", 1996

Методические рекомендации рассчитаны на студентов 1 курса математических специальностей университетов, изучающих одно- или двухсеместровый курс дискретной математики и математической логики. Первая часть содержит материал, относящийся к комбинаторике. В ней затрагиваются элементарные вопросы теории множеств и связанные с ними задачи комбинаторного пересчета.

Составитель И.С. Фролов

* * *

Методические рекомендации написаны на основе курса лекций, читаемого автором-составителем в течение ряда лет студентам-математикам. В них рассматриваются основные понятия теории множеств и одного из разделов дискретной математики — комбинаторики.

Курс дискретной математики сравнительно недавно появился в учебных программах чисто математических специальностей. Его значение трудно переоценить, если внимательно присмотреться к тому, как стремительно и основательно компьютерная технология вошла в жизнь современного общества. Являясь логической основой конструирования и анализа цифровых устройств, дискретная математика становится важным элементом в общении математика со специалистом по компьютерным наукам. Помимо этого, методы дискретной математики глубоко проникают в чисто математические дисциплины — алгебру, геометрию, теорию чисел.

Комбинаторика представляет собой один из весьма важных разделов дискретной математики.. История комбинаторного анализа хорошо известна. Его истоки связаны с азартными играми и разнообразными лотереями, популярными, начиная с XVII века. Но лишь в последнее время осознано истинное место и значение комбинаторики для математики и вычислительной техники.

Комбинаторный анализ изучает дискретные множества. Для задач комбинаторики характерен отбор элементов, обладающих теми или иными свойствами, подсчет таких элементов, упорядочение их в определенном порядке. Поэтому совершенно необходимым является использование языка теории множеств.

Кратко изложим содержание отдельных параграфов. В первом параграфе изучаются операции над множествами, диаграммы Эйлера, формула включений-исключений. Второй параграф посвящен числам сочетаний, свойствам сочетаний и методу траекторий. Предмет третьего параграфа — упорядочения множеств и связанные с ними комбинаторные понятия: перестановки и размещения. Основу четвертого параграфа составляют отображения и их типы (инъекция, сюръекция, биекция), а также разложения целых чисел. Изложены два важных принципа комбинаторики — принцип произведения и принцип биекции. Понятие мультимножества, вводимое в пятом параграфе, иллюстрируется на арифметических задачах. Далее, в шестом параграфе, оно же служит основой для построения перестановок мультимножества и доказательства мультиномиальной формулы, обобщающей формулу бинома Ньютона. Следующие два параграфа посвящены основам теории отношений; рассмотрены понятия декартова произведения множеств, композиции (произведения) отношений, отношения эквивалентности, разбиения множеств и связанные с ними числа Стирлинга и числа Белла. Девятый параграф возвращает к отображениям, но на более продвинутом уровне, и, наконец, в десятом параграфе изучаются числа Фибоначчи как введение в метод решения линейных однородных рекуррентных уравнений. Всюду последовательно проводится принцип: сначала определить теоретико-множественное понятие, а затем на его основе построить и изучить соответствующую комбинаторную конструкцию.

Поскольку методические разработки написаны в расчете на студентов I курса, только приступающих к изучению математических дисциплин, комбинаторная техника рассматривается в них на достаточно простом уровне параллельно с введением теоретико-множественных понятий. Изложение сопровождается большим количеством примеров и иллюстраций основных понятий и методов. В тексте также содержится ряд упражнений, предназначенных для самостоятельного решения, а в виде отдельного параграфа собраны задачи, которые могут быть использованы на семинарских занятиях.

Используются следующие логические символы:

$A \Longrightarrow B$	— „из A следует B“;
$A \Longleftrightarrow B$	— „A тогда и только тогда, когда B“;
$\forall x.\ A$	— „для всех x имеет место A“;
$\exists x.\ A$	— „существует x такой, что A“;
$\triangleleft \ldots \triangleright$	— начало и конец доказательства.

Для более углубленного изучения комбинаторики следует обратиться к литературе, указанной в последнем разделе.

§1. Множества и операции над ними

1. Предварительные замечания

Предполагается, что читателю известны такие понятия, как множества, элементы множества, способы задания множеств, число элементов конечного множества.

В дискретной математике одной из основных является следующая задача: как, зная количество элементов некоторых множеств, вычислить количество элементов других множеств, составленных из первых при помощи некоторых операций.

Примем обозначения: $A, B, C, \ldots$ — множества; $a, b, c, \ldots$ — элементы множеств; $a \in A$ („a есть элемент A“), $a \notin A$ („a не есть элемент A“) — принадлежность и непринадлежность элемента множеству; $\#A$ — число элементов множества A.

Примеры: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $B = \{x \mid x$ — целое число $\}$ (читается: „B — множество x таких, что x — целое число“) или $B = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Операции над множествами

Два множества считаются *равными* между собой, если каждый элемент первого является элементом второго и, наоборот, каждый элемент второго является элементом первого: $A = B$.

Если A и B — множества, то множество C, содержащее те и только те элементы, которые входят либо в A, либо в B, называется ***суммой***, или ***объединением*** множеств A и B:

$$C = A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ или } a \in B\}.$$

Операция объединения удовлетворяет ***коммутативному*** и ***ассоциативному*** законам:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Первое из этих равенств вытекает из определения, второе равенство — из того, что $A \cup (B \cup C)$ и $(A \cup B) \cup C$ состоят из одних и тех же элементов, принадлежащих A или B или C. Поэтому в такой ситуации можно опустить скобки: $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A$ или $x \in B$ или $x \in C\}$. Точно также можно рассматривать сумму любого конечного числа множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, не расставляя скобок, и это будет множество, в которое входят все элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a \mid a \in A_1 \text{ или } a \in A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } a \in A_n\}.$$

Чем отличается сумма множеств от обычного сложения чисел? Рассмотрим пример: $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$. Число элементов в каждом из двух слагаемых равно 3, а число элементов в объединении этих множеств равно $4 < 3+3$.

Еще одно отличие: для суммы множеств справедлив такой необычный закон — $A \cup A = A$.

Следствие. $A \cup A \cup \ldots \cup A = A$. *(Объединение любого числа одинаковых множеств совпадает с этим множеством.)*

Множество C, которое состоит из элементов, принадлежащих одновременно множествам A и B, называется *пересечением* множеств A и B: $C = A \cap B = \{a \mid a \in A$ и $a \in B\}$. Например, $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — множества, то их пересечение определяется так: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{a \mid a \in A_1$ и $a \in A_2$ и $\ldots$ и $a \in A_n\}$. Пересечение множеств удовлетворяет таким же законам, что и объединение:

$$A \cap B = B \cap A, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cap A = A.$$

Операции $\cup$ и $\cap$ удовлетворяют также *дистрибутивному* закону: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Пересечение множеств часто сопоставляют с операцией умножения чисел, но, в отличие от числовых операций, для которых справедлив только один дистрибутивный закон: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, для множеств имеется еще один: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\lhd$ Пусть $a \in A \cup (B \cap C)$. Тогда $a \in A$ или $a \in B \cap C$. Следовательно, можно утверждать, что $a \in A$ или $a \in B$, и в то же время, что $a \in A$ или $a \in C$. Таким образом, $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Рассуждения, доказывающие $a \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies a \in A \cup (B \cap C)$, аналогичны. $\rhd$

Упражнение 1. Докажите первый закон дистрибутивности.

3. Пустое множество. Универсум

Множество $A \cap B$ может быть не определено, если A и B не имеют общих элементов. Чтобы избежать этого, рассматривают пустое множество, обозначаемое $\varnothing$. Пустое множество по определению не содержит ни одного элемента. Так что можно записать $A \cap B = \varnothing$, если A и B не имеют общих элементов. Такие множества A и B называются *дизъюнктными* (*непересекающимися*). Пустое множество играет роль 0 в операциях над множествами:

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

А что играет роль 1? Если рассматриваются множества, содержащие элементы определенного типа, например, только числовые множества, то множество, содержащее все элементы данного типа, называется *универсальным* множеством, или *универсумом*, и обозначается U. Так как всякий элемент a, принадлежащий множеству A, обязательно принадлежит и универсуму U, то

$$A \cup U = U, \qquad A \cap U = A.$$

Множество C, содержащее те и только те элементы, которых нет в A, называется *дополнением* множества A: $C = \overline{A} = \{a \mid a \notin A\}$. Множество A вместе со своим дополнением $\overline{A}$ удовлетворяет законам: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$.

Дважды примененная операция дополнения приводит к исходному множеству: $\overline{\overline{A}} = A$. Пустое множество и универсум являются взаимно дополнительными множествами: $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$.

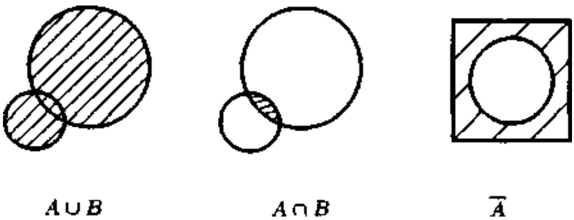
Операция дополнения связана с объединением и пересечением знаменитыми законами *де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

◁ Имеет место следующая цепочка равносильных утверждений: $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x$ не принадлежит ни A, ни $B \iff x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. ▷

Упражнение 2. Докажите второй закон де Моргана.

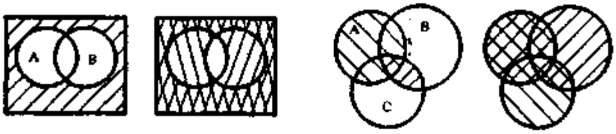
4. Диаграммы Эйлера



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $\overline{A}$

Рис. 1. Диаграммы Эйлера операций над множествам

Наглядно операции над множествами можно иллюстрировать, изображая множества в виде кругов, так называемых *диаграмм Эйлера* (см. рис. 1 и 2).



а) $\overline{A \cup B} \;=\; \overline{A} \cap \overline{B}$ б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Рис. 2. Диаграммы Эйлера к а) 1-му закону де Моргана; б) 2-му закону дистрибутивности

Упражнение 3. Постройте диаграммы Эйлера к 1-му закону дистрибутивности и ко 2-му закону де Моргана.

Реже используются другие операции над множествами; среди них отметим *разность* множеств $A \setminus B$ и *симметрическую разность* множеств $A \triangle B$:

$$
\begin{aligned}
A \setminus B &= A \cap \overline{B} = \{a \mid a \in A \text{ и } a \notin B\}, \\
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= \{a \mid a \in \text{точно одному из множеств } A \text{ и } B\}.
\end{aligned}
$$

Упражнение 4. Постройте диаграммы Эйлера операций $\setminus$ и $\triangle$.

5. Формула включений и исключений

Условимся обозначать количество элементов множества A символом $\#A$. (Иногда используется обозначение $|A|$.) Соответствующим понятием для бесконечных множеств является мощность множества.

Зададимся вопросом: как найти число элементов суммы двух или нескольких множеств, если известно число элементов каждого множества? Начнем с формулы для двух множеств.

Лемма 1. *Если A и B — непересекающиеся множества, то*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

◁ Каждый элемент $A \cup B$ в этом случае принадлежит либо только A, либо только B. ▷

Лемма 2. *В общем случае для произвольных множеств A и B*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

◁ $\#A + \#B$ — число, которое получим, перечислив сначала все элементы A, а затем все элементы B. Но тогда общие элементы (их число $\#(A \cap B)$) будут перечислены дважды, т.е. $\#A + \#B = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$. ▷

Л е м м а 3. *Для произвольного множества A в универсуме U*

$$\#\overline{A} = \#U - \#A.$$

◁ Следует из законов $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$, откуда $\#A + \#\overline{A} = \#U$. ▷

Из доказанных лемм можно получить формулы для числа элементов суммы произвольного числа множеств.

Т е о р е м а 1. *Для трех множеств A, B и C:*

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#A \cap B - \#A \cap C - \#B \cap C + \#A \cap B \cap C.$$

◁ $\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup (B \cup C)) = \#A + \#B \cup C - \#A \cap (B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#B \cap C - \#(A \cap B) \cup (A \cap C) = \#A + \#B + \#C - \#B \cap C - [\#A \cap B + \#A \cap C - \#(A \cap B \cap C)]$; остается только раскрыть скобки. ▷

Доказанная формула называется формулой включений и исключений, так как в ней для каждого элемента подсчитывается, сколько раз он включается и сколько исключается.

Пример (задача о плохой погоде). В августе 12 дней было холодно, 8 дней шел дождь, 4 дня дул сильный ветер, 5 дней было холодно и дождливо, 3 дня — холодно и ветрено, 2 дня — дождливо и ветрено, наконец, в 1 холодный день шел дождь и дул сильный ветер. Сколько было плохих дней в августе?

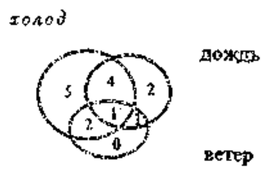


Рис. 3. Дни плохой погоды

Решение (см. рис. 3). $\#A \cup B \cup C = 12 + 8 + 4 - 5 - 3 - 2 + 1 = 15$.

С л е д с т в и е. *Число элементов в универсуме U, не принадлежащих ни одному из множеств A, B, C, равно*

$$\#U - \#A - \#B - \#C + \#A \cap B + \#A \cap C + \#B \cap C - \#(A \cap B \cap C).$$

Пример. Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Универсум $U = [1, 100]$ состоит из 100 чисел; множество A четных чисел имеет 50 элементов; множества B и C, состоящие из чисел, кратных 3 и 5 соответственно, имеют мощности $\#B = [\frac{100}{3}] = 33$

и $\#C = [\frac{100}{5}] = 20$ (квадратные скобки здесь обозначают целую часть числа). Далее, множество $A \cap B$ состоит из чисел, кратных 6; множества $A \cap C$ и $B \cap C$ — кратных 10 и 15; наконец, множество $A \cap B \cap C$ — из чисел, кратных $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Таким образом, $\#A \cap B = [\frac{100}{6}] = 16$, $\#A \cap C = [\frac{100}{10}] = 10$, $\#B \cap C = [\frac{100}{15}] = 6$, $\#A \cap B \cap C = [\frac{100}{30}] = 3$. Поэтому ответ получается вычислением $100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26$.

Для четырех множеств A, B, C, D формула включений и исключений будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#A + \#B + \#C + \#D - \#A \cap B - \#A \cap C - \\ -\#A \cap D - \#B \cap C - \#B \cap D - \#C \cap D + \#A \cap B \cap C + \\ +\#A \cap B \cap D + \#A \cap C \cap D + \#B \cap C \cap D - \#A \cap B \cap C \cap D.\end{gathered}$$

В общем случае, для произвольного количества множеств, справедлива

Т е о р е м а 2. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые множества, то*

$$\begin{gathered}\#A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n - \#A_1 \cap A_2 - \\ -\#A_1 \cap A_3 - \ldots - \#A_{n-1} \cap A_n + \#A_1 \cap A_2 \cap A_3 + \ldots + \\ +\#A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n + \ldots + (-1)^{n-1} \#A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n.\end{gathered} \tag{*}$$

◁ Перепишем доказываемую формулу в виде:

$$\begin{aligned}\#A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S_1(A_1, A_2, \ldots, A_n) - S_2(A_1, A_2, \ldots, A_n) + \\ + \ldots + (-1)^{n-1} S_n(A_1, A_2, \ldots, A_n),\end{aligned}$$

где $S_k(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ — сумма чисел $\#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям ровно k различных множеств, выбранных среди A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Проведем доказательство по индукции.

Формула $(*)$ доказана для $n = 2$. Предположим, что эта формула верна для $(n-1)$ множеств A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, и докажем ее для n множеств:

$$\begin{gathered}\#A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \#A_1 + \#(A_2 \cup \ldots \cup A_n) - \#A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\ = \#A_1 + \#(A_2 \cup \ldots \cup A_n) - \#(A_1 \cap A_2) \cup \ldots \cup (A_1 \cap A_n) = \\ = \#A_1 + [S_1(A_2, \ldots, A_n) - S_2(A_2, \ldots, A_n) + \ldots + \\ +(-1)^{n-2} S_{n-1}(A_2, \ldots, A_n)] - [S_1(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) - \\ -S_2(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-2} S_{n-1}(A_1 \cap A_2, \ldots, A_1 \cap A_n)].\end{gathered}$$

Сгруппируем теперь слагаемые так:

$$\#A_1 + S_1(A_2, \ldots, A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \ldots + \#A_n = S_1(A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

$$S_2(A_2,\ldots,A_n)+S_1(A_1\cap A_2,\ldots,A_1\cap A_n)=\#A_1\cap A_2+\ldots+$$
$$+\#A_1\cap A_n+\#A_2\cap A_3+\ldots+\#A_{n-1}\cap A_n=S_2(A_1,A_2,\ldots,A_n),$$

точно так же

$$S_k(A_2,\ldots,A_n)+S_{k-1}(A_1\cap A_2,\ldots,A_1\cap A_n)=S_k(A_1,A_2,\ldots,A_n),$$

наконец,

$$S_{n-1}(A_1\cap A_2,\ldots,A_1\cap A_n)=\#A_1\cap A_2\cap A_1\cap A_3\cap\ldots\cap A_1\cap A_n=$$
$$=\#A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=S_n(A_1,A_2,\ldots,A_n). \quad \triangleright$$

Следствие. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые множества, U — универсум. Тогда число элементов в U, не принадлежащих ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, равно:*

$$\#\overline{(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)}=\#U-\#A_1-\#A_2-\ldots-\#A_n+\#A_1\cap A_2+$$
$$+\#A_1\cap A_3+\ldots+\#A_{n-1}\cap A_n-\ldots+(-1)^n\#A_1\cap\ldots A_n.$$

$\triangleleft$ Следует из леммы 3 — достаточно взять в качестве $A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ и применить формулу включения-исключения. $\triangleright$

§2. Подмножества и сочетания

1. Подмножества

Множество B называется *подмножеством* (или *частью*) множества A, если любой элемент множества B является элементом множества A. Это обозначается так: $B\subset A$. Говорят также, что B включено (содержится) в A, или что A содержит B ($A\supset B$).

