

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

ЭЛЕМЕНТЫ АКТУАРНЫХ РАСЧЕТОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

Составитель Е.П. Ростова

САМАРА

Издательство Самарского университета

2017

УДК 334(075)

Составитель ***Е.П. Ростова***

Рецензент д-р экон. наук, проф. Д. Ю. Иванов

Элементы актуарных расчетов: метод. указания / сост. *Е.П. Ростова*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 30 с.

Данное издание представляет собой руководство по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Страхование». В работе представлен материал по следующим темам: основные показатели страховой статистики, формирование тарифной ставки, расчеты по страхованию жизни, перестрахование и формирование страховых резервов.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика.

Подготовлены на кафедре финансов и кредита.

Учебное издание

ЭЛЕМЕНТЫ АКТУАРНЫХ РАСЧЕТОВ

Методические указания

Составитель ***Ростова Елена Павловна***

Редактор Т.К. Кретинина
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 1,75.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 76/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

(Самарский университет)

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета. 443086 Самара, Московское шоссе, 34.

© Самарский университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1. Расчет основных показателей страховой статистики.....	4
Лабораторная работа №2 Расчет элементов тарифной ставки и определение прибыли страховой компании.....	10
Лабораторная работа №3 Расчеты в личном страховании.....	14
Лабораторная работа №4 Оценка резерва перестраховочной компании.....	19
Приложение.....	23

Лабораторная работа № 1.

Расчет основных показателей страховой статистики

Содержание лабораторной работы

Дана сводная таблица страховых операций по нескольким страховым компаниям. Необходимо:

- 1) вычислить основные показатели страховой статистики;
- 2) оценить убыточность каждого из регионов;
- 3) оценить финансовую устойчивость страховых операций;
- 4) оценить финансовую устойчивость страховых компаний;
- 5) свести данные в таблицу;
- 6) провести анализ наиболее неустойчивого вида страхования.

Порядок работы

1. Ввод данных.
2. Определение необходимых показателей.
3. Вычисление убыточности регионов.
4. Вычисление коэффициента Коньшина.
5. Вычисление коэффициента финансовой устойчивости страховой компании.
6. Сведение результатов вычислений в итоговую таблицу.
7. Построение графика зависимости значений коэффициента Коньшина от объема страхового портфеля для наименее финансово устойчивого вида страхования.

Условные обозначения

l – число страховых событий

n – число объектов страхования

m – число пострадавших объектов в результате страхового случая

W – выплаченное страховое возмещение

C – страховая сумма

V – внесенная страховая премия

F – средства в запасном фонде

R – расходы на ведение дела

D – доход страховщика

\overline{Tst} – средняя тарифная ставка.

1. Ввод данных.

На рабочем месте подготовить все необходимые надписи и заголовки. Определить места для вычисляемых параметров, таблицы входных данных и результатов.

Ввести имеющиеся статистические данные, отсортировывая их по регионам, компаниям и страховым операциям.

2. Определение основных показателей.

Параметр	Обозначение и формулы для вычисления
Частота страховых случаев	$Ч_c = \frac{l}{n}$
Коэффициент кумуляции	$K_k = \frac{m}{l}$
Коэффициент убыточности	$K_v = \frac{\sum W}{\sum C m}$
Средняя страховая сумма	$\bar{C} = \frac{C}{n}$
Тяжесть риска	$T_p = \frac{C m \cdot n}{C \cdot m}$
Убыточность	$У = \frac{\sum W}{\sum C}$
Норма убыточности	$H_v = \frac{\sum W}{\sum V} \cdot 100\%$
Частота ущерба	$Ч_v = \frac{m}{n}$
Тяжесть ущерба	$T_v = \frac{n \cdot \sum W}{m \cdot \sum C}$

3. Провести сравнительный анализ регионов по следующим показателям: частота страховых случаев $Ч_c$, коэффициент кумуляции K_k , убыточность $У$, тяжесть ущерба T_v .

4. Используя коэффициент Коньшина, выбрать наиболее финансово устойчивую страховую операцию:

$$K = \sqrt{\frac{1 - \overline{Tst}}{n \cdot \overline{Tst}}}$$

5. Расположить страховые компании в порядке возрастания финансовой устойчивости, используя для анализа коэффициент финансовой устойчивости страхового фонда:

$$K_{\phi} = \frac{D + F}{R}$$

Пример

1. Ввести имеющиеся статистические данные, отсортировывая их по регионам, компаниям и страховым операциям.