Множество B называется *собственным* подмножеством (или *правильной* частью) множества A, если $B\subset A$ и B не совпадает ни с A, ни с $\varnothing$. Включение B в A называется в этом случае строгим.

Всегда имеют место включения: $\varnothing\subset A$, $A\subset A$, $A\subset U$.

Если задано множество A, из всех его подмножеств можно образовать новое множество $P(A)$ — множество всех подмножеств множества A (или *булеан* множества A): $P(A)=\{x \mid x\subset A\}$.

Например:

1) $A=\{a,b\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$; $\#A=2$, $\#P(A)=4=2^2$.

2) $A=\{a,b,c\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$; $\#A=3$, $\#P(A)=8=2^3$.

Закономерность, подмеченную в этих примерах: если $\#A = n$, то $\#P(A) = 2^n$, можно проверить и для других значений n: если $A = \{a\}$, то $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ состоит из 2 элементов; для $A = \varnothing$ получим $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, что соответствует формуле $2^0 = 1$.

Если множество имеет n элементов, будем называть его n-множеством; соответственно подмножество с k элементами — k-подмножеством. Множество всех k-подмножеств множества A обозначим $P_k(A) = \{x \mid x \subset A, \#x = k\}$.

Например: $A = \{a, b, c\}$, $P_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

2. Число сочетаний

Теперь нас будет интересовать такая задача: сколько k-подмножеств содержится в n-множестве? Т.е. если $\#A = n$, чему равно $\#P_k(A)$? Обозначим решение этой задачи C_n^k. Часто k-подмножества n-множества называют *сочетаниями* k элементов из n, поэтому символ C_n^k читается: „число сочетаний (по) k из n". Вычислим это число. Удобно будет воспользоваться обозначением $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Т е о р е м а 1. *Число всех k-подмножеств n-множества равно*

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

◁ k-подмножество можно построить из $(k-1)$-подмножества, добавляя к нему любой из остальных $(n-k+1)$ элементов n-множества A; $(k-1)$-подмножеств имеется C_n^{k-1}, следовательно, можно получить таким способом $(n-k+1)C_n^{k-1}$ k-подмножеств. Но не все они будут разными, так как каждое k-подмножество можно получить k способами: добавляя один из его k элементов к тому $(k-1)$-подмножеству, которое получено его исключением. (Например, подмножество bcd может быть получено из bc добавлением d, из bd добавлением c, из cd добавлением b.) Поэтому вычисленное нами число в k раз больше, чем число C_n^k k-подмножеств. Из $kC_n^k = (n-k+1)C_n^{k-1}$ получаем $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$, $C_n^{k-1} = \frac{n-k+2}{k-1}C_n^{k-2}$, т.е. $C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)}C_n^{k-2}$, и продолжая заменять C_n^i на C_n^{i-1}, получим окончательно: $C_n^k = \dfrac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\ldots(n-1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 2}C_n^1$. Остается заметить, что число 1-подмножеств $C_n^1 = n$. ▷

Примеры: 1) $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$. 2) $C_{36}^5 = \frac{36 \cdot 35 \cdot \ldots \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5} = 376992$.

3) В шахматном турнире играли n участников, и каждые 2 шахматиста сыграли 1 раз. Сколько партий всего было сыграно в турнире? Ответ: $C_n^2 = n(n-1)/2$.

4) Диагонали выпуклого n-угольника расположены так, что никакие 3 из них не пересекаются в одной точке, отличной от вершины. Сколько имеется точек пересечения диагоналей?

Решение. Обозначим искомое число d_n. Ясно, что $d_3 = 0$, $d_4 = 1$, $d_5 = 5$. Далее будем рассуждать так. Каждой точке пересечения однозначно соответствует пара диагоналей, пересекающихся в ней, а каждой диагонали — пара вершин многоугольника (рис. 4). Чтобы получить точку пересечения, надо выбрать 4 вершины из n. Следовательно, точек пересечения диагоналей столько же, сколько сочетаний по 4 из n вершин, т.е. $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.

Для 7-угольника это $C_7^4 = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$.

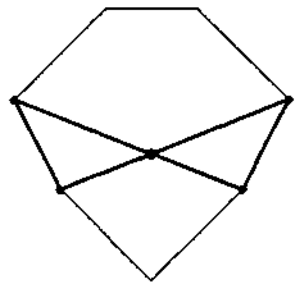


Рис. 4

3. Свойства чисел сочетаний

Свойство 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (число k-подмножеств в n-множестве совпадает с числом $(n-k)$-подмножеств того же множества).

$\triangleleft$ $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$; но возможно и другое доказательство. Установим взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $P_k(A)$ и $P_{n-k}(A)$, где $\#A = n$, следующим образом: если $x \in P_k(A)$, то $\overline{x} \in P_{n-k}(A)$, и наоборот, если $x \in P_{n-k}(A)$, то $\overline{x} \in P_k(A)$. (Имеется в виду: x — подмножество множества A, $\overline{x}$ — его дополнение в A.) Следовательно, у этих множеств одинаковое количество элементов: $\#P_k(A) = \#P_{n-k}(A)$. $\triangleright$

Свойство 2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

$\triangleleft$ Первый способ доказательства такой же, как и свойства 1:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}[k + (n-k)] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Другой способ. Пусть A — n-элементное множество, $a \in A$. Все k-подмножества разобьем на 2 группы: подмножества, содержащие a, и подмножества, не содержащие a. Число подмножеств в 1-й группе равно C_{n-1}^{k-1}, так как каждое такое подмножество получено присоединением элемента a к некоторому $(k-1)$-подмножеству $(n-1)$-множества $A \setminus \{a\}$; во 2-й группе будет C_{n-1}^k элементов, так как каждое такое подмножество есть k-подмножество $(n-1)$-множества $A \setminus \{a\}$. Таким образом, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. ▷

Примеры. 1) $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$; $C_n^n = C_n^0 = 1$ (по свойству 1).
2) $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$; $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$ (по свойству 1).

4. Треугольник Паскаля

Из свойства 2 вытекает следующий простой способ вычисления значений C_n^k:

$$C_0^0 = 1;$$
$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

Последовательно вычисляем значения всех C_n^k с фиксированным нижним индексом n, сначала для $n = 1$, затем для $n = 2$, 3 и т.д., образуя из значений C_n^k с одинаковым n строку треугольника.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Каждое число в треугольнике получается сложением двух чисел, стоящих непосредственно выше него (кроме крайних чисел в каждой строке, которые равны 1). Этот треугольник носит название треугольника Паскаля (или арифметического треугольника).

С помощью треугольника Паскаля можно доказать еще несколько свойств чисел C_n^k.

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$

◁ Каждое число, стоящее в n-й строке, является суммой двух чисел, стоящих выше (в $(n-1)$-й строке): $C_n^0 = C_{n-1}^0$, $C_n^2 = C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$, $C_n^4 = C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4$, ..., откуда получим

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_{n-1}^0 + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) + (C_{n-1}^3 + C_{n-1}^4) + \ldots.$$

Точно так же $C_n^1 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1$, $C_n^3 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3$, $C_n^5 = C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5$, ..., и

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) + (C_{n-1}^4 + C_{n-1}^5) + \ldots.$$

Обе суммы равны, что и требовалось доказать. ▷

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

◁ Введем обозначение $S_n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$. Заметим, что из доказательства свойства 3 следует $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = S_{n-1}$. Тогда $S_n = (C_n^0 + C_n^2 + \ldots) + (C_n^1 + C_n^3 + \ldots) = 2S_{n-1}$, т.е. $S_n = 2S_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot S_{n-2} = \ldots = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots}_{n \text{ раз}} \cdot S_0 = 2^n$ (поскольку $S_0 = 1$). ▷

Т е о р е м а 2. *Число всех подмножеств n-множества A равно 2^n:* $\#P(A) = 2^{\#A}$. (Поэтому иногда множество $P(A)$ обозначают 2^A.)

◁ Булеан $P(A)$ представляется в виде объединения непересекающихся классов $P(A) = P_0(A) \cup P_1(A) \cup P_2(A) \cup \ldots \cup P_n(A)$, и утверждение теоремы вытекает из свойства 4, так как

$$\#P(A) = \#P_0(A) + \#P_1(A) + \#P_2(A) + \ldots + \#P_n(A) =$$
$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \quad ▷$$

Пример. Для множества $A = \{a, b, c\}$ будем иметь $P_0(A) = \{\varnothing\}$, $P_1(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $P_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $P_3(A) = \{A\}$; числа элементов этих множеств суть $1, 3, 3, 1$, что составляет 4-ю строку арифметического треугольника.

5. Метод путей

Проиллюстрируем этот метод на примере решения следующей задачи.

Задача. Рассмотрим прямоугольную сетку в декартовой системе координат на плоскости Oxy, состоящую из линий $x = 0, 1, \ldots, m$; $y = 0, 1, \ldots, n$. Чему равно число кратчайших путей, ведущих по отрезкам этой сетки из точки $(0, 0)$ в точку (m, n)? Иначе говоря, сколько имеется способов достичь из точки $O(0, 0)$ точку $P(m, n)$, двигаясь только вправо и вверх (см. рис. 5)?

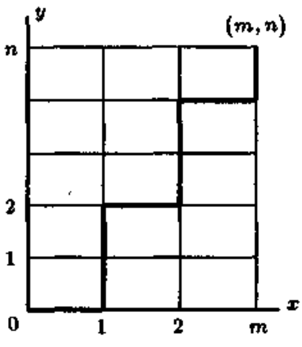


Рис. 5

Решение. Каждый кратчайший путь состоит из $m + n$ отрезков единичной длины, причем среди них m горизонтальных и n вертикальных. Разные пути отличаются порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков; поэтому общее число путей равно числу способов, которыми можно выбрать n вертикальных отрезков из общего числа $m + n$ отрезков, т.е. C_{m+n}^n.

Вместо вертикальных можно было бы выбрать m горизонтальных отрезков, тогда получилось бы C_{m+n}^m, откуда следует $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$, что равносильно $C_n^k = C_n^{n-k}$ (свойство 1).

Проведем с помощью этого метода еще одно, третье доказательство свойства 2.

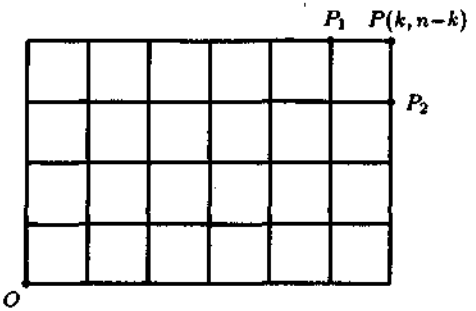


Рис. 6

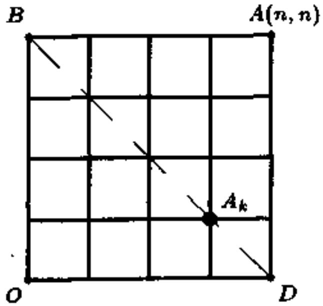


Рис. 7

◁ $C_n^k = C_{k+(n-k)}^k$ = числу кратчайших путей из начала $O(0,0)$ в точку $P(k, n-k)$. В точку P можно попасть, лишь минуя точку P_1 или P_2 (см. рис. 6), причем все пути, ведущие в P, разбиваются на 2 непересекающихся подмножества: идущие сначала в P_1, а затем из P_1 в P; и пути, идущие сначала в P_2. Так как координаты промежуточных точек $P_1(k-1, n-k)$, $P_2(k, n-k-1)$, получим $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. ▷

Свойство 5. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

◁ C_{2n}^n равно числу кратчайших путей из точки $O(0,0)$ в точку $A(n,n)$ (см. рис. 7). Каждый путь проходит через одну из точек $A_k(k, n-k)$, лежащих на диагонали BD квадрата $OBAD$. Число путей из O в A_k равно C_n^k, число путей из A_k в A в силу симметрии такое же; поэтому число путей из O в A, проходящих через точку A_k, равно $(C_n^k)^2$; общее количество путей получится суммированием по всем $k \in [0, n]$. ▷

§3. Упорядоченные множества и размещения

1. Порядок

Пусть A — некоторое множество и относительно любой пары его элементов a и b можно сказать $a \preccurlyeq b$ (a предшествует b) или $a \not\preccurlyeq b$ (a не предшествует b). Кроме того, пусть выполнены следующие свойства, распространяющиеся на любые $a, b, c \in A$:

1) $a \preccurlyeq a$ (*рефлексивность*);

2) $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a$ влечет $a = b$ (*антисимметричность*);

3) $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c$ влечет $a \preccurlyeq c$ (*транзитивность*).

Тогда говорят, что на A определен *частичный порядок*, а само множество A называется *частично упорядоченным* множеством. Часто вместо знака $\preccurlyeq$ используется другой символ, а понятие предшествования наполняется конкретным содержанием.

Например, если m и n целые числа, условимся писать $m \mid n$, когда m делит n; тогда для элементов множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ справедливо: $1 \mid 1$, $1 \mid 2$, $1 \mid 3$, $1 \mid 4$, $2 \mid 2$, $2 \mid 4$, $3 \mid 3$, $4 \mid 4$. Очевидно, выполнены все три свойства ($a \mid a$; $a \mid b$, $b \mid a \implies a = b$; $a \mid b$, $b \mid c \implies a \mid c$), поэтому отношение „$m$ делит n“ является частичным порядком на множестве A (и даже на множестве всех натуральных чисел).

Если выполнено еще свойство

4) для любых $a, b \in A$: $a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$ (*дихотомия*),

то говорят, что на множестве A определен *линейный порядок*, а само множество A называется *упорядоченным*. В этом случае сравнимы любые два элемента из A. Пример линейного порядка — обычное отношение $\leqslant$ на множестве целых (или вещественных) чисел.

Знак $\preccurlyeq$ может быть перевернут: если $a \preccurlyeq b$ (a „предшествует“ b), то пишут также $b \succcurlyeq a$ (b „следует за“ a); для отношения делимости — $m \mid n$ (m делит n) эквивалентно записи $n \vdots m$ (n делится на m). Иногда отбрасывают черточку внизу: если $a \preccurlyeq b$, но $a \neq b$, то пишут $a \prec b$ (a „строго предшествует“ b) или $b \succ a$ (b „строго следует за“ a); в этом случае говорят, что определен *строгий порядок* $\prec$. Иначе строгий порядок можно определить, потребовав соблюдение следующих свойств, распространяющихся на любые $a, b, c \in A$:

1) $a \not\prec a$ (нерефлексивность);

2) $a \prec b$ влечет $b \not\prec a$ (несимметричность);

3) $a \prec b$ и $b \prec c$ влечет $a \prec c$ (транзитивность).

Если выполнено еще 4-е свойство:

4) для любых $a, b \in A$ имеет место одно из трех: $a \prec b$, $b \prec a$ или $a = b$ (трихотомия), то говорят, что $\prec$ — *строгий линейный порядок*.

Упражнение 1. Проверьте, что отношение $<$ на множестве целых (или вещественных) чисел является строгим линейным порядком.

2. Диаграммы Хассе

У конечного упорядоченного n-множества A все его элементы можно перенумеровать числами из отрезка $[1, n]$: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, так, чтобы $a_i \preccurlyeq a_j \iff i \leqslant j$. Все элементы при этом выстраиваются в линейную цепочку, наглядно изображающую упорядоченное множество A и называемую диаграммой Хассе (рис. 8).

Каждый элемент на этой диаграмме представляется точкой; точки соединяются линиями; если из одной точки идет путь в другую, следующий все время в определенном направлении (например, вправо), то первая точка считается предшествующей второй точке.

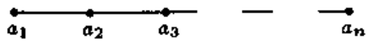


Рис. 8. Диаграмма Хассе.

Для частично упорядоченных множеств диаграммы Хассе оказываются более сложными.

Примеры. 1. Диаграммы Хассе для множеств $A = \{1,2,3,4\}$ и $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, упорядоченных отношением „делит“, изображены на рис. 9.

Рис. 9. Диаграмма Хассе отношения „делит“: а) на множестве [1, 4]; б) на множестве [1, 8].

2. Диаграммы Хассе для множеств $P(\{a,b\})$ и $P(\{a,b,c\})$ с отношением включения $\subset$ в качестве частичного порядка — на рис. 10.

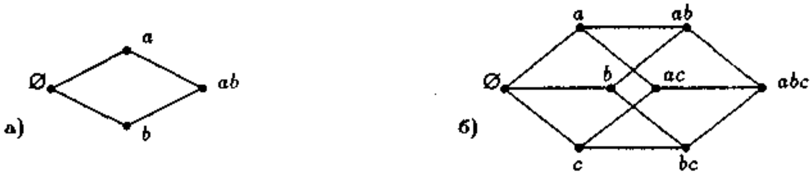


Рис. 10. Диаграмма Хассе отношения включения: а) для множества $P(\{a,b\})$; б) для множества $P(\{a,b,c\})$.

Упражнение 2. Начертите диаграмму Хассе для множества $P(\{a,b,c,d\})$ с частичным порядком $\subset$.

3. Перестановки. Число перестановок

Пусть A — конечное множество, $\#A = n$. Если на A задан линейный порядок $\preccurlyeq$, то соответствующее упорядоченное множество будем обозначать $A_{\preccurlyeq}$. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком. Даже если все элементы одни и те же: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, но различен их порядок $\preccurlyeq_1$ и $\preccurlyeq_2$, то упорядоченные множества $A_{\preccurlyeq_1}$ и $A_{\preccurlyeq_2}$ различны. Будем обозначать упорядоченные множества с указанием следования их элементов в круглых скобках: $A_{\preccurlyeq_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $A_{\preccurlyeq_2} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов, а сами элементы берутся из одного и того же множества A, называются перестановками множества A.

Пример: перестановки множества $A = \{a, b, c\}$ суть (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Все перестановки множества A образуют множество, называемое *симметризатором* множества A:

$$S(A) = \{A_{\preccurlyeq} \mid \preccurlyeq \text{ — линейный порядок на } A\}.$$

Число всех перестановок n-множества обозначается P_n; таким образом, если $\#A = n$, то $\#S(A) = P_n$.

Теорема 1. $P_n = n!$.

◃ Будем последовательно выбирать элементы множества A и размещать их в линейном порядке на n местах: сначала на 1-е место, затем на 2-е и т.д. На 1-е место можно поставить любой из n элементов; после того, как 1-е место заполнено, останется $(n-1)$ элементов, так что 2-е место может быть занято любым из этих $(n-1)$ элементов; на 3-е место останется $(n-2)$ элементов-кандидатов и т.д. Следовательно, имеется $n(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ способов упорядочить множество A. ▹

Задачи. 1. Найти $\#S(A)$, если $\#A = 4$. Ответ: $P_4 = 4! = 24$.

1а. Сколько способов разместить на полке 4 книги? Ответ: $P_4 = 24$.

1б. Сколько слагаемых в определителе 4 порядка? Ответ: каждое слагаемое соответствует перестановке чисел 1,2,3,4, поэтому всего слагаемых $P_4 = 24$.

2. Сколькими возможными способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, чтобы каждое четное число имело четный номер?

◃ Четные числа ставятся на четные места, нечетные — на нечетные, стало быть, подмножества $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ и $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ упорядочиваются отдельно; и в том, и в другом случае имеется $n!$ способов; общее число перестановок равно $n!\cdot n! = (n!)^2$. ▹

3. Сколькими способами можно рассадить n гостей за круглым столом (рис. 11)? Ответ: $n!$.

3a. Сколькими способами можно расставить n чисел $1, 2, \ldots, n$ по окружности?

◁ Так как расстановки чисел не различаются, если повернуть окружность вокруг центра или если перевернуть ее относительно диаметра, то ответом будет $n!/(n \cdot 2) = (n-1)!/2$. ▷

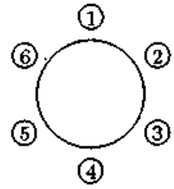


Рис. 11

4. Принцип произведения

В доказательстве теоремы 1 и при решении задачи 2 использовались следующие соображения:

Принцип произведения (в двукратном выборе). *Если некоторый выбор A можно осуществить m различными способами, и для любого из этих способов некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.*

Задача 1. В шахматном турнире 10 участников. Сколькими способами могут быть распределены 1-е и 2-е места? Ответ: $10 \cdot 9$.

Задача 2. Чему равно количество двузначных четных чисел?

◁ Первая цифра может быть выбрана 9 способами, вторая — 5 способами, поэтому ответ таков: $9 \cdot 5 = 45$. ▷

Принцип произведения (в общем случае). *Если требуется выполнить одно за другим k действий, причем 1-е может быть выполнено n_1 способами, 2-е — n_2 способами и т.д., k-е — n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Задача 3. Найти число 4-значных чисел, у которых все цифры различны.

◁ Первая цифра может быть выбрана 9 способами, вторая — также 9 способами, третья — 8 способами, четвертая — 7 способами.

Ответ: $9^2 \cdot 8 \cdot 7 = 4456$. ▷

5. Число размещений

Число всех неупорядоченных k-подмножеств n-множества, как мы знаем, равно C_n^k и называется числом сочетаний k из n.

Рассмотрим теперь задачу о подсчете упорядоченных k-подмножеств n-множества A. Все такие подмножества образуют множество

$$S_k(A) = \{B_{\preccurlyeq} \mid B \subset A, \#B = k, \preccurlyeq \text{ — линейный порядок на } B\}.$$

Обозначим $A_n^k = \#S_k(A)$ и будем называть эту величину числом размещений k из n.

Т е о р е м а 2. $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = k! \cdot C_n^k$.

◁ 1-й способ доказательства. Построение упорядоченного k-подмножества n-множества можно произвести следующим образом. Выберем первый элемент одним из n возможных способов, затем второй элемент — для него найдется $(n-1)$ способов выбора и т.д.; наконец, для k-го элемента останется $(n-k+1)$ способов. Таким образом, по принципу произведения получаем $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

2-й способ доказательства. Сначала выберем неупорядоченное k-подмножество, а затем упорядочим его. Каждое из C_n^k неупорядоченных k-подмножеств можно упорядочить $k!$ способами; поэтому $A_n^k = k! \cdot C_n^k$. ▷

Пример. Решение задачи 3 предыдущего пункта может быть записано так: $A_9^4 - A_9^3$.

Упражнение 3. В клубе 15 членов. Из их числа избираются президент клуба, секретарь и казначей. Сколько существует способов избрания?

§4. Отображения

1. Способы задания отображений

Отображение множества A в множество B — это соответствие, при котором каждому элементу $a \in A$ сопоставляется однозначно определенный элемент $b \in B$. Элемент b называется *образом* элемента a, элемент a — *прообразом* элемента b. Если φ — отображение множества A в B, то используется запись $\varphi : A \to B$ или $A \xrightarrow{\varphi} B$; сопоставление элементу $a \in A$ его образа $b \in B$ при отображении φ обозначается так: $\varphi(a) = b$ или $\varphi : a \mapsto b$.

Существует несколько способов задания отображения: описательно, с помощью таблиц, графиков и стрелочных схем.

Табличное задание отображения (рис. 12) общеизвестно и не нуждается в комментариях. Одно замечание: если множество A конечно, таблица оказывается конечной, и ее можно изобразить в упрощенной форме $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$.

x	a_1	a_2	$\cdots$
$\varphi(x)$	$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	$\cdots$

Рис. 12. Таблица отображения.

Графически отображение задается таким образом: проведем два взаимно перпендикулярных луча, на один из них нанесем точки, соответствующие элементам множества A, на другой — точки-элементы множества B; затем из этих точек восстановим перпендикуляры к лучу, на котором они лежат, и отметим точки пересечения соответствующих линий (рис. 13). Заметим, что на каждой вертикальной линии (если луч, соответствующий множеству B, располагается вертикально) будет отмечена ровно 1 точка.

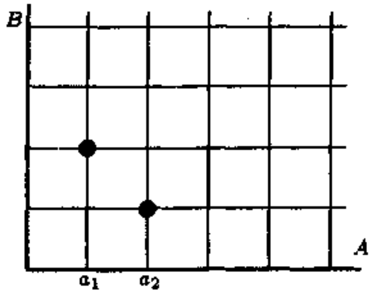


Рис. 13. График отображения

Рассмотрим еще задание отображения с помощью стрелочной схемы. Элементы множеств A и B изображаются различными точками плоскости: для A — слева, для B — справа, а соответствующие при отображении φ точки соединяются стрелкой слева направо (рис. 14). Из каждой точки-элемента множества A будет исходить в точности 1 стрелка.

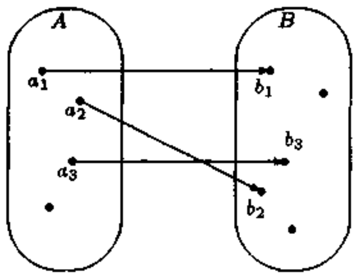
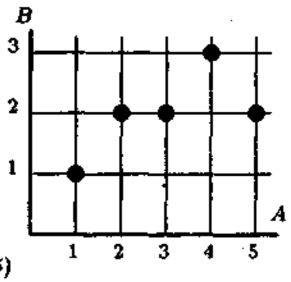


Рис. 14. Стрелочная схема

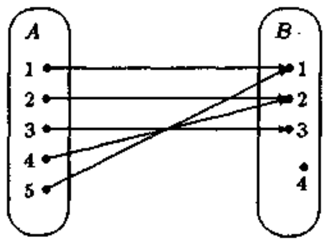
Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tau : A \to B$ — отображение, заданное правилом: $\tau(a)$ = число делителей a. Графические представления отображения τ изображены на рис. 15.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 1\,2\,2\,3\,2 \end{pmatrix}$$

а)



б)



в)

Рис. 15. Представление отображения: а) подстановкой; б) графиком; в) схемой

Теорема 1. *Число всех отображений конечного m-множества A в конечное n-множество B равно n^m.*

◁ $\#A = m$, $\#B = n$; образ $\varphi(a_1)$ можно выбрать n способами, так как им может быть любой элемент множества B; $\varphi(a_2)$ — также n способами и т.д.; по принципу произведения получим $\#\{A \to B\} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m\,\text{раз}}$. (Здесь $\{A \to B\}$ обозначает множество всех отображений из A в B; часто используется также обозначение B^A.) ▷

2. Инъекция

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *взаимно однозначным* отображением (*инъективным* отображением, или *инъекцией*), если разным элементам множества A соответствуют при этом отображении разные образы, т.е. $a_1 \neq a_2 \implies \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ для любых $a_1, a_2 \in A$. При обозначении инъекции стрелка видоизменяется: $A \overset{\varphi}{\rightarrowtail} B$.

Пример. Инъекцией является отображение φ из множества $\mathbb{Z}$ всех целых чисел в множество $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел, $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrowtail 2\mathbb{Z}$, $a \mapsto 8a$.

Инъективные отображения при их изображении характеризуются следующим:

1) в нижней строке таблицы каждый элемент множества B встречается не более 1 раза;

2) на любой горизонтальной прямой графика отмечено не более 1 точки (рис. 16, а);

3) на схеме в каждую точку множества B входит не более 1 стрелки (рис. 16, б).

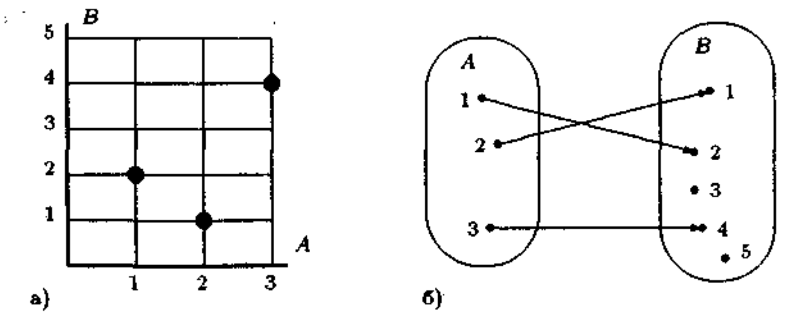


Рис. 16. *Инъективное отображение:* а) график; б) схема

Эти замечания могут быть сформулированы в виде предложения.

Предложение 1. *При инъективном отображении $\varphi : A \rightarrowtail B$ любой элемент $b \in B$ имеет не более одного прообраза.*

◁ Если бы у элемента b существовало 2 различных прообраза $a_1 \neq a_2$, то $\varphi(a_1) = b$ и $\varphi(a_2) = b$, что противоречит определению инъекции. ▷

П р е д л о ж е н и е 2. *Если существует инъекция из A в B, и множества A, B конечны, то $\#A \leqslant \#B$.*

◁ Следует из предложения 1. ▷

3. Сюръекция

Отображение $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ называется отображением *на* B (*сюръективным* отображением, или *сюръекцией*), если у любого элемента множества B имеется хотя бы один пробраз , т.е. для любого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $\varphi(a) = b$. Сюръекция также обозначается с помощью специальной стрелки: $A \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} B$.

Пример. Пусть $A = \mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $B = \mathbb{R}^*$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Сюръекцией будет отображение $\varphi : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^*$, $x \mapsto x^2$. (Для любого $y \in \mathbb{R}^*$ в качестве прообраза можно взять $x = \sqrt{y}$).

Сюръекции при их изображении характеризуются следующим:

1) в нижней строке таблицы встречаются все элементы множества B;

2) на любой горизонтальной прямой графика отмечено не менее 1 точки (рис. 17, а);

3) на схеме в каждую точку множества B входит хотя бы 1 стрелка (рис. 17, б).

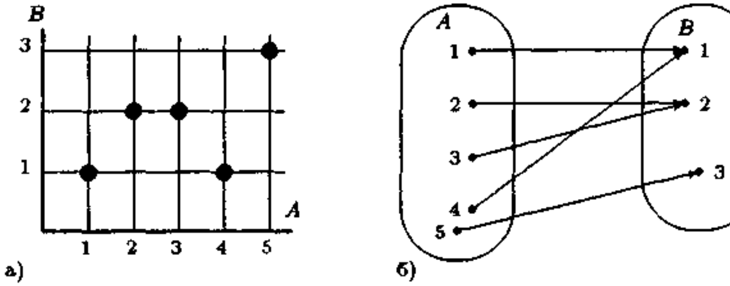


Рис. 17. Сюръективное отображение: а) график; б) схема

Все это соответствует определению, согласно которому при сюръективном отображении $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ любой элемент $b \in B$ имеет не менее одного прообраза. Отсюда следует

П р е д л о ж е н и е 3. *Если существует сюръекция из A на B и множества A, B конечны, то $\#A \geqslant \#B$.*

4. Биекция

Отображение $\varphi : A \to B$ называется *взаимно однозначным* отображением *на* все множество B (*биективным* отображением, или *биекцией*), если φ является одновременно инъективным и сюръективным отображением. (Обозначается: $A \overset{\varphi}{\leftrightarrow} B$.)

У каждого элемента $a \in A$ при биективном отображении существует единственный образ $\varphi(a) \in B$, и, обратно, каждому элементу $b \in B$ соответствует единственный прообраз, обозначаемый $\varphi^{-1}(b)$. Очевидно, что соответствие $\varphi^{-1} : B \to A$, $b \mapsto \varphi^{-1}(b)$ также является биективным отображением. Оно называется обратным отображением по отношению к φ.

Примеры. 1) $\varphi : \mathbb{Z} \leftrightarrow 2\mathbb{Z}$, $a \mapsto 2a$;

2) $\varphi : \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \leftrightarrow e^x$ ($\mathbb{R}^+$ — множество положительных вещественных чисел), обратное отображение $\varphi^{-1} : y \mapsto \ln y$.

Упражнение 1. Выберите область определения и область значений отображения $x \mapsto \sin x$ так, чтобы оно оказалось а) инъективным; б) сюръективным; в) биективным.

Теорема 2. *(а) Число всех биекций n-множества A на n-множество B равно $n!$. (б) Число всех инъекций m-множества A в n-множество B равно $A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$.*

(Напомним, что символом A_n^m обозначается число размещений m из n.)

$\triangleleft$ (б): образ $\varphi(a_1)$ можно выбрать n способами, образ $\varphi(a_2)$ — $(n-1)$ способами и т.д. до $\varphi(a_m)$, выбираемого $(n-m+1)$ способами. (а) вытекает из (б), так как $A_n^n = n!$. $\triangleright$

В случае биекции предложения 2 и 3 дают следующее важное следствие.