Регион А. Компания А1

Параметры	Страхование жизни	Страхование дом. имущества	Страхование кредитов
Кол-во застрахованных объектов (ед.)	86257	4480	106
Страховая сумма (млн.руб.)	106,81	126,79	84,64
Кол-во пострадавших объектов (ед.)	523	418	67
Число страховых случаев (ед.)	481	209000	67
Выплаченное страховое возмещение (млн. руб.)	0,5815	0,7618	2,9541
Средняя тарифная ставка (%)	1,9602	1,3430	13,1924
Внесенные страховые премии (млн. руб.)	1,3610	1,3623	8,3748
Страховая сумма, приходящаяся на поврежденные объекты (млн. руб.)	0,5539	29,3023	161,8237

Запасной фонд составляет 19,09 млн. руб., расходы на ведение дела – 15,91 млн. руб.

Регион А. Компания А2

Параметры	Страхование жизни	Страхование дом. имущества	Страхование кредитов
Кол-во застрахованных объектов (ед.)	82961	6488	148
Страховая сумма (млн. руб.)	103,76	179,51	97,38
Кол-во пострадавших объектов (ед.)	688	2016	68
Число страховых случаев (един.)	632	1008000	68
Выплаченное страховое возмещение (млн. руб.)	0,7646	3,6667	2,9742
Средняя тарифная ставка (%)	2,8239	4,5093	11,4661
Внесенные страховые премии (млн. руб.)	1,9045	6,4757	8,3745
Страховая сумма, приходящаяся на поврежденные объекты (млн. руб.)	2,0382	99,9686	106,3560

Запасной фонд составляет 22,84 млн.руб., расходы на ведение дела – 19,03 млн.руб.

Регион В. Компания В1

Параметры	Страхование жизни	Страхование дом. имущества	Страхование кредитов
Кол-во застрахованных объектов (ед.)	64873	4053	111
Страховая сумма (млн. руб.)	82,06	133,71	70,51
Кол-во пострадавших объектов (ед.)	378	910	50
Число страховых случаев (ед.)	347	455000	50
Выплаченное страховое возмещение (млн. руб.)	0,4209	1,6559	2,1877
Средняя тарифная ставка (%)	1,8435	2,7099	10,9307
Внесенные страховые премии (млн. руб.)	0,9833	2,8988	5,7805
Страховая сумма, приходящаяся на поврежденные объекты (млн. руб.)	1,6643	26,2458	79,4495

Запасной фонд составляет 17,18 млн.руб., расходы на ведение дела – 14,31 млн.руб.

Регион В. Компания В2

Параметры	Страхование жизни	Страхование дом. имущества	Страхование кредитов
Кол-во застрахованных объектов (ед.)	67871	5513	95
Страховая сумма (млн. руб.)	83,59	172,86	76,04
Кол-во пострадавших объектов (ед.)	616	930	52
Число страховых случаев (ед.)	566	465000	52
Выплаченное страховое возмещение (млн. руб.)	0,6853	1,6912	2,2872
Средняя тарифная ставка (%)	2,8420	2,2288	11,3627
Внесенные страховые премии (млн. руб.)	1,5443	3,0822	6,4804
Страховая сумма, приходящаяся на поврежденные объекты (млн. руб.)	1,6713	78,0229	149,4235

Запасной фонд составляет 19,95 млн.руб., расходы на ведение дела – 16,63 млн.руб.

2. Определение основных показателей.

Параметры	Обозначение и формулы для вычисления	
	Регион А	Регион В
Частота страховых случаев	6,7515	6,4625
Коэффициент кумуляции	0,0031	0,0032
Коэффициент убыточности	0,0293	0,0265
Средняя страховая сумма (млн. руб.)	0,0039	0,0043
Тяжесть риска	27,3231	26,3951
Убыточность	0,0167	0,0144
Норма убыточности	42,0166	42,9868
Частота ущерба	0,0209	0,0206
Тяжесть ущерба	0,7993	0,7004

3. Провести сравнительный анализ регионов по следующим показателям: частота страховых случаев $Ч_c$, коэффициент кумуляции K_k , убыточность $У$, тяжесть ущерба T_y .

Частота страховых случаев, так же как убыточность и тяжесть ущерба, больше в регионе А, но коэффициент кумуляции выше в регионе В.

Значит, по данным показателям наименее убыточным является регион В.

4. Используя коэффициент Коньшина, выбрать наиболее финансово устойчивую страховую операцию.

$$K = \sqrt{\frac{1 - Tst}{n \cdot Tst}}$$

K	Страхование жизни	Страхование дом. имущества	Страхование кредитов
A1	0,0240	0,1282	0,2492
A2	0,0204	0,0571	0,2280
B1	0,0286	0,0094	0,2709
B2	0,0224	0,0890	0,2865
Общий	0,0056	0,0201	0,0496

Страхование жизни является наиболее устойчивой операцией, далее страхование домашнего имущества, наименее устойчивой операцией является страхование кредитов.

5. Расположить страховые компании в порядке возрастания финансовой устойчивости, используя для анализа коэффициент финансовой устойчивости страхового фонда:

$$K_{\Phi} = \frac{D + F}{R}$$

	B1	B2	A1	A2
K_{Φ}	1,4446	1,4588	1,4940	1,4976

Наименее финансово устойчивой является компания В1, далее компания В2, компания А1, компания А2 – наиболее финансово устойчивая.

Лабораторная работа №2

Расчет элементов тарифной ставки и определение прибыли страховой компании

Содержание лабораторной работы

Дана таблица распределения индивидуального риска. Необходимо:

- 1) вычислить элементы тарифной ставки;
- 2) вычислить тарифную ставку;
- 3) определить прибыль страховой компании;
- 4) определить вероятность того, что страховая компания потерпит убыток;
- 5*) провести анализ зависимости прибыли от вероятности неразорения страховой компании.

Порядок работы

1. Ввод данных.
2. Вычисление элементов тарифной ставки.
3. Вычисление тарифной ставки.
4. Определение прибыли страховой компании с вероятностью 0,9 и 0,95.
- 5.* Построить график зависимости размера прибыли от вероятности выживания страховой компании.

Условные обозначения

P_0 – рисковая премия

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X

x_i – значение случайной величины X

p_i – вероятность наступления значения x_i

$D(X)$ – дисперсия случайной величины X

σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины

n – количество договоров

P_H – нетто-премия

V – страховая премия

H_0 – нагрузка

\bar{C} – средняя страховая сумма.

1. Ввод данных.

На рабочем месте подготовить все необходимые надписи и заголовки. Определить места для вычисляемых параметров, таблицы входных данных и результатов.

Ввести имеющиеся статистические данные.

2. Определение элементов тарифной ставки

Параметр	Обозначение и формулы для вычисления
Рисковая премия	$P_0 = \sum_{i=1}^n x_i P_i$
Рисковая надбавка	$T_p = t \cdot \sigma^*$
Нетто-премия	$P_H = P_0 + T_p$

* Параметр t определяется из равенства $1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, где ε соответствует вероятности разорения компании $\varepsilon = \frac{1}{\text{кол-во лет}}$, где $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

3. Вычислить страховую премию по формуле

$$V = \frac{P_H}{1 - H_0}.$$

4. Определить прибыль страховой компании с заданной вероятностью γ можно с помощью интегральной теоремы Лапласа:

$$P\{m > M(X) + t\sigma\} = 0,5[1 - \Phi(t)].$$

Здесь $M(X) = P_0$,

t определяется из равенства $1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, $\varepsilon = 1 - \gamma$, $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

$$\text{Прибыль} = \Sigma V - \Sigma W = V \cdot n - \bar{C} \cdot m.$$

Таблица некоторых значений функции Лапласа

$\Phi(t)$	0,8	0,82	0,84	0,86	0,88	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98
t	1,28	1,34	1,405	1,476	1,555	1,645	1,75	1,88	2,054	2,332

Пример

1. Индивидуальный риск распределен по следующему закону:

x_i	103,4	145,2	102,1	126,0	123,3	126,4	128,6	124,9	109,9	146,0
p_i	0,02	0,05	0,11	0,15	0,19	0,17	0,14	0,09	0,07	0,01

Найти размер страховых премий, если величина нагрузки $H_0 = 12\%$, количество договоров $n = 10\ 000$. Рисковая надбавка должна обеспечивать разорение не чаще, чем 1 раз в 100 лет. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностями 0,9 и 0,95? Считать, что $\bar{C} = [M(X)] + 1$.

2. Определить элементы тарифной ставки

Параметр	Обозначение и формулы для вычисления
Рисковая премия	$P_0 = 122,7675$
Рисковая надбавка	$T_p = 2,325 \cdot 10,27 = 23,88$
Нетто-премия	$P_H = 122,7675 + 23,88 = 146,65 \approx 147$

Определим $\varepsilon = 1/100 = 0,01$. $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon = 0,98$, тогда $t = 2,325$.

3. Вычислить страховую премию по формуле

$$V = \frac{146,65}{1 - 0,12} = 166,6 \approx 167.$$

4. Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью $\gamma_1 = 0,9$.

Вычислим $\varepsilon_1 = 1 - \gamma_1 = 0,1$.

Тогда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon_1 = 0,8$. По таблице находим аргумент функции Лапласа $t = 1,28$.

С помощью интегральной теоремы Лапласа определим количество страховых случаев, превышающее среднее их количество с заданной вероятностью $\varepsilon_1 = 0,1$:

$$m_1 > 122,7675 + 1,28 \cdot 10,27 = 135,9131 \approx 136.$$

$$\text{Прибыль}_{0,9} = 167 \cdot 10\ 000 - 123 \cdot 136 = 1\ 653\ 272 \text{ руб.}$$

Проведем аналогичные вычисления для вероятности $\gamma_2 = 0,95$.