Принцип биекции. *Если существует биекция $\varphi : A \leftrightarrow B$ и множества A и B конечны, то $\#A = \#B$.*

Принцип биекции часто используется, чтобы установить равенство мощностей двух множеств — достаточно построить какую-либо биекцию между ними. Докажем таким способом формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$\triangleleft$ Пусть $\#A = n$, тогда $C_n^k = \#P_k(A)$, $C_n^{n-k} = \#P_{n-k}(A)$. Построим биекцию $\varphi : P_k(A) \leftrightarrow P_{n-k}(A)$. Если $T \in P_k(A)$, то T состоит из k элементов, а $A \setminus T$ будет состоять из $(n-k)$ элементов. Положим $\varphi(T) = A \setminus T$. Очевидно, что φ (дополнение множества T в множестве A) является биекцией. Согласно принципу биекции $\#P_k(A) = \#P_{n-k}(A)$. $\triangleright$

5. Разложения целых чисел

В качестве еще одного применения принципа биекции рассмотрим следующую задачу:

Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ (где n, k — заданные целые положительные числа)?

Каждое такое решение называется *разложением* числа n.

Сформулируем определение иначе: разложением числа n называется представление n в виде упорядоченной суммы положительных целых.

Пример. Существует 8 разложений числа 4 : 1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 3+1, 1+3, 2+2, 4.

Упражнение 2. Найдите все разложения числа 5.

Разложение числа n, содержащее k слагаемых, называется k-разложением n. Обозначим множество всех k-разложений n через $R_k(n)$.

Т е о р е м а 3. *Число всех k-разложений n равно C_{n-1}^{k-1}.*

◁ Определим отображение $\theta : R_k(n) \to P_{k-1}([1, n-1])$, где $[1, n-1] = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ по правилу: если $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ — k-разложение числа n, то $\theta(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}\}$. Так как все $a_i > 0$, получаем $k-1$ различных элементов отрезка $[1, n-1]$: $1 \leqslant a_1 < a_1 + a_2 < \ldots < a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} \leqslant n-1$.

Докажем, что θ — инъекция. Если $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ и $a_1' + a_2' + \ldots + a_k'$ — два различных k-разложения числа n, то , даже если $a_1 = a_1'$, $a_2 = a_2'$, найдется первый индекс i такой, что $a_i \neq a_i'$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_i \neq a_1' + a_2' + \ldots + a_i'$.

Докажем теперь, что θ — сюръекция. С помощью θ можно получить любое $(k-1)$-подмножество отрезка $[1, n-1]$, а именно подмножество $\{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}\}$ при условии $b_1 < b_2 < \ldots < b_{k-1}$ получается из разложения $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 - b_1$, $\ldots$, $a_k = n - b_{k-1}$.

Итак, θ — биекция, и из принципа биекции заключаем $\#R_k(n) = \#P_{k-1}([1, n-1]) = C_{n-1}^{k-1}$. ▷

Пример. Число всех 3-разложений 4 равно $C_3^2 = 3$ (ср. с предыдущим примером).

С л е д с т в и е 1. *Число всех разложений числа n равно 2^{n-1}.*

◁ Так как множество всех разложений числа n можно представить в виде объединения непересекающихся множеств, состоящих из k-разложений при различных $k \in [1, n]$: $R(n) = R_1(n) \cup R_2(n) \cup \ldots \cup R_n(n)$, то $\#R(n) = \#R_1(n) + \#R_2(n) + \ldots + \#R_n(n) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$. ▷

Пример. Имеется в точности $2^{4-1} = 8$ разложений числа 4.

k-разложение числа n схематично изображают, рисуя в строку n точек и $(k-1)$ разделяющих их вертикальных черточек. Например, разложение 1+2+1+1+3+2 числа 10 может быть изображено так:

$$\cdot \mid \cdot\ \cdot \mid \cdot \mid \cdot \mid \cdot\ \cdot\ \cdot \mid \cdot\ \cdot$$

Образом этого разложения при отображении θ является 5-подмножество $\{1,3,4,5,8\}$ множества $[1,9]$. Всего имеется C_9^5 разложений числа 10 на 6 слагаемых.

6. Уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

Разложения целых чисел можно трактовать как решения уравнений вида

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \tag{1}$$

в положительных целых числах.

Т е о р е м а 4. *Число всех решений уравнения (1) в положительных целых числах равно C_{n-1}^{k-1}; в неотрицательных целых числах равно C_{n+k-1}^{k-1}.*

◁ Первое утверждение вытекает из теоремы 3. Второе утверждение может быть выведено из первого. Для этого поставим в соответствие каждому решению $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($x_i \geqslant 0$) уравнения (1) решение $y_1, y_2, \ldots, y_k$ ($y_i > 0$) уравнения $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n + k$ по правилу $y_i = x_i + 1$. Это соответствие, очевидно, является биекцией; так что остается воспользоваться принципом биекции. ▷

Пример. Уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ имеет $C_4^2 = 6$ положительных целых решений и $C_7^2 = 21$ неотрицательных целых решений. Дополнительными решениями, содержащими 0, будут: 6 решений вида 4+1+0, 6 решений вида 3+2+0 и 3 решения вида 5+0+0.

С л е д с т в и е 2. *Число всех решений неравенства*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqslant n \tag{2}$$

в неотрицательных целых числах равно C_{n+k}^{k}.

◁ Добавим еще одно неотрицательное целое неизвестное x_{k+1}, равное $n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)$, так что теперь вместо неравенства будем иметь уравнение вида (1), но с $k+1$ неизвестным. ▷

Упражнение 3. Определите число всех решений неравенства (2) в положительных целых числах.

§5. Мультимножества

1. Определение

Понятие мультимножества можно объяснить так: это множество с повторяющимися элементами, например, $M_1 = \{1,1,1,2,5,5\}$, $M_2 = \{a,c,c,c,c,d,e,e\}$. Дадим строгое определение.

Пусть S — некоторое множество; *мультимножеством* M на множестве S называется функция $\nu : S \to N$ (из множества S в множество натуральных чисел).

Значение $\nu(x)$ показывает, сколько раз элемент $x \in S$ включается в M: это может быть 0, 1 и большее число. Если $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, число $\#M = \nu(x_1) + \nu(x_2) + \ldots + \nu(x_n)$ называется мощностью мультимножества M. В первом из рассмотренных выше примеров

$$S_1 = \{1,2,3,4,5\},\ \nu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \#M_1 = \nu_1(1) + \ldots + \nu_1(5) = 6,$$

а во втором

$$S_2 = \{a,b,c,d,e\},\ \nu_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \#M_2 = \nu_2(a) + \ldots + \nu_2(e) = 8.$$

Таким образом, мультимножества всегда строятся на каком-то множестве, как на фундаменте: элементы M выбираются из числа элементов множества S, но возможны повторения. Множество S называется *носителем* мультимножества M.

Если

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ \nu(x_i) = a_i,\ \text{ т.е. } \nu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

то часто используют обозначение $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}\}$, например, $M_1 = \{1^3, 2^1, 3^0, 4^0, 5^2\}$. Можно пропускать элементы с верхним индексом 0, так как они не принадлежат мультимножеству, и опускать верхний индекс 1: $M_1 = \{1^3, 2, 5^2\}$; $M_2 = \{a, c^4, d, e^2\}$. Похожая запись используется в разложении целого числа на множители: $300 = 2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5 = 2^2\cdot3\cdot5^2$.

2. Действия над мультимножествами

Пересечение мультимножеств $M_1 \cap M_2$ есть мультимножество M, для которого функция ν строится по соответствующим M_1 и M_2 функциям ν_1 и ν_2 следующим образом:

$$\nu(x) = \min(\nu_1(x), \nu_2(x)), \quad x \in M,$$

например, $\{1^3, 2, 5^2\} \cap \{1^2, 2^2, 4^3, 5\} = \{1^2, 2, 5\}$.

Объединение мультимножеств $M_1 \cup M_2$ определяется аналогично, как мультимножество M с функцией

$$\nu(x) = \max(\nu_1(x), \nu_2(x)), \quad x \in M,$$

например, $\{1^3, 2, 5^2\} \cup \{1^2, 2^2, 4^3, 5\} = \{1^3, 2^2, 4^3, 5^2\}$.

Эти две операции над мультимножествами удовлетворяют таким же законам, что и соответствующие операции над множествами; а именно законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Докажем один из законов дистрибутивности:

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).$$

◁ Левая часть определяется функцией $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3))$, правая — функцией $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3))$, причем ради краткости будем опускать аргумент x в $\nu(x)$, $\nu_1(x)$ и т.д.

Рассмотрим последовательно два случая:

1) ν_1 больше ν_2 и ν_3; тогда $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3)) = \nu_1$, $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3)) = \nu_1$, т.е. $\mu = \nu$;

2) ν_1 не больше ν_2 или ν_3; для определенности предположим, что наибольшим из трех чисел является ν_3. Вычисляя μ и ν, получим $\mu = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \max(\nu_1, \nu_3)) = \min(\max(\nu_1, \nu_2), \nu_3) = \max(\nu_1, \nu_2)$; $\nu = \max(\nu_1, \min(\nu_2, \nu_3)) = \max(\nu_1, \nu_2)$, так что и в этом случае оказывается $\mu = \nu$. ▷

Упражнение 1. Докажите другой закон дистрибутивности.

Упражнение 2. Исследуйте возможность определения операций разности и дополнения для мультимножеств.

Отметим, что симметрическую разность можно определить с помощью функции $\nu(x) = |\nu_1(x) - \nu_2(x)|$.

3. Простые числа и разложение на множители

Здесь мы рассмотрим пример применения понятий, введенных в этом и предыдущих пунктах, к арифметике.

Простым числом называется натуральное число, большее 1, которое делится только на 1 и на себя. Первые простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... Каждое натуральное число можно разложить на простые множители: $300 = 3\cdot 100 = 3\cdot 10\cdot 10 = 3\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 5$. Если на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ задать отношение частичного порядка: $a \preccurlyeq b$, если $a \mid b$, то каждому простому числу строго предшествует только 1 (рис. 18).

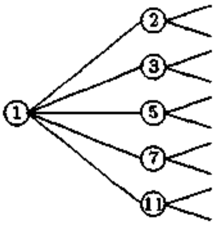


Рис. 18.

Числа, большие 1 и не являющиеся простыми, относятся к составным. Таковы все четные, кроме 2; все кратные 3, кроме самой 3; все кратные 5, кроме 5 и т.д. Отсюда вытекает способ выделения простых чисел из некоторого начального отрезка натурального ряда, например, из множества первых 40 чисел (решето Эратосфена):

$$\underline{2}\ \ \underline{3}\ \ \cancel{4}\ \ \underline{5}\ \ \cancel{6}\ \ 7\ \ \cancel{8}\ \ \cancel{9}\ \ \cancel{10}\ \ 11\ \ \cancel{12}\ \ 13\ \ \cancel{14}\ \ \cancel{15}\ \ \cancel{16}\ \ 17\ \ \cancel{18}\ \ 19\ \ \cancel{20}$$
$$\cancel{21}\ \ \cancel{22}\ \ 23\ \ \cancel{24}\ \ \cancel{25}\ \ \cancel{26}\ \ \cancel{27}\ \ \cancel{28}\ \ 29\ \ \cancel{30}\ \ 31\ \ \cancel{32}\ \ \cancel{33}\ \ \cancel{34}\ \ \cancel{35}\ \ \cancel{36}\ \ 37\ \ \cancel{38}\ \ \cancel{39}\ \ \cancel{40}$$

Достаточно, очевидно, остановиться на наибольшем простом числе, не превосходящем $\sqrt{40}$, т.е. 5, так как следующее простое число 7, если и является делителем некоторого числа $n \leqslant 40$, то $n = 7k$, и другой делитель k обязательно меньше $\frac{40}{7} < 6$.

Задача: подсчитать количество простых чисел в $[2,100]$, не пользуясь решетом Эратосфена.

◁ Будем использовать метод включения-исключения. Искомое число N равно $(S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4) + 4$, где $S_0 = \#[2, 100] = 99$, S_1 равно сумме количества четных чисел, количества кратных 3, количества кратных 5 и количества кратных 7, т.е.

$$S_1 = \left[\tfrac{100}{2}\right] + \left[\tfrac{100}{3}\right] + \left[\tfrac{100}{5}\right] + \left[\tfrac{100}{7}\right] = 117;$$
$$S_2 = \left[\tfrac{100}{2\cdot 3}\right] + \left[\tfrac{100}{2\cdot 5}\right] + \left[\tfrac{100}{2\cdot 5}\right] + \left[\tfrac{100}{3\cdot 5}\right] + \left[\tfrac{100}{3\cdot 7}\right] + \left[\tfrac{100}{5\cdot 7}\right] = 45;$$
$$S_3 = \left[\tfrac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right] + \left[\tfrac{100}{2\cdot 3\cdot 7}\right] + \left[\tfrac{100}{2\cdot 5\cdot 5}\right] + \left[\tfrac{100}{3\cdot 5\cdot 7}\right] = 6;\ \ S_4 = 0;$$

окончательно находим $N = (99 - 117 + 45 - 6) + 4 = 25$. ▷

Поставим в соответствие каждому натуральному n мультимножество M_n, состоящее из его простых множителей, причем каждый множитель повторяем требуемое количество раз: $M_2 = \{2\}$, $M_{10} = \{2, 5\}$, $M_{54} = \{2, 3^3\}$, так как $54 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$. Будем считать $M_1 = \varnothing$. Обозначим $\mathbb{P}$ множество всех простых чисел. Отображение $n \mapsto M_n$ является биекцией множества $\mathbb{N}$ на множество всех мультимножеств с носителем $\mathbb{P}$.

Действительно, разложение числа n на простые множители $p^{a_1} \dots p^{a_k}$

однозначно определяет мультимножество $M_n = \{p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_k^{a_k}\}$.

Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $M_a \cap M_b = M_c$, где число c — наибольший общий делитель a и b: $c = \text{НОД}(a, b)$. Точно так же $M_a \cup M_b = M_d$, где $d = \text{НОК}(a, b)$ — наименьшее общее кратное a и b. Например, если $a = 54$, $b = 300$, то $M_a = \{2, 3^3\}$, $M_b = \{2^2, 3, 5^2\}$, $\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot 3 = 6$, $\text{НОК}(a, b) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$.

Упражнение 3. Выведите из обоих законов дистрибутивности утверждения, относящиеся к НОД и НОК. Проверьте их на примерах.

4. Подсчет числа мультимножеств

k-мультимножеством n-множества будем называть мультимножество мощности k на множестве из n элементов. Здесь k может быть больше, чем n, в отличие от случая k-подмножеств n-множества, где предполагалось, что $k \leqslant n$. Обозначим F_n^k число всех k-мультимножеств n-множества. Например, $F_3^2 = 6$, так как в 3-множестве $\{1, 2, 3\}$ имеются следующие 2-мультимножества: $\{1, 1\}$, $\{2, 2\}$, $\{3, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$; $F_3^3 = 10$, $F_3^4 = 15$ (в 3-множестве $\{1, 2, 3\}$ имеются следующие 4-мультимножества — перечислим их без фигурных скобок:

$$1^4, 2^4, 3^4; 1^3 2, 1^3 3, 2^3 1, 2^3 3, 3^3 1, 3^3 2; 1^2 2^2, 1^2 3^2, 2^2 3^2; 1^2 23, 2^2 13, 3^2 12\,).$$

Упражнение 4. Перечислите все 3-мультимножества 3-множества.

Т е о р е м а 1. *Для неотрицательных целых k и n имеет место*

$$F_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

$\lhd$ Пусть $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — n-множество; числа $\nu(x_i) = a_i$ можно выбрать произвольно, лишь бы выполнялось равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k. \qquad (*)$$

Тогда $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n}\}$ — k-мультимножество на S. Следовательно, число всех k-мультимножеств n-множества совпадает с числом решений уравнения $(*)$ в целых неотрицательных числах: $F_n^k = C_{k+n-1}^{n-1}$; но по свойству 1 чисел сочетаний $C_{k+n-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$. $\rhd$

Пример. $F_3^2 = C_4^2 = 6$, $F_3^3 = C_5^3 = C_5^2 = 10$, $F_3^4 = C_6^4 = C_6^2 = 15$; последние пятнадцать 4-мультимножеств соответствуют пятнадцати решениям уравнения $a_1 + a_2 + a_3 = 4$ ($n = 3$, $k = 4$): 4+0+0, 0+4+0, 0+0+4; 3+1+0, 3+0+1, 1+3+0, 1+0+3, 0+3+1, 0+1+3; 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2; 2+2+0, 2+0+2, 0+2+2.

§6. Биномиальная и мультиномиальная формулы

1. Формула бинома

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные. Рассмотрим формулы

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2,$$
$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Мы можем заметить, что каждое слагаемое в точности соответствует некоторому подмножеству множества $\{x_1, x_2\}$ или $\{x_1, x_2, x_3\}$. Так и в общем случае: существует биекция множества слагаемых правой части равенства

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) =\\ &= 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n +\\ &\quad + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n + \ldots + x_1x_2\ldots x_n\end{aligned} \tag{1}$$

на булеан множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, причем слагаемое 1 соответствует пустому подмножеству, слагаемое с k сомножителями соответствует k-подмножеству. Поэтому число слагаемых с k сомножителями равно C_n^k. Подставим в (1) $x_1 = x$, $x_2 = x$, $\ldots$, $x_n = x$:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k. \tag{2}$$

Доказанная формула (2) называется *биномиальной формулой*, а числа C_n^k часто называются *биномиальными коэффициентами*.