Вычислим $\varepsilon_2 = 1 - \gamma_2 = 0,05$.

Тогда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon_2 = 0,9$. По таблице находим аргумент функции Лапласа $t = 1,645$.

С помощью интегральной теоремы Лапласа определим количество страховых случаев, превышающее среднее их количество с заданной вероятностью $\varepsilon_2 = 0,05$:

$$m_2 > 122,7675 + 1,645 \cdot 10,27 = 139,6617 \approx 140.$$

Прибыль $_{0,95} = 167 \cdot 10\,000 - 123 \cdot 140 = 1\,652\,780$ руб.

Лабораторная работа №3

Расчеты в личном страховании

Содержание лабораторной работы

Дана таблица смертности населения в отдельных возрастах. Необходимо определить единовременную тарифную ставку при смешанном страховании на дожитие и на случай смерти, используя таблицу смертности и коммутационные числа.

Порядок работы

1. Вычисление числа умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + n$ год.
2. Вычисление вероятности умереть при переходе от возраста x к возрасту $x + n$ лет.
3. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти.
4. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет.
5. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти с помощью коммутационных чисел.
6. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет с использованием коммутационных чисел.
7. Вычисление единовременной нетто-ставки при смешанном страховании на дожитие и на случай смерти.
8. Вычисление расчетной тарифной ставки.
9. Вычисление суммы страховых взносов.
- 10*. Построить график зависимости единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти и график зависимости единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие от возраста застрахованного. Для этого диапазон возраста застрахованного x взять в интервале возрастов, данных в варианте, и возраст застрахованного при окончании срока действия договора взять также из варианта.

Условные обозначения

x – возраст страхователя

L_x – число доживающих до возраста x лет

d_x – число умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + 1$ год
 g_x – вероятность умереть в течение предстоящего года жизни
 n – срок страхования, лет.

1. Вычисление числа умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x + n$ лет:

$${}_n d_x = L_x - L_{x+n}.$$

2. Вычисление вероятности умереть при переходе от возраста x к возрасту $x + n$ лет:

$${}_n g_x = \frac{{}_n d_x}{L_x}.$$

3. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти в возрасте x лет на срок n лет.

Нетто-ставка записывается символом ${}^n A_x$.

Единовременная нетто-ставка (%) будет следующая:

$${}^n A_x = \frac{(d_x \cdot V^1) + (d_{x+1} \cdot V^2) + \dots + (d_{x+n-1} \cdot V^n)}{L_x} \cdot 100\%,$$

где $d_x, d_{x+1}, \dots, d_{x+n-1}$ – число лиц, умирающих в возрасте $x, x + 1, \dots, x + n - 1$ лет (см. Приложение, табл. 2);

V^1, V^2, \dots, V^n – дисконтирующий множитель для первого, второго, ..., n -го годов.

Дисконтирующий множитель при процентной ставке i вычисляется по формуле

$$V^k = \frac{1}{(1+i)^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ДЛЯ ВСЕХ ВАРИАНТОВ считать процентную ставку $i = 4\%$.

4. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет.

Нетто-ставка записывается символом ${}^n E_x$.

Единовременная нетто-ставка (%) будет следующая:

$${}^n E_x = \frac{L_{x+n} \cdot V^n}{L_x} 100\%.$$

5. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти с помощью коммутационных чисел по формуле

$${}^nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} 100\% .$$

6. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет с использованием коммутационных чисел производится по формуле

$${}^nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} 100\% .$$

7. Вычисление единовременной нетто-ставки при смешанном страховании на дожитие и на случай смерти.

Данная нетто-ставка ${}^nT_{Hx}$ рассчитывается как совокупная нетто-ставка:

$${}^nT_{Hx} = {}^nE_x + {}^nA_x .$$

8. Вычисление расчетной тарифной ставки, если доля нагрузки H_0 , производится по формуле

$$T_{st} = \frac{T_H \cdot 100}{100 - H_0} .$$

9. Вычисление суммы страховых взносов для страховой суммы C :

$$V = T_{st} \cdot C .$$

Пример

Вычислить единовременную тарифную ставку по смешанному страхованию на дожитие и на случай смерти, если страхователю 30 лет, срок страхования – 20 лет, и если страхователю 40 лет, срок страхования – 10 лет. Доля нагрузки в тарифе – 10%. Страховая сумма – 12 000 руб.