Следствие. $(a+b)^n =$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{3}$$

◁ $(a+b)^n = \left[a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, и далее, применяя формулу (2), получим (3). ▷

Пример. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Упражнение 1. Раскройте $(a+2b)^6$.

2. Мультиномиальные коэффициенты

Биномиальные коэффициенты мы можем интерпретировать таким образом. Отнесем каждый элемент n-множества $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ к одной из двух категорий: k элементов к первой и $(n-k)$ — ко второй. Элементы первой категории образуют k-подмножество $T = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\} \subset S$; следовательно, число способов такого разбиения равно C_n^k.

Пусть теперь имеется не 2, а m категорий $K_1, K_2, \dots, K_m$; кроме того, пусть $a_1, a_2, \dots, a_m$ — неотрицательные целые числа, дающие разложение числа n: $n = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Пусть $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ — число способов отнесения каждого из элементов n-множества S к одной из категорий $K_1, K_2, \dots, K_m$ так, что в категорию K_i попадет в точности a_i элементов. Заметим, что $C_n^k = P_n(k, n-k)$. Числа $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ называются ***мультиномиальными коэффициентами***.

Обычно элементы множества S представляют в виде n различимых шаров (например, шаров, пронумерованных числами от 1 до n), а категории — в виде m различимых (например, пронумерованных или раскрашенных) коробок. Тогда $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m)$ равно числу способов разложить шары по коробкам так, чтобы i-я коробка содержала a_i шаров.

Теорема 1. $P_n(a_1, a_2, \dots, a_m) = \dfrac{n!}{a_1!\, a_2! \dots a_m!}$.

◁ Отберем из n элементов a_1 элементов $C_n^{a_1}$ способами в категорию K_1, затем из оставшихся $(n - a_1)$ отберем a_2 элементов $C_{n-a_1}^{a_2}$ способами в категорию K_2, из оставшихся $(n - a_1 - a_2)$ отберем a_3 элементов $C_{n-a_1-a_2}^{a_3}$ способами в категорию K_3 и т.д. Общее число распределений по категориям согласно принципу произведения равно

$$C_n^{a_1} C_{n-a_1}^{a_2} C_{n-a_1-a_2}^{a_3} \dots C_{n-a_1-\dots-a_{m-2}}^{a_{m-1}}$$

(в последнюю категорию попадут все оставшиеся элементы, так что выбирать не придется). Выражая числа сочетаний через факториалы, получим

$$P_n(a_1, \dots, a_m) = \frac{n!}{a_1!\,(n-a_1)!} \frac{(n-a_1)!}{a_2!\,(n-a_1-a_2)!} \frac{(n-a_1-a_2)!}{a_3!\,(n-a_1-a_2-a_3)!} \times$$

$$\times \dots \cdot \frac{(n-a_1-\dots-a_{m-2})!}{a_{m-1}!\,(n-a_1-\dots-a_{m-1})!} = \frac{n!}{a_1!\,a_2! \dots a_m!}. \ ▷$$

3. Перестановки мультимножества

Мультиномиальные коэффициенты появляются также при подсчете перестановок мультимножества M. (Напомним, что если M — обычное множество, $\#M = n$, то число всех перестановок множества M равно $n!$). *Перестановка мультимножества* M определяется как линейное упорядочение всех экземпляров, входящих в M. Если M — мультимножество на некотором множестве A, то функция $\nu : A \to \mathbb{N}$ указывает, сколько раз каждый элемент $x \in A$ появится в перестановке; а именно $\nu(x)$ раз. Множество всех перестановок мультимножества M будем обозначать $S(M)$.

Пример. Мультимножество $M_1 = \{1, 1, 2, 3\}$ имеет 12 перестановок: 1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, 2131, 3121, 2113, 3112, 2311, 3211; мультимножество $M_2 = \{1, 1, 2, 2\}$ — только 6 перестановок: 1122, 1212, 1221, 2121, 2112, 2211.

Теорема 2. *Если $M = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_m^{a_m}\}$ — мультимножество, $\#M = n$, то $\#S(M) = P_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.*

(В формулировке теоремы явно указано, сколько экземпляров каждого элемента x_i входит в мультимножество M: именно $a_i = \nu(x_i)$, причем $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$.)

$\triangleleft$ Отнесем элементы множества $[1, n]$ к m категориям $K_1, K_2, \ldots, K_m$ следующим способом: если в перестановке мультимножества M экземпляр x_i появляется на j-м месте, то число $j \in [1, n]$ поместим в категорию K_i. Таким образом мы установим биекцию между множеством $S(M)$ всех перестановок мультимножества M и множеством всех распределений n чисел по m категориям с заданной мощностью каждой категории $\#K_i = a_i$. $\triangleright$

В частности, число всех перестановок обычного n-множества равно $P_n(1, 1, \ldots, 1) = n!$.

Задача. Сколькими способами можно переставить буквы в слове „колокол"?

$\triangleleft$ Так как данное слово является одной из перестановок мультимножества $\{к^2, л^2, о^3\}$, то ответом будет $P_7(2, 2, 3) = \frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$. $\triangleright$

Упражнение 2. Найдите количество всех перестановок мультимножеств $M_1 = \{1, 1, 2, 3\}$ и $M_2 = \{1, 1, 2, 2\}$.

4. Мультиномиальная формула

Теорема 3. *Сумма m слагаемых в степени n может быть пред-*

ставлена в виде

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{a_1+a_2+\ldots+a_m=n} P_n(a_1,a_2,\ldots,a_m)\, x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m}. \tag{4}$$

◁ При перемножении выражения $(x_1+x_2+\ldots+x_m)$ на себя n раз получим сумму произведений вида $d_1d_2\ldots d_n$, где каждое d_j равно некоторому x_i. При приведении подобных членов соберутся вместе слагаемые вида $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m}$, причем их столько, сколько возможно перестановок мультимножества $\{x_1^{a_1},x_2^{a_2},\ldots,x_m^{a_m}\}$, т.е. $P_n(a_1,a_2,\ldots,a_m)$. ▷

Формула (4) называется мультиномиальной формулой; в силу теоремы 1 ее можно переписать так:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n=\sum_{a_1+a_2+\ldots+a_m=n} \frac{n!}{a_1!\,a_2!\,\ldots\,a_m!}\, x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_m^{a_m}.$$

Отметим, что до приведения подобных членов имеется m слагаемых; после приведения — в мультиномиальной формуле — C_{n+m-1}^{m-1} слагаемых.

Примеры. При $m=2$ получается биномиальная формула, в ней $C_{n+1}^1=(n+1)$ слагаемое: $(x_1+x_2)^n=C_n^0x_1^n+C_n^1x_1^{n-1}x_2+\ldots+C_n^nx_2^n$.

Многочлен $(x_1+x_2+x_3)^2$ должен содержать $C_4^2=6$ слагаемых вида $\frac{2!}{2!}x_1^2=x_1^2$, $\frac{2!}{1!1!}x_1x_2$ и аналогичные слагаемые с другими индексами: $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ (слагаемые соответствуют различным решениям уравнения $a_1+a_2+a_3=2$: 2+0+0, 0+2+0, 0+0+2, 1+1+0, 1+0+1, 0+1+1).

Упражнение 3. Раскройте выражение $(a+b+c)^3$. Сколько получится слагаемых (после приведения подобных членов)?

5. Биномиальные тождества

Вернемся к биномиальным коэффициентам C_n^k. Мы знаем такие их свойства:

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$;

2) $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$;

3) $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$;

4) $C_n^0+C_n^2+\ldots=C_n^1+C_n^3+\ldots$.

Докажем эти свойства, исходя из формулы бинома.

◁ Свойство 3) можно доказать таким образом: в формуле (2) положим $x=1$; тогда получим $2^n=(1+1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$. Свойство 4): положим

$x=-1$; тогда $0=(1-1)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Свойство 2) : C_n^k является коэффициентом при x^k в $(1+x)^n$; но $(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} = (1+x)\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k-1}$. ▷

Упражнение 4. Докажите свойство 1) самостоятельно.

Вот еще одно биномиальное тождество:

5) $n2^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$, т.е. $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

◁ Продифференцируем формулу бинома (2); в результате мы получим: $n(1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$; теперь подставим $x=1$. ▷

Упражнение 5. Докажите: $n\,(n-1)\,2^{n-2} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k-1)\,C_n^k$.

§7. Бинарные отношения

1. Декартово произведение множеств

Пусть A, B — множества. Множество всех упорядоченных пар (a,b), где $a \in A$, $b \in B$, называется *декартовым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. („Упорядоченность" пары означает, что первым элементом в паре всегда является некоторый элемент множества A, а вторым — элемент множества B.)

Пример. $A = \{a,b\}$, $B = \{1,2,3\}$. В этом случае

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

Можно рассматривать несколько множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$: их декартовым произведением $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ будет являться множество всех упорядоченных последовательностей (n-ок, или кортежей) элементов, взятых по одному из каждого множества, причем в фиксированном порядке: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in A_i$.

Пример. Пусть $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\alpha,\beta\}$. В этом случае $A \times B \times C = \{(1,a,\alpha),(1,a,\beta),(1,b,\alpha),(1,b,\beta),(2,a,\alpha),(2,a,\beta),(2,b,\alpha),(2,b,\beta),(3,a,\alpha),(3,a,\beta),(3,b,\alpha),(3,b,\beta)\}$.

Естественный вопрос: сколько элементов содержит декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$?

Т е о р е м а 1. *Если* $\#A_1 = k_1,\ \#A_2 = k_2,\ \ldots,\ \#A_n = k_n$, то $\#A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

(В частности, $\#A \times B = (\#A) \cdot (\#B)$.)

◁ Следует из принципа произведения. ▷

В случае, когда все множества в декартовом произведении равны между собой, говорят о *декартовой степени* множества:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}.$$

Например, декартовым квадратом множества $A = \{a, b, c\}$ является $A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

С л е д с т в и е. $\#(A^n) = (\#A)^n$.

Упражнение 1. При каком условии декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ пусто?

2. Определение бинарного отношения

Бинарным отношением на множестве A называется некоторое подмножество R его декартова квадрата $A^2 = A \times A$. Говорят, что $a \in A$ находится в отношении R к элементу $b \in A$, если $(a, b) \in R$; это записывается так: aRb.

Примеры бинарных отношений:

1) на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ отношение „меньше" $<$;

2) на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ отношение делимости $|$;

3) на множестве прямых в пространстве отношение параллельности $\|$;

4) на множестве векторов в пространстве отношение перпендикулярности $\perp$;

5) на множестве всех подмножеств $P(A)$ некоторого множества A отношение включения $\subset$.

Способы задания бинарных отношений таковы:

1) перечисление пар элементов, принадлежащих бинарному отношению. Например, для конечного множества $A = \{1,2,3,4\}$ отношение делимости $|$ может быть задано следующим образом: $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}$.

2) график (см. рис. 19);

3) стрелочная диаграмма (см. рис. 20).

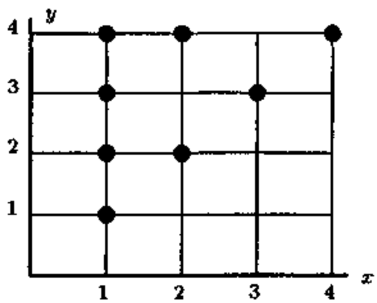


Рис. 19. График отношения $x \mid y$

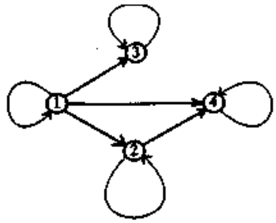


Рис. 20. Диаграмма отношения $x \mid y$

Образуем множество всех бинарных отношений на множестве A; будем обозначать его $B(A)$. Очевидно, $B(A) = P(A \times A)$, откуда сразу вытекает, что, если $\#A = n$, то $\#B(A) = 2^{n^2}$.

Пусть R, S — бинарные отношения на A. Так как бинарное отношение — множество, можно определить включение одного бинарного отношения в другое: $R \subset S$; а также операции над этими бинарными отношениями: $R \cup S$, $R \cap S$, $\overline{R} = (A \times A) \setminus R$; причем автоматически остаются справедливыми все законы для действий над множествами. Надо лишь помнить, что универсум в данном случае — множество $U = A \times A$.

Пример. Пусть R — отношение $\mid$ на множестве $[1,4]$; S — отношение $>$ на том же множестве; T — отношение $\leqslant$. Тогда $R \subset T$, $R \cap S = O$ — пустое отношение (такого обозначения мы будем придерживаться для отличия от $\varnothing$), $R \cap T = R$, $T \cup S = A \times A$, $\overline{S} = T$, $\overline{R} = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$.

3. Произведение отношений

Пусть R, S — отношения из $B(A)$; их произведением $R \cdot S$ называется бинарное отношение, определяемое так:

$$a(RS)b \iff \exists c \in A.\ aRc,\ cSb.$$

Пример. Пусть R — отношение $<$ на $\mathbb{N}$, S есть отношение „быть следующим числом“, т.е. $aSb \iff a = b + 1$; тогда $a(RS)b$ означает: a меньше некоторого c, которое равно $b + 1$, что иначе можно выразить неравенством $a \leqslant b$; итак, RS есть „ $\leqslant$ “.

Рассмотрим еще один пример, связанный с родственными отношениями на множестве людей. Обозначим отношения ближайшего родства: S — сестра, B — брат, R — отец, G — жена, M — муж. Условимся, что запись aSb будет означать „a является сестрой b“ и т.д. Тогда произведения отношений будут обозначать более дальнее родство: SR — тетя (по линии отца), BG — шурин, GB — золовка, SG — свояченица. Заметим, что $RS = R$.

Докажем несколько законов, связанных с произведением отношений:

1) $(RS)T = R(ST)$ (ассоциативность).

$\triangleleft$ $a((RS)T)b \iff \exists c, d.\ aRc,\ cSd,\ dTb$; этому же выражению эквивалентно и $a(R(ST))b$. $\triangleright$

Заметим, что произведение отношений не является коммутативным — лишь в отдельных случаях верно, что $RS = SR$.

Упражнение 2. Приведите пример отношений R и S, для которых $RS \neq SR$, и пример R и S, для которых $RS = SR$.

2) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$, $S(R_1 \cup R_2) = SR_1 \cup SR_2$ (из-за некоммутативности необходимо выписать 2 таких закона дистрибутивности — дистрибутивность справа и дистрибутивность слева).

$\triangleleft$ $a(R_1 \cup R_2)Sb \iff \exists c.\ aR_1 \cup R_2c,\ cSb$; но первое равносильно aR_1c или aR_2c, так что aR_1Sb или $aR_2Sb \iff a(R_1S \cup R_2S)b$; второй закон доказывается совершенно аналогично. $\triangleright$

В доказанных законах дистрибутивности нельзя $\cup$ заменить на $\cap$, так как $a(R_1 \cap R_2)Sb \iff \exists c.\ aR_1c,\ aR_2c,\ cSb$, но в то же время $a(R_1S \cap R_2S)b \iff \exists c.\ aR_1c,\ cSb$ и $\exists d.\ aR_2d,\ dSb$, и в этом случае может не существовать такой элемент c, что для него и aR_1c, и aR_2c, и cSb. Справедливы лишь следующие включения:

3) $(R_1 \cap R_2)S \subset R_1S \cap R_2S$, $S(R_1 \cap R_2) \subset SR_1 \cap SR_2$ (частичная дистрибутивность пересечения относительно произведения).

Упражнение 3. Докажите свойство 3).

4) $R_1 \subset R_2 \implies R_1S \subset R_2S$, $SR_1 \subset SR_2$ (монотонность).

$\triangleleft$ $R_1 \subset R_2 \iff R_1 \cup R_2 = R_1 \implies (R_1 \cup R_2)S = R_1S$, но в силу свойства 2) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$, и из $R_1S \cup R_2S = R_1S$ заключаем, что $R_1S \subset R_2S$. Аналогично получаем второе включение. $\triangleright$

4. Обратное отношение

Пусть R — отношение из $B(A)$; *обратное* отношение R определяется так: $aR^{-1}b \iff bRa$. Например, $(<)^{-1} = (>)$; если R означает „отец“, S — „сын“, то $R^{-1} = S$, $S^{-1} = R$.

Легко доказать следующие свойства:

1) $(R^{-1})^{-1} = R$;

$\triangleleft$ $a(R^{-1})^{-1}b \iff bR^{-1}a \iff aRb$. $\triangleright$

2) $R \subset S \implies R^{-1} \subset S^{-1}$;

3) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

$\triangleleft$ $a(R \cap S)^{-1} b \iff bSa,\ bRa \iff aR^{-1}b,\ aS^{-1}b.$ $\triangleright$

4) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

5) $(ST)^{-1} = T^{-1} \cdot S^{-1}$;

$\triangleleft$ $a(ST)^{-1}b \iff b(ST)a \iff \exists c.\ bSc,\ cTa \iff \exists c.\ aT^{-1}c,\ cS^{-1}b.$ $\triangleright$

Упражнение 4. Докажите свойства 2 и 4.

Пример. Обозначим отношение „быть следующим числом" символом $\oplus$: $a \oplus b \iff a = b + 1$. Мы знаем, что $<\oplus = \leqslant$; тогда из 5): $\oplus^{-1}<^{-1} = \leqslant^{-1}$, т.е. $\ominus> = \geqslant$, где $a \ominus b \iff a = b - 1$ („быть предыдущим числом").

Кроме пустого отношения O, для которого $RO = OR = O$ (каким бы ни было отношение R), существует еще одно важное отношение — *единичное* отношение E: $aEb \iff a = b$; т.е. $E = \{(a,a) \mid a \in A\}$ — множество всех пар с одинаковыми элементами (поэтому E называют также *диагональю* декартова квадрата A). Для любого отношения R: $ER = RE = R$, $E^{-1} = E$.

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

5. Свойства отношений

Мы уже встречались с различными отношениями, которые обладали следующими свойствами:

1) *рефлексивность*: aRa $(\forall a \in A)$, т.е. $E \subset R$;

2) *транзитивность*: $aRb,\ bRc \implies aRc$, т.е. $RR \subset R$;

3) *антисимметричность*: $aRb,\ bRa \implies a = b$, т.е. $R \cap R^{-1} \subset E$;

4) *симметричность*: $aRb \implies bRa$, т.е. $R^{-1} = R$.

График рефлексивного отношения характеризуется тем, что содержит в себе диагональ, симметричного отношения — тем, что он симметричен относительно диагонали, антисимметричного отношения — тем, что, напротив, не содержит ни одной пары точек, симметричной относительно диагонали, кроме точек самой диагонали.

Теорема 2. *Если отношение R обладает одним из свойств: рефлексивностью, транзитивностью, антисимметричностью, симметричностью — то и R^{-1} обладает тем же свойством.*

$\triangleleft$ если $E \subset R$, то $E = E^{-1} \subset R^{-1}$; если $RR \subset R$, то $R^{-1}R^{-1} = (RR)^{-1} \subset R^{-1}$; если $R^{-1} = R$, то $(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$; если $R \cap R^{-1} \subset E$, то $R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subset E$. $\triangleright$

S. Отношения эквивалентности и разбиения множеств

1. Определение отношения эквивалентности

Пусть A — множество. *Отношением эквивалентности* на множестве A называется отношение на A, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Если R — отношение эквивалентности на A, то $E \subset R$, $R^{-1} = R$, $RR \subset R$, откуда $RR = R = R^{-1}$. Часто вместо обозначений aRb или $(a, b) \in R$ в случае отношения эквивалентности используют обозначения $a \overset{R}{\sim} b$ или $a \equiv b \pmod R$ (a эквивалентно b по модулю R). Запишем свойства, характеризующие эквивалентность, используя последний стиль обозначений:

1) $a \equiv a \pmod R$;

2) $a \equiv b \pmod R \implies b \equiv a \pmod R$;

3) $a \equiv b \pmod R$, $b \equiv c \pmod R \implies a \equiv c \pmod R$.

График отношения эквивалентности можно охарактеризовать следующим образом (рис. 21):

1) отмечены все точки, лежащие на диагонали (рефлексивность);

2) каждой отмеченной точке на графике соответствует симметричная с ней относительно диагонали (симметричность);

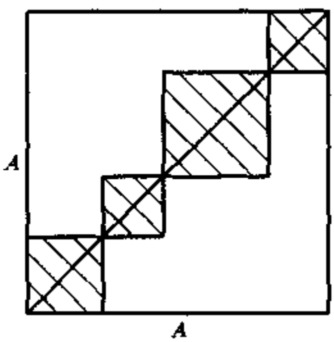


Рис. 21. График отношения эквивалентности.

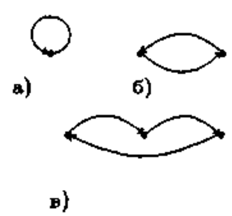


Рис. 22. Диаграмма эквивалентности.

Для полного описания графика отношения эквивалентности остается добавить, что он составлен из попарно непересекающихся квадратов, диагонали которых совпадают с диагональю декартова квадрата.

Для стрелочной диаграммы из свойства рефлексивности вытекает существование петель в каждой точке (рис. 22, а); из симметричности — наличие между каждой парой точек антипараллельных стрелок (рис. 22, б); из транзитивности вытекает, что для любой пары стрелок, таких, что конец первой совпадает с началом второй, существует третья стрелка, имеющая общее начало с первой и общий конец со второй (рис. 22, в).

2. Классы эквивалентности

Если на множестве A задано отношение эквивалентности R, то *классом эквивалентности* элемента $a \in A$ по модулю R называется множество всех $b \in A$, связанных с a отношением R; этот класс эквивалентности обозначается $[a]$ (или C_a). Будем использовать для отношения эквивалентности обозначение $\sim$. Тогда $C_a = \{b \in A \mid b \sim a\}$.

Докажем несколько свойств классов эквивалентности:

1) $a \in C_a$.

◁ $a \sim a$ в силу рефлексивности. ▷

2) если $a \sim b$, то $C_a = C_b$.

◁ Если $x \in C_a$, то $a \sim x$, и по транзитивности $b \sim x$, так что $x \in C_b$; аналогично доказывается обратное. ▷

3) если $a \not\sim b$, то $C_a \cap C_b = \varnothing$.

◁ Предположим противное: пусть $a \not\sim b$, но существует x такое, что $x \in C_a \cap C_b$; тогда $a \sim x$ и $b \sim x$, что влечет за собой по симметричности и транзитивности $a \sim b$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ▷

Упражнение 1. Докажите: если $a \in C_b$, то $b \in C_a$.

3. Разбиения множества

Разбиением множества A называется семейство непустых подмножеств, попарно непересекающихся и в объединении дающих все A. Формально разбиение множества A определяется как множество частей, или блоков $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ множества A, причем:

1) $B_i \neq \varnothing$;

2) $B_i \cap B_j = \varnothing$ (при $i \neq j$);

3) $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$.

Теорема 1. *Всякое отношение эквивалентности на множестве A задает разбиение множества A, блоками которого являются классы эквивалентности. И обратно, всякому разбиению множества A соответствует отношение эквивалентности, классы эквивалентности которого совпадают с блоками разбиения.*

$\triangleleft$ Если задано отношение эквивалентности $\sim$, то в силу свойств 2) и 3) два класса эквивалентности C_a и C_b или совпадают, или не пересекаются; таким образом, все классы эквивалентности $C_1, C_2, \ldots, C_k$ образуют множество попарно непересекающихся частей множества A. В силу свойства 1) каждый класс эквивалентности не пуст, а все они в сумме дают A.

Обратное утверждение теоремы доказывается проверкой свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности для отношения $a \sim b$, определенного следующим образом: $a \sim b \iff a$ и b принадлежат одному блоку разбиения. $\triangleright$

Упражнение 2. Проверьте эти свойства.

Разбиение множества A, соответствующее отношению эквивалентности $\sim$, называется *фактор-множеством* множества A по отношению эквивалентности $\sim$ и обозначается $A/\sim$. *Системой представителей* $A_\sim$ отношения эквивалентности $\sim$ на множестве A называется подмножество, содержащее ровно по 1 элементу из каждого класса эквивалентности. Очевидно, что $\#(A/\sim) = \#A_\sim$.

Примеры.

1). Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, p — целое, отличное от 0; рассмотрим отношение R на $\mathbb{Z}$: $aRb \iff p \mid a - b$. Это отношение эквивалентности, называемое отношением сравнения по модулю p и обозначаемое $a \equiv b \pmod p$. Все числа b из класса эквивалентности, который называется в данном случае классом вычетов по модулю p, могут быть представлены в виде $b = a + kp$ (k — произвольное целое). Отдельный класс вычетов по модулю p, содержащий a, может быть обозначен $a+\mathbb{Z}p$; таким образом, $\mathbb{Z}/\sim = \{\mathbb{Z}p, 1+\mathbb{Z}p, \ldots, (p-1)+\mathbb{Z}p\}$. В качестве системы представителей можно взять множество $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Упражнение 3. Докажите, что отношение сравнения по модулю p является отношением эквивалентности.

2). Рассмотрим множество прямых на плоскости. Отношение параллельности $\parallel$ — отношение эквивалентности, так как всякая прямая параллельна самой себе: $l_1 \parallel l_1$, симметричность: $l_1 \parallel l_2 \implies l_2 \parallel l_1$ и транзитивность: $l_1 \parallel l_2, l_2 \parallel l_3 \implies l_1 \parallel l_3$ — очевидны. Каждый класс эквивалентности представляет собой некоторое направление на плоскости и полностью определяется заданием одной прямой из этого класса.

Упражнение 4. Найдите систему представителей для отношения $\parallel$.

3). Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Будем говорить, что $M_1 \sim M_2$, если их абсциссы равны; тогда классами эквивалентности будут множества точек, абсциссы которых равны между собой, т.е. прямые, параллельные оси Oy.

4. Числа Стирлинга и числа Белла

Число разбиений n-множества на k блоков называется *числом Стирлинга* и обозначается $S(n,k)$. Ясно, что $S(n,k) = 0$ при $k > n$, $S(n,0) = 0$; кроме того,
$S(n,1) = 1$, $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$, $S(n,n) = 1$, $S(n,n-1) = C_n^2$.

Упражнение 5. Докажите эти равенства.

Пример. $S(4,3) = 6$. Действительно, существует 6 различных разбиений 4-множества $A = \{a,b,c,d\}$ на 3 блока:
$a|b|cd$, $a|c|bd$, $b|c|ad$, $a|d|bc$, $b|d|ac$, $c|d|ab$.

Т е о р е м а 2. *При* $n > 1$ $S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.

◁ Достаточно ограничиться случаем, когда $0 < k < n$. Чтобы получить разбиение множества $A = [1,n]$ на k блоков, нужно либо 1) разбить множество $[1,n-1] = A \setminus \{n\}$ на k блоков и последний элемент n поместить в один из этих k блоков, либо 2) разбить множество $[1,n-1]$ на $(k-1)$ блок, а из оставшегося элемента n образовать отдельный, k-й блок. ▷

Общее число разбиений n-множества называется *числом Белла* и обозначается $B(n)$. Ясно, что $B(n) = S(n,0) + S(n,1) + \ldots + S(n,n)$. Чтобы эти формулы имели место и при $n = 0$, полагают $S(0,0) = 1$ и $B(0) = 1$. Составим таблицу чисел Стирлинга и Белла.

$S(n,k)$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0
4	0	1	7	6	1	0
5	0	1	15	25	10	1

n	$B(n)$
0	1
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52

(В силу теоремы 2, чтобы получить очередной элемент в этой таблице, стоящее над ним число умножаем на индекс столбца и прибавляем число, стоящее слева, например, 25=3·6+7.)

Пример. $B(3) = 5$, так как существует всего 5 разбиений множества $A = \{a,b,c\}$: $a|b|c$, $ab|c$, $a|bc$, $b|ac$, abc.

Упражнение 6. Найдите все разбиения множества $A = \{a,b,c,d\}$.

Каждому разбиению (согласно теореме 1) соответствует отношение эквивалентности. Поэтому таким же образом можно перечислять все отношения эквивалентности на заданном множестве.

Т е о р е м а 3. $B(n+1) = C_n^0 B(0) + C_n^1 B(1) + C_n^2 B(2) + \ldots + C_n^n B(n)$.

$\triangleleft$ Разбиение множества $A = [1, n+1]$ можно провести в 2 этапа: сначала выбрать блок B, содержащий последний элемент $n+1$, а затем выбрать разбиение оставшегося множества $A \setminus B$. Блок B — непустой, число его элементов заключено в пределах от 1 до $n+1$; следовательно, $A \setminus B$ может содержать от 0 до n элементов множества $[1, n]$, так как $n+1 \notin A \setminus B$ наверняка. Итак, первый шаг, в зависимости от $i = \#A \setminus B$, можно сделать C_n^i способами; второй шаг, разбиение i-множества $A \setminus B$ на блоки, — $B(i)$ способами. Остается использовать принцип произведения и принцип суммы, чтобы получить $\sum_{i=0}^{n} C_n^i B(i)$. $\triangleright$

Примеры. $B(2) = 1 \cdot B(0) + 1 \cdot B(1) = 2$, $B(3) = 1 \cdot B(0) + 2 \cdot B(1) + 1 \cdot B(2) = 5$, $B(4) = 1 \cdot B(0) + 3 \cdot B(1) + 3 \cdot B(2) + 1 \cdot B(3) = 15$ и т.д.

§9. Естественная факторизация отображений

1. Суперпозиция отображений

Рассмотрим отображение $f : A \to B$; можно связать с ним множество пар

$$R_f = \{(a, f(a)) | a \in A\} \subset A \times B,$$

которое определяет некоторое бинарное отношение между элементами множеств A и B. Это отношение обладает свойством:

для любого элемента $a \in A$ существует единственный элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in R$ (*функциональность*).

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Тогда $R_f \subset A \times B$, $R_g \subset B \times C$, и можно определить $R_f \cdot R_g \subset A \times C$:

$$aR_f \cdot R_g c \iff \exists b \in B.\ aR_f b,\ bR_g c.$$

Таким образом, с помощью произведения отношений мы пришли к понятию сложной функции: $c = g(f(a))$, если существует $b \in B$ такое, что $b = f(a)$, $c = g(b)$. Операция построения сложной функции носит название суперпозиции функций (или отображений).

Суперпозицией отображений $f : A \to B$, $g : B \to C$ называется отображение $h = g \cdot f : A \to C$, переводящее a в $g(f(a))$, т.е. $h(a) = g \cdot f(a) =$

$g(f(a))$. Суперпозицию отображений можно изобразить с помощью диаграммы:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C, \quad a \xmapsto{f} b \xmapsto{g} c.$$

Чтобы порядок функциональных символов в формулах соответствовал порядку следования стрелок в диаграммах, иногда используется запись символов функций справа от аргумента: $(a)f \cdot g = ((a)f)g$.

Примеры.

1). Пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$; тогда $g \cdot f(x) = g(f(x)) = \sin x^2$; $f \cdot g(x) = f(g(x)) = \sin^2 x$. Как видим, суперпозиция отображений, подобно произведению отношений, не обладает свойством коммутативности.

2). Рассмотрим линейную функцию $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$; их суперпозиция $g \cdot f(x) = g(f(x)) = c(ax + b) + d = (ac)x + (bc + d)$ также линейная функция. Говорят, что множество всех линейных функций — *замкнутый класс* (относительно суперпозиции).

Упражнение 1. Является ли замкнутым классом относительно суперпозиции множество всех дробно-линейных функций вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$?

2. Прообразы и образы

Пусть $f : A \to B$ — отображение. Рассмотрим два понятия: прообраз элемента относительно отображения f и образ множества относительно отображения f.

Если $b \in B$, то *прообраз* элемента b относительно отображения f есть множество всех элементов $a \in A$, переводимых отображением f в b:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Если $M \subset A$, то *образ* множества M относительно отображения f есть подмножество в B, состоящее из образов всех элементов из M:

$$f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}.$$

В частности, можно определить образ всего множества A: $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ — это подмножество в B.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$ — функция, определенная для всех вещественных чисел: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; тогда

$$f^{-1}(0) = \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad f^{-1}(1) = \{(2n+1)\tfrac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad f^{-1}(2) = \varnothing;$$
$$f([0,\pi]) = [0,1], \quad f(\mathbb{R}) = [-1,1].$$

Ранее (в §4) мы уже определили сюръективные, инъективные и биективные отображения. Сюръективные отображения $f : A \twoheadrightarrow B$ характеризуются тем, что образ A совпадает со всем B, т.е. $f(A) = B$. Инъективные отображения $f : A \rightarrowtail B$ — тем, что прообраз каждого элемента $b \in B$, если он не пуст, состоит из единственного элемента, т.е. $\#f^{-1}(b) \leqslant 1$. Наконец, биективные, т.е. взаимно-однозначные отображения $f : A \leftrightarrow B$ — характеризуются тем, что $f(A) = B$ и для каждого $b \in B$ имеется единственный элемент-прообраз $f^{-1}(b)$, и, стало быть, существует обратное отображение $f^{-1} : B \to A$.

3. Естественная факторизация

Определим специальный тип инъективного отображения. Если $A \subset B$, то отображение $i : A \to B$, $i(a) = a$, полученное ограничением тождественного отображения из B в B на часть A множества B, называется ***вложением*** множества A в B и обозначается $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$.