1. Вычисление числа умирающих при переходе от возраста x к возрасту $x+1$ год.

$$1) \quad {}_{50}d_{30} = L_{30} - L_{50} = 96\,307 - 89\,918 = 6\,389,$$

$$2) \quad {}_{50}d_{40} = L_{40} - L_{50} = 93\,918 - 89\,918 = 4\,000.$$

2. Вычисление вероятности умереть при переходе от возраста x к возрасту $x+n$ лет:

$$1) \quad {}_{50}g_{30} = \frac{{}_{50}d_{30}}{L_{30}} = \frac{6389}{96307} = 0,066 ,$$

$$2) \quad {}_{50}g_{40} = \frac{{}_{50}d_{40}}{L_{40}} = \frac{4000}{93918} = 0,043 .$$

3. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти в возрасте x лет на срок n лет.

Нетто-ставка записывается символом nA_x .

Единовременная нетто-ставка (%) будет следующая:

$$1) \quad {}^{20}A_{30} = \frac{(d_{30} \cdot V^1) + (d_{31} \cdot V^2) + \dots + (d_{49} \cdot V^{20})}{L_{30}} 100\% = 4,2\% ,$$

$$2) \quad {}^{10}A_{40} = \frac{(d_{40} \cdot V^1) + (d_{41} \cdot V^2) + \dots + (d_{49} \cdot V^{10})}{L_{40}} 100\% = 3,4\% .$$

Дисконтирующий множитель при процентной ставке $i=0,04$ вычисляется по формуле

$$V^k = \frac{1}{(1+0,4)^k} = 1,4^{-k} , k=1, 2, \dots , n.$$

4. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет:

$$1) \quad {}^{20}E_{30} = \frac{L_{50} \cdot V^{20}}{L_{30}} \cdot 100\% = 42,6\% ,$$

$$2) \quad {}^{10}E_{40} = \frac{L_{50} \cdot V^{10}}{L_{40}} \cdot 100\% = 64,7\% .$$

5. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на случай смерти с помощью коммутационных чисел (см. Приложение, табл. 3) по формуле

$$1) \quad {}^{20}A_{30} = \frac{M_{30} - M_{50}}{D_{30}} 100\% = 4,2\% ,$$

$$2) {}_{10}A_{40} = \frac{M_{40} - M_{50}}{D_{40}} 100\% = 3,4\%.$$

6. Вычисление единовременной нетто-ставки по страхованию на дожитие для лиц в возрасте x лет при сроке страхования n лет с использованием коммутационных чисел производится по формуле

$$1) {}_{20}E_{30} = \frac{D_{50}}{D_{30}} 100\% = 42,6\%,$$

$$2) {}_{10}E_{40} = \frac{D_{50}}{D_{40}} 100\% = 64,7\%.$$

7. Вычисление единовременной нетто-ставки при смешанном страховании на дожитие и на случай смерти:

$$1) {}^{20}T_{H30} = {}^{20}E_{30} + {}^{20}A_{30} = 4,2\% + 42,6\% = 46,8\%,$$

$$2) {}^{10}T_{H40} = {}^{10}E_{40} + {}^{10}A_{40} = 3,4\% + 64,7\% = 68,1\%.$$

8. Вычисление расчетной тарифной ставки:

$$1) {}^{20}Tst_{30} = \frac{46,8 \cdot 100}{100 - 10} = 52\%,$$

$$2) {}^{10}Tst_{40} = \frac{68,1 \cdot 100}{100 - 10} = 75,7\%.$$

9. Вычисление суммы страховых взносов для страховой суммы C :

$$1) {}^{20}V_{30} = 52\% \cdot 12000 = 6\ 240 \text{руб.},$$

$$2) {}^{10}V_{40} = 75,7\% \cdot 12000 = 9\ 084 \text{руб.}$$

Лабораторная работа №4

Оценка резерва перестраховочной компании

Содержание лабораторной работы

Дана функция плотности распределения случайной величины – риска перестраховщика $f(x)$. Необходимо для эксцедентного и квотного договора:

- 1) оценить математическое ожидание и дисперсию риска перестраховщика;
- 2) определить резерв перестраховщика при вероятности выживания 0,95;
- 3) проанализировать взаимосвязь между вероятностью выживания компании и размером резерва.

Порядок работы

1. Вычисление интеграла $M(X) = \int_r^S (x-r)f(x)dx$, где r – уровень собственного удержания цедента.

2. Вычисление интеграла $D(X) = \int_r^S (x-r)^2 f(x)dx$.

3. Вычисление интеграла $M(X) = \int_0^S (1-\alpha)xf(x)dx$, где α – доля, оставшаяся на удержании цедента.

4. Вычисление интеграла $D(X) = \int_0^S (1-\alpha)^2 x^2 f(x)dx$.

5. Определение резерва при вероятности выживания 0,95 для эксцедентного и квотного договора.

6. Определение границ ответственности перестраховщика при вероятности выживания 0,99.