Рассмотрим произвольную инъекцию $f : A \rightarrowtail B$.

Л е м м а 1. *Всякая инъекция представима в виде суперпозиции биекции и вложения.*

$\triangleleft$ Рассмотрим отображение $\bar{f} : A \to f(A)$, определенное равенством $\bar{f}(a) = f(a)$. Отображение $\bar{f}$ получается из f сужением области значений на реальное множество значений и поэтому является взаимно-однозначным. Начертим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\bar{f}"'] & B \\ & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

из которой следует искомая суперпозиция $f = i \cdot \bar{f} : A \overset{\bar{f}}{\leftrightarrow} f(A) \overset{i}{\hookrightarrow} B$. $\triangleright$

Рассмотрим теперь специальный тип сюръективного отображения. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A. Отображение $p : A \twoheadrightarrow A/{\sim}$, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in A$ класс эквивалентности, в котором он содержится : $p(a) = C_a$, называется ***проекцией*** множества A на фактор-множество $A/{\sim}$.

Л е м м а 2. *Всякая сюръекция представима в виде суперпозиции проекции и биекции.*

◁ Пусть $f : A \twoheadrightarrow B$ — произвольная сюръекция. Зададим разбиение множества A на прообразы элементов $b_1, b_2, \ldots \in B$ относительно отображения f: $f^{-1}(b_1)$, $f^{-1}(b_2)$, ... Этому разбиению соответствует эквивалентность $\sim$, определенная формулой $a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$. Очевидно, что проекция p отображает все элементы из блока $f^{-1}(b)$ в соответствующий класс C_a, $a \in f^{-1}(b)$, который отображается посредством $\tilde{f}$ в элемент $b \in B$. Из диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A/\sim \arrow[ur, leftrightarrow, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

вытекает суперпозиция $f = \tilde{f} \cdot p : A \overset{p}{\twoheadrightarrow} A/\sim \overset{\tilde{f}}{\leftrightarrow} B$. ▷

Проведем теперь разложение произвольного отображения.

Т е о р е м а 1. *Всякое отображение можно представить в виде суперпозиции проекции, биекции и вложения.*

◁ Пусть $f : A \to B$ — произвольное отображение. Ограничим область значений f , как в доказательстве леммы 1 — возьмем вместо B множество $f(A)$. Отображение $\bar{f} : A \to f(A)$ с ограниченной областью значений является сюръекцией. Применим к $\bar{f}$ лемму 2. В результате получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A/\sim \arrow[r, leftrightarrow, "\tilde{f}"] & f(A) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

и разложение $f = i \cdot \tilde{f} \cdot p$. ▷

Такое разложение отображения f в суперпозицию проекции, биекции и вложения называется *естественной факторизацией* отображения f.

Пример. Пусть $f(x) = \sin x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим эквивалентность для вещественных чисел x_1, x_2: $x_1 \sim x_2$, если $\sin x_1 = \sin x_2$. Класс эквивалентности C_x можно определить так: $C_x = \{(-1)^n x + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Вместо фактор-множества $\mathbb{R}/\sim$, состоящего из классов эквивалентности, можно рассмотреть систему представителей этих классов — отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Проекцию $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ удобно задать формулой $p(x) = \arcsin(\sin x)$ (рис. 23, а).

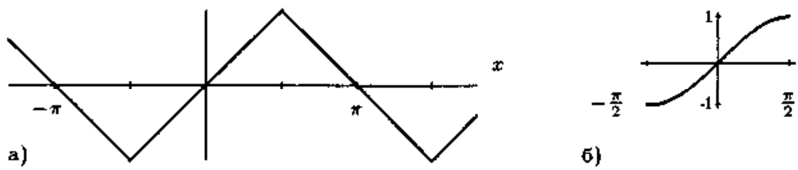


Рис. 23. Разложение функции $f(x) = \sin x$: а) проекция p; б) биекция $\tilde{f}$

Биекция $\tilde{f} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow [-1, 1]$ представляет собой ограничение функции sin, имеющее обратную функцию $\tilde{f}^{-1} = \arcsin$ (рис. 23, б). Добавив вложение $i : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$, получим естественную факторизацию.

4. Число сюръекций

Пусть A, B — конечные множества, $\#A = n$, $\#B = k$. Нам известно из §4, что число всех биекций $f : A \leftrightarrow B$ равно $n!$ (при этом должно выполняться $n = k$), число всех инъекций $f : A \rightarrowtail B$ равно $(k)_n = k(k-1)\dots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$.

Формулу для числа инъекций можно вывести, рассматривая диаграмму из доказательства леммы 1. Действительно, число биекций между n-множествами A и $f(A)$ равно числу перестановок n-множества, т.е. $n!$; число вложений n-множества $f(A)$ в k-множество B равно C_k^n, так как подмножества $f(A) \subset B$ можно выбрать C_k^n способами; перемножая найденные числа, получим $n!\,C_k^n = \frac{k!}{(k-n)!} = (k)_n$.

Теперь найдем число всех сюръекций $f : A \twoheadrightarrow B$ с помощью диаграммы из доказательства леммы 2. Число всех проекций из n-множества A на k-множество $A/\!\sim$ равно числу всех разбиений n-множества на k блоков, т.е. $S(n, k)$. Число биекций между k-множествами $A/\!\sim$ и B равно $k!$. Итак, мы доказали утверждение:

Т е о р е м а 2. *Число всех сюръекций n-множества на k-множество равно $S(n, k) \cdot k!$.*

Сделаем еще один шаг — рассмотрим произвольное отображение $f : A \to B$. При условиях $\#A = n, \#B = x$ число всех таких отображений равно x^n. Будем использовать диаграмму из доказательства теоремы 1. Чтобы построить функцию $f : A \to B$, сначала выберем мощность $f(A)$, равную мощности $A/\!\sim$; пусть $k = \#f(A)$. Затем последовательно произведем три выбора:

1) выберем проекцию $p : A \twoheadrightarrow A/\!\sim$: для этого достаточно выбрать разбиение n-множества A на k блоков, что даст $S(n, k)$ вариантов;

2) выберем биекцию между k-множествами $A/\sim$ и $f(A)$, что даст $k!$ вариантов;

3) выберем вложение $f(A)$ в B. Это даст, так как $\#f(A) = k, \#B = x$, всего C_x^k вариантов.

Подведем итог. При фиксированном k получается $S(n,k)k!\,C_x^k = S(n,k)(x)_k$ способов задать отображение $f : A \to B$; но k может быть различным: $k \in [1,n]$, поэтому $x^n = \sum_{k=1}^n S(n,k)(x)_k$. Сформулируем:

Т е о р е м а 3. *При $n > 0$ для любого вещественного x справедливо равенство*

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(x)_k.$$

◁ Данная формула доказана для всех $x \in \mathbb{N}$, но ее можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно неизвестной x степени $\leqslant n$, и поэтому оно не может иметь более n корней. Но поскольку это уравнение обращается в тождество для бесконечного множества значений x (а именно, для всех натуральных x) , оно должно быть тождеством для любого x. ▷

5. Числа Стирлинга 1-го рода

Ранее введенные числа $S(n,k)$ обычно называются числами Стирлинга 2-го рода. *Числами Стирлинга 1-го рода* $s(n,k)$ называются коэффициенты при x^k в разложении $(x)_n$:

$$(x)_n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1}$$

Т е о р е м а 4. *Числа Стирлинга 1-го рода удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)\cdot s(n-1,k). \tag{2}$$

◁ Начнем с очевидного равенства $(x)_n = (x)_{n-1}\cdot(x-n+1)$. Так как $(x)_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)\cdot x^k$, можно записать

$$\begin{gathered}(x)_n = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)\cdot x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\,s(n-1,k)\,x^k = \\ \sum_{k=1}^{n}\left[s(n-1,k-1) - (n-1)\,s(n-1,k)\right]x^k.\end{gathered} \tag{3}$$

Сравнивая коэффициенты при x^k в правых частях формул (1) и (3), получим (2). ▹

Очевидно, что $s(n,k)=0$ при $k>n$, $s(n,0)=0$ при $n>0$. Условимся, что $s(0,0)=1$.

Таблица чисел Стирлинга 1-го рода может быть построена с использованием формулы (2): очередной элемент в этой таблице получается вычитанием из элемента, стоящего выше слева, элемента, стоящего прямо над ним, умноженного на индекс строки; например, $35 = 11-4(-6)$.

$s(n,k)$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1

С помощью чисел Стирлинга 1-го рода получаем следующие разложения:

$$x(x-1)=x^2-x,$$
$$x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x,$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4-6x^3+11x^2-6x, \text{ и т.д.}$$

Упражнение 2. Найдите $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

Упражнение 3. Докажите формулы: $s(n,n)=1$, $s(n,n-1)=-C_n^2$, $s(n,1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

Упражнение 4. Докажите, что квадратные матрицы $S=(S(i,k))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant n}}$ и $s=(s(i,k))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant k\leqslant n}}$, полученные из таблиц чисел Стирлинга 2-го и 1-го родов, невырождены и обратны друг к другу: $S=s^{-1}$.

§10. Рекуррентные уравнения

Имеется много числовых последовательностей, члены которых удовлетворяют рекуррентным соотношениям. Можно считать эти последовательности решениями соответствующих рекуррентных уравнений. Простейшими примерами являются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Арифметическая прогрессия задается уравнением $x_n = x_{n-1}+d$ с начальным условием $x_0=a$, решение которого определяет общий член прогрессии в виде известной формулы: $x_n = a+nd$.

Геометрическая прогрессия задается, в свою очередь, уравнением $x_n = qx_{n-1}$ и условием $x_0 = a$, решение которого дает формулу общего члена $x_n = aq^n$.

1. Числа Фибоначчи

Числами Фибоначчи называются члены последовательности, заданной уравнением

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \tag{1}$$

с начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Так как $x_2 = x_1 + x_0$, можно считать, что $x_0 = 0$. Вот первые числа Фибоначчи (обычно они обозначаются F_n):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	44	65	109	174

Для решения уравнения Фибоначчи возьмем пробный общий член в том же виде, что и для геометрической прогрессии: $x_n = aq^n$, но с неизвестными пока параметрами a и q. Подставив пробный член в уравнение (1), получим $aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2}$, а после сокращения на aq^{n-2} — квадратное уравнение $q^2 - q - 1 = 0$, которое имеет корни

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Отметим очевидные равенства $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$; приближенные значения корней $\alpha \approx 1.618$ и $\beta \approx -0.618$.

Необходимо, чтобы выполнялись условия $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, но ни одно из решений не дает такой возможности, т.к. остается только один неизвестный параметр a на два начальных условия. Попробуем взять линейную комбинацию найденных решений:

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n. \tag{2}$$

Подставляя ее в уравнение (1), убедимся, что она обратит его в тождество:

$$A\alpha^n + B\beta^n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + A\alpha^{n-2} + B\beta^{n-2}.$$

Подставляя (2) в начальные условия, получим систему линейных уравнений относительно A и B

$$A + B = 0, \qquad A\alpha + B\beta = 1.$$

Отсюда $A = 1/\sqrt{5}$, $B = -1/\sqrt{5}$.

Таким образом, мы доказали утверждение:

Т е о р е м а 1. *Числа Фибоначчи могут быть вычислены по формуле*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Эта формула носит название формулы Бине.

Т е о р е м а 2. $F_n = \mathrm{round}\left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right)$, *где* $\mathrm{round}(x)$ — *ближайшее целое к* x.

◁ F_n равно сумме двух слагаемых, причем второе $\left|\frac{\beta^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$, так как $|\beta| < 1$, $\sqrt{5} > 2$. ▷

Упражнение 1. Найдите последовательность x_n, удовлетворяющую уравнению Фибоначчи (1), но с произвольными начальными условиями $x_1 = a$, $x_2 = b$.

2. Рекуррентные уравнения

Рекуррентным уравнением k-го порядка называется уравнение, в котором общий член последовательности x_n зависит от k предыдущих:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}). \tag{3}$$

Если правая часть $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$ линейно зависит от всех своих аргументов, уравнение называется *линейным*. Линейное уравнение k-го порядка имеет вид

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + b, \tag{4}$$

причем $a_k \neq 0$, так как иначе порядок уравнения был бы меньше k.

Коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и свободный член b в общем случае зависят от n: $a_i = a_i(n)$, $b = b(n)$. Если такой зависимости нет, т.е. если все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и свободный член b — константы, уравнение (4) называется уравнением *с постоянными коэффициентами*.

Наконец, уравнение (4) называется *однородным*, если $b = 0$.

Общее рекуррентное уравнение k-го порядка (3) имеет своим решением единственную последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ при условии, что задано k начальных членов этой последовательности. Действительно, если заданы $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то однозначно можно определить $x_{k+1} = f(x_k, \ldots, x_1)$, затем $x_{k+2} = f(x_{k+1}, \ldots, x_2)$, и т.д.

Подробнее изучим линейные рекуррентные уравнения, и особенно — уравнения с постоянными коэффициентами.

Т е о р е м а 3. *Последовательности, являющиеся решениями линейного рекуррентного уравнения (4), обладают следующими свойствами:*

1) если x_n, y_n — решения линейного однородного рекуррентного уравнения, то $z_n = Ax_n + By_n$ также является решением того же уравнения;

2) если x_n, y_n — решения линейного неоднородного рекуррентного уравнения, то $u_n = x_n - y_n$ является решением соответствующего линейного однородного уравнения.

◁ 1) Так как

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k}, y_n = a_1 y_{n-1} + \ldots + a_k y_{n-k},$$

то

$$Ax_n + By_n = A(a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k}) + B(a_1 y_{n-1} + \ldots + a_k y_{n-k}) =$$
$$= a_1(Ax_{n-1} + By_{n-1}) + \ldots + a_k(Ax_{n-k} + By_{n-k}),$$

откуда следует

$$z_n = a_1 z_{n-1} + \ldots + a_k z_{n-k}.$$

2) Если

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} + b, y_n = a_1 y_{n-1} + \ldots + a_k y_{n-k} + b,$$

то

$$x_n - y_n = a_1(x_{n-1} - y_{n-1}) + \ldots + a_k(x_{n-k} - y_{n-k}). \quad ▷$$

3. Линейные однородные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} \qquad (a_k \neq 0), \tag{5}$$

с начальными условиями $x_1 = v_1, x_2 = v_2, \ldots, x_k = v_k$.

Метод его решения состоит в следующем. Подставим в уравнение (5) $x_n = q^n$: $q^n = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_k q^{n-k}$, или, после сокращения на q^{n-k}:

$$q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \ldots - a_k q^0 = 0 \tag{6}$$

Это алгебраическое уравнение k-й степени. Будем предполагать, что оно имеет k различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Тогда рекуррентное уравнение (5) имеет решения $(x_n)_1 = \alpha_1^n, (x_n)_2 = \alpha_2^n, \ldots, (x_n)_k = \alpha_k^n$, а, кроме того, любое решение вида $x_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \ldots + c_k\alpha_k^n$.

Т е о р е м а 4. *При любых значениях вещественных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_k$ последовательность*

$$x_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \ldots + c_k\alpha_k^n \tag{7}$$

является решением линейного однородного рекуррентного уравнения (5) с постоянными коэффициентами; и, обратно, каждое решение рекуррентного уравнения (5) может быть записано в таком виде при подходящих значениях констант.

◁ Последовательность, заданная формулой (7), является решением рекуррентного уравнения (5) в силу свойства 1 из теоремы 3.

Обратно, каждое решение удовлетворяет некоторым начальным условиям $x_1 = v_1, x_2 = v_2, \ldots, x_k = v_k$. Подставляя в эти условия выражение (7), определим значения констант $c_1, c_2, \ldots, c_k$:

$$\begin{array}{l} c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_k\alpha_k = v_1 \ , \\ c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + \ldots + c_k\alpha_k^2 = v_2 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\alpha_1^k + c_2\alpha_2^k + \ldots + c_k\alpha_k^k = v_k \ . \end{array} \tag{8}$$

Рассмотрим (8) как систему k линейных уравнений с k неизвестными $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Эта система имеет ненулевой определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^k & \alpha_2^k & \ldots & \alpha_k^k \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \prod_{i>j}(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0,$$

так как $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ (по условию все корни алгебраического уравнения (6) различны), и $\alpha_i \neq 0$ (свободный член уравнения (6) a_k отличен от нуля).

Следовательно, система (8) имеет единственное решение, определяющее коэффициенты в (7). ▷

Пример. Вычислим определитель n-го порядка с нулями вне главной и соседних с ней диагоналей

$$\begin{vmatrix} b & c & 0 & 0 & \ldots \\ a & b & c & 0 & \ldots \\ 0 & a & b & c & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = x_n.$$

Раскрывая его по первой строке, получим рекуррентную зависимость:

$$x_n = bx_{n-1} - acx_{n-2}. \tag{9}$$

Корни соответствующего квадратного уравнения $q^2 - bq + ac = 0$ имеют вид $\alpha,\ \beta = \frac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$. Начальные условия найдем, вычисляя определитель в случае $n = 1$ и $n = 2$: $x_1 = b$, $x_2 = b^2 - ac$. Из рекуррентного уравнения (9) выведем $x_0 = 1$.