7*. Построить функцию зависимости размера резерва от вероятности выживания для значений функции Лапласа, приведенных в таблице (см. Приложение, табл. 1).

Условные обозначения

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X

x_i – значение случайной величины X

$D(X)$ – дисперсия случайной величины X

σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины

U – резерв.

1. – 4. Вычислить интеграл $\int_a^b y dx$.

5. Определить резерв U_0 при вероятности выживания 0,95.

$\varepsilon = 1 - 0,95 = 0,05$, $1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, откуда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon = 0,9$, по таблице значений функции Лапласа получаем $t = 1,645$.

$$t = \frac{U_0 - M}{\sigma}, \text{ откуда } U_0 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D}.$$

6. Определить границу ответственности перестраховщика при вероятности выживания 0,99:

$$\varepsilon = 1 - 0,99 = 0,01,$$

$1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, откуда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon = 0,98$, по таблице значений функции Лапласа получаем $t = 2,33$.

$$t = \frac{U_1 - M}{\sigma}, \text{ откуда } U_1 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D}.$$

Тогда граница ответственности перестраховщика – до U_1 .

Пример

Дана функция плотности распределения случайной величины – риска перестраховщика $f(x) = \exp(-2,5x)$. Необходимо для эксцедентного и квотного договора:

1) оценить математическое ожидание и дисперсию риска перестраховщика;

2) определить резерв перестраховщика при вероятности выживания 0,95;

3) оценить рисковую премию в перестраховочном договоре при повышении надежности до 0,99.

Уровень собственного удержания цедента в обоих случаях составляет 40% от страховой стоимости $S = 10^7$ руб.

Пусть $S = 10^7$ руб. = 1 единице страховой суммы.

1. Определить размер ожидаемого ущерба:

$$M(X) = \int_r^S (x-r)f(x)dx = \int_{0,4}^1 (x-0,4)e^{-2,5x} dx = 0,402.$$

2. Определить дисперсию случайной величины:

$$D(X) = \int_r^S (x-r)^2 f(x)dx = \int_{0,4}^1 (x-0,4)^2 e^{-2,5x} dx = 0,309.$$

3. Определить размер ожидаемого ущерба:

$$M(X) = \int_0^S (1-\alpha)xf(x)dx = \int_0^1 (x-0,4)xe^{-2,5x} dx = 0,222.$$

4. Определить дисперсию случайной величины:

$$D(X) = \int_0^S (1-\alpha)^2 x^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-0,4)^2 x^2 e^{-2,5x} dx = 0,0063.$$

5. Определить резерв при вероятности выживания 0,95 для эксцедентного и кватного договора.

Резерв U_0 при вероятности выживания 0,95.

$$\varepsilon = 1 - 0,95 = 0,05,$$

$1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, откуда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon = 0,9$, по таблице значений функции Лапласа получаем $t = 1,645$.

Для эксцедентного договора перестрахования

$$U_0 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D} = 0,402 + 1,645 \cdot \sqrt{0,309} = 1,315.$$

Для кватного договора перестрахования

$$U_0 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D} = 0,222 + 1,645 \cdot \sqrt{0,0063} = 0,352.$$

6. Определить границу ответственности перестраховщика при вероятности выживания 0,99:

$$\varepsilon = 1 - 0,99 = 0,01,$$

$1 - \Phi(t) = 2\varepsilon$, откуда $\Phi(t) = 1 - 2\varepsilon = 0,98$, по таблице значений функции Лапласа получаем $t = 2,33$.

Для эксцедентного договора перестрахования

$$U_1 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D} = 0,402 + 2,33 \cdot \sqrt{0,309} = 1,695.$$

Для кватного договора перестрахования

$$U_1 = M + t\sigma = M + t\sqrt{D} = 0,222 + 2,33 \cdot \sqrt{0,0063} = 0,406.$$

Полученные результаты даны в единицах страховой суммы, пересчитаем ответы в рублях и получим следующую таблицу.

Вероятность выживания	Резерв для эксцедентного договора (руб.)	Резерв для кватного договора (руб.)
0,95	13 150 000	16 950 000
0,99	3 520 000	4 060 000

Приложение

Таблица 1. Некоторые значения функции Лапласа

$\Phi(t)$	0,8	0,82	0,84	0,86	0,88	0,9	0,92	0,94	0,96	0,98
t	1,28	1,34	1,405	1,476	1,555	1,645	1,75	1,88	2,054	2,332

Таблица 2. Таблица смертности

x	L_x	x	L_x	x	L_x	x	L_x
0	100 000	10	98 402	20	97 813	30	96 307
1	98 811	11	98 381	21	97 689	31	96 117
2	98 714	12	98 361	22	97 560	32	95 918
3	98 644	13	98 337	23	97 426	33	95 709
4	98 594	14	98 307	24	97 286	34	95 490
5	98 552	15	98 263	25	97 140	35	95 260
6	98 514	16	98 201	26	96 988	36	95 018
7	98 481	17	98 121	27	96 829	37	94 764
8	98 450	18	98 030	28	96 663	38	94 496
9	98 424	19	97 925	29	96 489	39	94 214
40	93 918	50	89 918	60	83 122	70	71 846
41	93 606	51	89 389	61	82 227	71	70 403
42	93 277	52	88 831	62	81 285	72	68 897
43	92 931	53	88 242	63	80 294	73	67 328
44	92 566	54	87 621	64	79 253	74	65 694
45	92 181	55	86 966	65	78 160	75	63 996
46	91 775	56	86 276	66	77 012	76	62 234
47	91 347	57	85 548	67	75 808	77	60 408
48	90 896	58	84 781	68	74 547	78	58 520
49	90 420	59	83 973	69	73 227	79	56 571
80	54 563	90	32 224	100	11 566	110	1 485
81	52 499	91	29 916	101	9 992	111	1 100
82	50 383	92	27 631	102	8 542	112	796
83	48 218	93	25 381	103	7 220	113	561
84	46 010	94	23 178	104	6 029	114	384
85	43 764	95	21 033	105	4 968	115	255
86	41 487	96	18 957	106	4 036	116	163
87	39 186	97	16 962	107	3 228	117	100
88	36 869	98	15 059	108	2 539	118	58
89	34 545	99	13 257	109	1 961	119	32

Таблица 3. Коммутационные числа для $i = 0,04$

Год x	Число доживших l_x	D_x	C_x	M_x	N_x
0	100000	100000	1143,269	7560,587	2403421
1	98811	95010,58	89,68195	6417,318	2303421
2	98714	91266,64	62,22975	6327,636	2208410
3	98644	87694,16	42,74021	6265,406	2117144
4	98594	84278,56	34,52094	6222,666	2029450
5	98552	81002,56	30,03195	6188,145	1945171
6	98514	77857,05	25,07729	6158,113	1864168
7	98481	74837,47	22,6514	6133,036	1786311
8	98450	71936,45	18,26726	6110,385	1711474
9	98424	69151,4	14,86241	6092,117	1639538
10	98402	66476,87	13,6412	6077,255	1570386
11	98381	63906,42	12,49194	6063,614	1503909
12	98361	61435,99	14,41378	6051,122	1440003
13	98337	59058,65	17,32425	6036,708	1378567
14	98307	56769,84	24,43164	6019,384	1319508
15	98263	54561,96	33,10231	5994,952	1262738
16	98201	52430,32	41,06986	5961,85	1208176
17	98121	50372,7	44,92016	5920,78	1155746
18	98030	48390,36	49,83745	5875,86	1105373
19	97925	46479,36	51,11534	5826,022	1056983
20	97813	44640,58	54,41537	5774,907	1010504
21	97689	42869,22	54,43224	5720,492	965863,1
22	97560	41165,97	54,36733	5666,059	922993,9
23	97426	39528,29	54,61701	5611,692	881827,9
24	97286	37953,36	54,76705	5557,075	842299,6
25	97140	36438,85	54,82476	5502,308	804346,2
26	96988	34982,53	55,14383	5447,483	767907,4

Продолжение табл. 3

Год x	Число доживших l_x	D_x	C_x	M_x	N_x
27	96829	33581,9	55,35726	5392,339	732924,9
28	96663	32234,93	55,79335	5336,982	699343
29	96489	30939,33	56,114	5281,189	667108
30	96307	29693,25	56,32745	5225,075	636168,7
31	96117	28494,87	56,72653	5168,747	606475,4
32	95918	27342,19	57,28568	5112,021	577980,6
33	95709	26233,28	57,71791	5054,735	550638,4
34	95490	25166,59	58,28556	4997,017	524405,1
35	95260	24140,36	58,96783	4938,732	499238,5
36	95018	23152,91	59,5114	4879,764	475098,2
37	94764	22202,91	60,3765	4820,252	451945,2
38	94496	21288,57	61,08701	4759,876	429742,3
39	94214	20408,69	61,65356	4698,789	408453,8
40	93918	19562,09	62,48671	4637,135	388045,1
41	93606	18747,22	63,35715	4574,649	368483
42	93277	17962,81	64,0682	4511,291	349735,8
43	92931	17207,87	64,98692	4447,223	331773
44	92566	16481,04	65,91139	4382,236	314565,1
45	92181	15781,24	66,83323	4316,325	298084,1
46	91775	15107,44	67,74493	4249,492	282302,8
47	91347	14458,64	68,63984	4181,747	267195,4
48	90896	13833,9	69,65837	4113,107	252736,7
49	90420	13232,16	70,63773	4043,449	238902,8
50	89918	12652,6	71,57401	3972,811	225670,7
51	89389	12094,38	72,59397	3901,237	213018,1
52	88831	11556,62	73,67978	3828,643	200923,7
53	88242	11038,46	74,69496	3754,963	189367,1