Теперь, пользуясь начальными условиями, можно найти неопределенные коэффициенты A и B в общем решении $x_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Сделаем это при конкретных значениях: $a = 1$, $b = 5$, $c = 4$; корни квадратного уравнения $q^2 - 5q + 4 = 0$: $\alpha = 1$, $\beta = 4$; общее решение рекуррентного уравнения $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot 4^n$; так как $x_0 = 1$, $x_1 = 5$, для определения коэффициентов A и B получим систему

$$A + B = 1, \quad A + 4B = 5.$$

Ее решение $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{4}{3}$ позволяет записать окончательный ответ:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 & \dots \\ 1 & 5 & 4 & \dots \\ 0 & 1 & 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}.$$

Задачи

Множества

1. Какие из утверждений верны для всех A, B и C:

а) $A \subset A$;
б) $A \cap B \subset A$;
в) $A \cup B \subset A$;
г) $A \triangle B \subset A$;
д) $\varnothing \neq \{\varnothing\}$;
е) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;
ж) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$;
з) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$?

2. Решить системы уравнений для данных множеств A и B:

а) $A \cap X = B$, $(B \subset A \subset C)$;
$A \cup X = C$;

б) $A \setminus X = B$, $(B \subset A,\ A \cap C = \varnothing)$;
$X \setminus A = C$.

в) $A \setminus X = B$, $(B \subset A \subset C)$.
$A \cup X = C$;

3. Существуют ли такие множества A, B и C, что

а) $A \cap B = \varnothing$,
$C \setminus B = \varnothing$;

б) $A \cup B = B \cap C$,
$A \cap B = B$;

в) $A \cap B \neq \varnothing$,
$A \cap C = \varnothing$,
$(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

4. Доказать тождества:

а) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;
б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;
в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
е) $A \triangle (A \triangle B) = B$;
ж) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;
з) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

5. Доказать:
а) $A \subset B \implies A \cup C \subset B \cup C$;
б) $A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C$;
в) $A \subset B \implies C \setminus B \subset C \setminus A$;
г) $A \cap B = \varnothing \implies A \triangle B = A \cup B$;
д) $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$;
е) $A \triangle B = C \iff B \triangle C = A \iff A \triangle C = B$.

Формула включения-исключения

6. 80% студентов читают журнал A, 50% — журнал B, также 50% — журнал C, 30% — журналы A и B, 20% — журналы B и C, 40% — журналы A и C, 10% — все три журнала. Сколько процентов студентов: а) не читает ни одного журнала; б) читает в точности два журнала; в) читает не менее двух журналов; г) читает один или два журнала?

7. Коллектив лаборатории состоит из 14 человек, каждый из которых знает хотя бы один из иностранных языков. Десять человек знают английский, семеро — французский и семеро — немецкий, пятеро знают английский и французский, четверо — английский и немецкий, трое — французский и немецкий. *Сколько человек знают:* а) все три языка; б) ровно два языка; в) ровно один язык; г) только английский язык?

8. Дано множество $A = [0, 9]$ и свойства:
P_1 : a кратно 3; P_2 : a кратно 5; P_3 : $2 \leqslant a < 7$; P_4 : $a^2 + a > 4$.
Сколько элементов обладают в точности 0,1,2,3 или 4 свойствами?

Принцип произведения

9. Сколько 3-значных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5? а) если каждую можно использовать не более одного раза?

10. Сколько имеется 5-значных чисел, у которых все цифры нечетные?

11. Сколько разных делителей имеет число $3^5 \cdot 5^4$?

12. Из двух вершин треугольника проведено соответственно m и n прямых до пересечения с противоположными сторонами. Сколько при этом получится точек пересечения проведенных прямых? На сколько частей разделится треугольник?

13. Автомобильные номера состоят из 1, 2 или 3 букв и 4 цифр; используется 30 букв. Найти число таких номеров.

14. Одновременно подбрасывается 3 фишки с 6, 8 и 10 гранями соответственно и фиксируются грани, которыми они упадут на стол. Сколькими способами они могут упасть?

а) Тот же вопрос при условии, что по крайней мере 2 фишки упали на сторону с цифрой 1.

15. Имеется 5 книг на английском языке, 7 — на немецком, 10 — на французском. Сколькими способами можно выбрать 2 книги на разных языках?

16. На собрании должны выступить 4 оратора. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если первый не должен выступать после второго, а третий не должен выступать последним?

Подмножества

17. Доказать: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

18. Доказать: $P(A \cup B) = \{K \cup L \mid K \in P(A), L \in P(B)\}$.

19. Сколько подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c, d\}$? Выписать их; построить диаграмму Хассе для отношения включения $\subset$.

20. Составить диаграмму Хассе для множества $[2, 9]$, упорядоченного отношением делимости.

21. Сколько имеется 3-значных чисел, составленных с помощью цифр 0,1,2,3,4,5 и делящихся на 3?

22. Сколько существует подмножеств множества $[1, 10]$, содержащих хотя бы одно нечетное число?

Сочетания

23. Сколько 3-подмножеств имеет множество $A = \{a, b, c, d, e\}$? Выписать их.

24. Вычислить C_8^k для $0 < k < 8$.

25. Доказать $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < (n-1)/2$ и $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > (n-1)/2$.

26. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

27. Сколько имеется 4-значных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

28. На плоскости проведено n прямых так, что никакие 2 из них не параллельны и никакие 3 из них не пересекаются в одной точке.
1). Найти количество точек пересечения этих прямых.
2). Сколько треугольников образуют эти прямые?

3). На сколько частей делят плоскость эти прямые?
4). Сколько среди них ограниченных частей и сколько — неограниченных?

29. Сколько имеется способов написать последовательность из p единиц и q нулей так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

30. Сколько кратчайших путей ведут из точки (0,0) в точку (4,5)?

31. Никакие 3 диагонали выпуклого 10-угольника не пересекаются в одной точке. На сколько отрезков диагонали делятся точками пересечения?

а) Тот же вопрос для п-угольника.

32. Сколькими способами из множества [1,300] можно выбрать 3 числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

33. Колода карт содержит 4 масти по n карт $(n$ ^ 5) в каждой с номерами 1,2,..., n. Подсчитайте, сколькими способами можно выбрать 5 карт, что среди них окажутся:
а) пять последовательных карт одной масти;
б) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;
в) три карты с одним номером и две карты с другим;
г) пять карт одной масти;
д) пять последовательно занумерованных карт;
е) три карты из пяти с одинаковыми, а остальные с разными номерами;
ж) две карты из пяти с одинаковыми, а остальные с разными номерами.

Перестановки

34. Сколько имеется перестановок множества [1,2п], в которых каждое четное число стоит на четном месте?

35. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых данные 2 элемента не стоят рядом?

36. Подсчитать число перестановок множества [1, n], у которых числа 1,2,3 стоят рядом в порядке возрастания.

37. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят г элементов?

38. Сколько имеется подстановок из 4 элементов а, 6, с, d, если 6 должно следовать не ранее а?

а) То же для n элементов.

39. Подсчитайте число способов переставить элементы множества [1,п] так, чтобы любое число, кратное 2, имело бы номер, кратный 2, а любое число, кратное 3, — номер, кратный 3.

40. Сколько существует перестановок множества [1,7], у которых 7 не остается на месте?

Сочетания с повторениями (мультимножества)

41. Перечислить все 3-мультимножества на множестве $\{a, b, c\}$.

42. Сколько всего можно сделать костей домино, если на каждой половике кости должна быть пометка, соответствующая числам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? То же для чисел $1, 2, \ldots, k$.

43. В буфете продается 4 сорта пирожных. Сколько существует вариантов выбора 7 пирожных?

Разложения чисел

44. 12 человек разбились на 5 групп, каждая из 2 или 3 человек. Сколькими способами это можно сделать?

45. Сколько разложений числа 19 можно составить из чисел 2 и 3?

46. Сколько разложений числа 18 можно составить из 4, 6 и 10 ?

47. Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 2n$? В частности, при $n = 3$ выписать все решения.

Перестановки с повторениями (перестановки мультимножеств)

48. Сколько имеется способов разделить $m + n + s$ предметов на 3 группы, чтобы в 1-й было m предметов, во 2-й — n, а в 3-й — s?

49. Каким числом способов можно разделить $3n$ различных предметов между 3 людьми, чтобы каждый получил поровну?

50. Сколько перестановок можно составить из букв слов: а) „кок“, б) „мама“, в) „канкан“, г) „олово“, д) „математика“?

51. Доказать:

а) $(k!)!/(k!)^{(k-1)!}$ — целое;

б) $(2n)!/2^n$ — целое;

в) $(3n)!/(2^n \cdot 3^n)$ — целое.

52. Сколько 5-буквенных сочетаний можно составить из букв a, b, c так, чтобы буква a встречалась не более 2 раз, буква b — не более 1 раза, c — не более 3 раз?

53. а) Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, содержащих четное число нулей?

б) Сколько существует последовательностей длины n с элементами из множества $\{0, 1, 2\}$, содержащих четное число нулей?

в) Сколько существует последовательностей длины n с элементами из множества $\{0, 1, 2, 3\}$, содержащих четное число нулей и четное число единиц?

Биномиальные коэффициенты

54. Доказать: если p — простое число, то $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{p-1}$ делятся на p.

55. Доказать: если p — простое число, то при любом целом a двучлен $a^p - a$ делится на a.

56. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и при x^{12} равны.

57. Сколько в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ будет рациональных слагаемых?

Мультиномиальные коэффициенты

58. Найти $(x+y+z)^3$.

59. Найти $(a+b+c+d)^2$.

60. Найти в разложении $(x+y+z)^7$ коэффициент при $x^2y^3z^2$. Сколько всего слагаемых в $(x+y+z)^7$?

61. Найти коэффициент при x^ky^l в $(1+x+y)^n$.

62. Найти коэффициенты при x^{17} и x^{18} в $(1+x^5+x^7)^n$.

63. Доказать:

$$P_{n+1}(i,j,k) = P_n(i-1,j,k) + P_n(i,j-1,k) + P_n(i,j,k-1),$$

где $i+j+k = n+1$.

64. Доказать: $\displaystyle\sum_{i+j+k=n} P_n(i,j,k) = 3^n$.

Биномиальные тождества

Доказать следующие тождества:

65. $C_n^k C_k^r = C_{n-r}^{k-r} C_n^r$.

66. $C_n^{k-r}/C_n^k = \dfrac{(k)_r}{(n-k+r)_r}$.

67. $C_{n-r}^{k-r}/C_n^k = \dfrac{(k)_r}{(n)_r}$.

68. $C_{n+1}^k/C_n^k = \dfrac{n+1}{n-k+1}$.

69. $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

70. $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

71. $C_n^0 + \dfrac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}C_n^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

72. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$.

73. $C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + \ldots + C_n^kC_m^0 = C_{n+m}^k$.

74. $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = (n+1)2^n$.

75. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k = n(n+1)2^{n-2}$.

76. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k+1}C_n^k = \dfrac{1}{n+1}$.

Найти сумму:

77. $1 - \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x(x-1)}{2!} - \ldots + (-1)^n\dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$.

78. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$.

Доказать тождества:

79. $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$.

80. $C_n^k + C_{n+1}^k + \ldots + C_{n+m}^k = C_{n+m+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$.

81. $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n(C_n^n)^2 = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & n = 2k. \end{cases}$

82. $\sum\limits_{i=k-3}^{n-3} C_i^{k-3}C_{n-1-i}^2 = C_n^k$.

Декартово произведение

Доказать:

83. Пусть A, B, C, D не пусты. Тогда

а) $A \subset B,\ C \subset D \iff A \times C \subset B \times D$;

б) $A = B,\ C = D \iff A \times C = B \times D$;

84. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

85. $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$. При каких A, B, C, D будет равенство?

86. $(A \cup B) \times C = (A \cup C) \times (B \cup C)$.

87. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

88. Установить взаимно однозначное соответствие между $A \times B$ и $B \times A$. Найти A, B такие, что $A \times B \neq B \times A$.

Бинарные отношения

89. Доказать для $\leqslant$ и $<$ на множестве $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$:
$< \cdot < \neq <$; $\leqslant \cdot < = <$; $\leqslant \cdot \geqslant = \mathbb{N}^2$.

90. Найти R^{-1}, $R \cdot R$, $R \cdot R^{-1}$, $R^{-1} \cdot R$ для

а) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\}$;

б) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leqslant 0\}$;
в) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 2x \geqslant 3y\}$.

91. Доказать:
а) $R_1 \subset R_2 \implies R_1^{-1} \subset R_2^{-1}$;
б) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;
в) $\overline{R^{-1}} = \overline{R}^{\,-1}$;
г) $Q \cdot (R_1 \cap R_2) \subset Q \cdot R_1 \cap Q \cdot R_2$.

92. Проверьте выполнение свойств отношения эквивалентности для отношения R, заданного следующим образом:
а) aRb, если $a - b$ делится на m $(a, b, m \in \mathbb{N})$;
б) aRb, если a и b — параллельные прямые;
в) aRb, если $a - b$ — рациональное число.

93. Постройте бинарное отношение:
а) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;
б) рефлексивное, транзитивное, не симметричное;
в) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.

Упорядоченные множества

Пусть $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

94. Выписать все пары (a, b) такие, что $a \mid b, \quad a, b \in N_4$.

95. Найти декартов квадрат N_4^2.

В следующих четырех задачах исследовать заданные отношения на свойства рефлексивности, транзитивности, симметричности, антисимметричности:

96. $a << b$, если $\dfrac{a}{a^2+1} \leqslant \dfrac{b}{b^2+1}$:
а) на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$;
б) на интервале $(1, \infty)$;
в) на $[1, \infty)$, $(-1, 1)$, $[-1, 1]$, $(-\infty, -1]$, $(-\infty, 0)$.

97. $a\sigma b$, если $a \leqslant 1$ или $b \geqslant -1$, на множестве $\mathbb{R}$.

98. $A\tau B$, если A и B — точки плоскости, находящиеся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки O этой же плоскости.

99. Отношение делимости $\mid$ на N_4, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

100. На множестве $\{a, b\}$ найти все возможные отношения; выделить из них все а) рефлексивные; б) симметричные; в) антисимметричные; г) транзитивные; д) эквивалентности; е) частично упорядоченные; ж) линейно упорядоченные.

101. Найти все эквивалентности на множестве
а) $\{a, b, c\}$; б) $\{a, b, c, d\}$.

102. Начертить диаграммы Хассе
а) множества N_4 с отношением делимости $|$;
б) множества всех отношений на $\{a, b\}$, упорядоченного включением;
в) множества всех эквивалентностей на $\{a, b, c\}$, упорядоченного включением.

Уравнения в конечных разностях

Найти общее решение уравнения, а также частное решение, если указаны дополнительные условия.

103. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.

104. $x_{n+2} + 3x_n = 0$.

105. $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$.

106. $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$.

107. $x_{n+3} + 10x_{n+2} + 32x_{n+1} + 32x_n = 0$.

108. $x_{n+1} = ax_n + b, \quad x_0 = c$.

109. $x_{n+1} = 3x_n + 2, \quad x_0 = 1$.

110. $x_{n+1} = x_n + n, \quad x_0 = 1$.

111. $x_{n+2} = x_n + n, \quad x_0 = 0,\ x_1 = 2$.

112. $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = 27 \cdot 5^n, \quad x_0 = -9,\ x_2 = 45$.

113. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} - 3x_n = 0, \quad x_0 = 3,\ x_1 = 7,\ x_2 = 27$.

114. $x_{n+3} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_2 = c$.

115. $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 6n^2 - 4n - 17, \quad x_1 = 3,\ x_2 = 15,\ x_3 = 41$.

116. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$.

Числа Фибоначчи

Доказать методом математической индукции

117. $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

118. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

119. $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

120. $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

121. $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

122. $C_{n-1}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-3}^2 + \ldots = F_n$.

Список рекомендуемой литературы

— по дискретной математике:

1. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: ИЛ, 1963.

2. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. М.: Наука, 1990.

3. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986.

4. Яблонский СВ. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

— по комбинаторике:

5. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.

6. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

7. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. Новосибирск: Наука, 1975.

8. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982.

9. Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

— задачники:

10. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

11. Комбинаторный анализ: Задачи и упражнения/Под ред. К.А. Рыбникова. М.: Наука, 1982.

12. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1984.

Содержание

ЛР № 020316 от 28.11.91. Подписано в печать 14.05.96. Формат 60х84/16. Бумага белая писчая. Печать офсетная. Объем 3,9 усл.печ.л., 4,0 уч.-изд.л. Тираж 500 экз. Заказ № 994

Издательство "Самарский университет", 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

АО "ПО "СамВен", 443099, г . Самара, ул. Венцека, 66.