Продолжение табл. 3

Год x	Число доживших l_x	D_x	C_x	M_x	N_x
54	87621	10539,21	75,75436	3680,268	178328,6
55	86966	10058,1	76,73298	3604,514	167789,4
56	86276	9594,514	77,84506	3527,781	157731,3
57	85548	9147,65	78,86089	3449,936	148136,8
58	84781	8716,956	79,88116	3371,075	138989,2
59	83973	8301,807	80,8964	3291,194	130272,2
60	83122	7901,611	81,80679	3210,297	121970,4
61	82227	7515,896	82,79114	3128,49	114068,8
62	81285	7144,032	83,74778	3045,699	106552,9
63	80294	6785,513	84,58961	2961,952	99408,85
64	79253	6439,943	85,39906	2877,362	92623,34
65	78160	6106,853	86,2465	2791,963	86183,39
66	77012	5785,728	86,97466	2705,716	80076,54
67	75808	5476,225	87,58869	2618,742	74290,81
68	74547	5178,013	88,16039	2531,153	68814,59
69	73227	4890,698	88,68699	2442,993	63636,58
70	71846	4613,907	89,10442	2354,306	58745,88
71	70403	4347,345	89,41792	2265,201	54131,97
72	68897	4090,721	89,57549	2175,783	49784,63
73	67328	3843,81	89,69845	2086,208	45693,9
74	65694	3606,273	89,62667	1996,509	41850,09
75	63996	3377,944	89,42771	1906,883	38243,82
76	62234	3158,595	89,11148	1817,455	34865,88
77	60408	2947,999	88,59343	1728,344	31707,28
78	58520	2746,021	87,93829	1639,75	28759,28
79	56571	2552,467	87,11573	1551,812	26013,26
80	54563	2367,179	86,1012	1464,696	23460,8

Продолжение табл. 3

Год x	Число доживших l_x	D_x	C_x	M_x	N_x
81	52499	2190,032	84,8754	1378,595	21093,62
82	50383	2020,925	83,50082	1293,719	18903,58
83	48218	1859,696	81,88391	1210,219	16882,66
84	46010	1706,286	80,08956	1128,335	15022,96
85	43764	1560,57	78,0721	1048,245	13316,68
86	41487	1422,476	75,86057	970,1731	11756,11
87	39186	1291,905	73,45006	894,3125	10333,63
88	36869	1168,766	70,83843	820,8625	9041,728
89	34545	1052,975	68,02595	750,024	7872,962
90	32224	944,4499	65,0432	681,9981	6819,987
91	29916	843,0817	61,91829	616,9549	5875,537
92	27631	748,7372	58,62488	555,0366	5032,456
93	25381	661,3147	55,19257	496,4117	4283,719
94	23178	580,6869	51,67257	441,2191	3622,404
95	21033	506,6803	48,0869	389,5466	3041,717
96	18957	439,1057	44,43334	341,4597	2535,037
97	16962	377,7836	40,75412	297,0263	2095,931
98	15059	322,4994	37,10686	256,2722	1718,147
99	13257	272,9887	33,48187	219,1653	1395,648
100	11566	229,0073	29,9666	185,6835	1122,659
101	9992	190,2327	26,54406	155,7169	893,6521
102	8542	156,372	23,27006	129,1728	703,4194
103	7220	127,0876	20,15786	105,9028	547,0474
104	6029	102,0418	17,26692	85,74489	419,9598
105	4968	80,85017	14,58418	68,47798	317,918
106	4036	63,15637	12,15749	53,8938	237,0678
107	3228	48,56979	9,968242	41,7363	173,9115

Окончание табл. 3

Год x	Число доживших l_x	D_x	C_x	M_x	N_x
108	2539	36,73348	8,0407	31,76806	125,3417
109	1961	27,27995	6,36707	23,72736	88,60819
110	1485	19,86365	4,951765	17,36029	61,32824
111	1100	14,1479	3,759582	12,40853	41,46458
112	796	9,844169	2,794477	8,648944	27,31668
113	561	6,67107	2,023823	5,854467	17,47251
114	384	4,390667	1,418259	3,830644	10,80144
115	255	2,803536	0,972569	2,412385	6,410774
116	163	1,723139	0,640383	1,439815	3,607238
117	100	1,016481	0,410502	0,799432	1,884099
118	58	0,566884	0,244346	0,38893	0,867618
119	32	0,300734	0,144584	0,144584	0,300734