

14. Hill R. Constitutive Inequalities for Isotropic Elastic Solids under Finite Strain, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 314, № 1519, 1970.

15. Черных К. Ф. Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости.—Изв. АН СССР, МТТ», 1970, № 3, с. 5—14.

16. Черных К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. — В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. (К 60-летию акад. В. В. Новожилова). М., Судпромгиз, 1970.

17. Черных К. Ф. Определяющие неравенства упругих тел. — В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. (К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.

18. Черных К. Ф. О постулате устойчивости анизотропного материала. — В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. (К 60-летию акад. В. Н. Челомея), 1974.

19. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. 11, Изд-во ЛГУ, 1964.

20. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. 1, ГИТТЛ, М.-Л., 1947.

21. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. М., Физматгиз, 1963.

22. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967.

23. Бондарь В. Д. Об одном представлении тензорной функции. ДАН СССР, 1961, 141, 1 с. 16—18.

24. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М., «Наука», 1965.

УДК 532.528;532.529.5/6

Г. С. Розаренов

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ КАВИТАЦИОННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

В настоящей работе получено решение краевой задачи для уравнений газовой механики, описывающей движение вязкого теплопроводного газа с учетом теплопроводности несжимаемой жидкости.

В сферической системе координат движение вязкого теплопроводного газа выражается уравнениями:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{up}{r} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0;$$

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial r} \right) + p \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2 \frac{up}{r} = 0,$$

где T — температура, E — внутренняя энергия на единицу массы, μ и χ — соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.

Уравнения состояния запишутся в виде

$$p = R_r \rho T, \quad E = kT, \quad (2)$$

где R_r и k — некоторые газовые постоянные.

Решение

$$v = \begin{cases} \rho(t, r) \\ u(t, r) \\ T(t, r) \end{cases}$$

системы уравнений (1), (2) необходимо искать при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} t=0: \rho(0, r) = \rho_0, \quad u(0, r) = 0, \quad T(0, r) = T_0, \quad r \in [0, R_0]; \\ r=0: u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r=R(t): u(t, R(t)) = \dot{R}(t); \quad p = \rho_1 R \frac{du}{dt} + \\ + u \left[\frac{3}{2} \rho_1 u + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1} \right] + 2\sigma R^{-1} + (\rho_0 + p_\infty); \\ * \frac{\partial T}{\partial r} = \kappa_1 \frac{\partial T}{\partial r}; \quad T(t, R) = \alpha(t) = T_1(t, R), \end{aligned}$$

здесь ρ_1 — плотность, T_1 — температура, μ_1 и κ_1 — коэффициенты вязкости и теплопроводности жидкости.

Давление газа на поверхности пузырька с учетом закона сохранения массы ($u = \dot{R}$) получено из закона сохранения импульса в виде

$$(\sigma_{rr})_г = (\sigma_{rr})_ж, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} \right) -$$

нормальная компонента тензора напряжений (в рассматриваемой задаче именно эта компонента отлична от нуля).

Из (4) вытекает, что при $r=R(t)$ и, следовательно, из интеграла Лагранжа—Коши для ρ_1 , следует:

$$p = \rho_1 R \dot{R} + \dot{R} [1,5 \rho_1 R + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1}] + 2\sigma R^{-1} + (\rho_0 + p_\infty).$$

Уравнение баланса тепла для жидкости—

$$\rho_1 k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + v \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = 0, \quad (5)$$

здесь v — радиальная скорость жидкости; k_1 — константа из уравнения состояния

$$\begin{aligned} E_1 = k_1 T_1, \\ T_1(t, \infty) = T_0. \end{aligned}$$

Из несжимаемости жидкости следует, что $\rho_1 = \text{const}$, а

$$v(t, r) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} = u(t, R) \left[\frac{R(t)}{r} \right]^2.$$

Теперь краевую задачу можно записать (1—3,5) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u\rho}{r} &= 0; \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0; \\ \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= 0; \\ \rho &= R_r \rho T, \quad E = kT; \\ k_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + v \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 - \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) &= 0; \\ t=0: r \in [0, 1], \rho(0, r) &= 1; T(0, r) = T_0/c^2; u(0, r) = 0; \\ r = R(t): u(t, R(t)) &= \dot{R}(t); \quad \rho = \rho_1 R \frac{du}{dt} + \\ &+ u \left[\frac{3}{2} \rho_1 u + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1} \right] + 2\sigma R^{-1} + \rho_0 + \rho_\infty; \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial r} &= \kappa_1 \frac{\partial T}{\partial r}; \\ T(t, R) &= T_1(t, R); \\ T_1(t, \infty) &= T_0/c^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для численного интегрирования задачи (6) используется разностный метод, элементы которого изложены в [2]. Конструкция подвижной разностной сетки выбрана таким образом, чтобы не выделять разрывы в искомом решении, которые будут сглажены из-за вязкости газа.

Разностная схема для аппроксимации дифференциальных и интегральных законов сохранения получена для внутренней задачи течения газа в [1]. Поэтому выпишем лишь разностную схему для аппроксимации граничных условий на подвижной границе при $r=R(t)$, а также разностной схемы уравнения баланса тепла для жидкости при

$$r > R(t).$$

Так как граница раздела сред $r=R(t)$ является контактным разрывом, имеем

$$u(t, R) = v(t, R).$$

Следовательно, разностная схема для промежуточного слоя $t=t_0 + \tau/2$ имеет следующий вид:

$$v_1 = u_N; \quad T_1 = T_N;$$

$$\alpha_1 (T_2 - T_1) = \alpha (T_N - T_{N-1});$$

$$\tilde{\rho}_N + a_N (\tilde{u}_N - \tilde{u}_{N-1}) = f_N;$$

$$b_N \tilde{u}_N + c_N \tilde{\rho}_N = g_N.$$

Уравнение теплопроводности (5) для жидкости аппроксимируется на промежуточном слое при $t = t_0 + \tau/2$ неявными разностными уравнениями

$$\alpha_m \tilde{T}_{m+1} + \beta_m \tilde{T}_m + \gamma_m \tilde{T}_{m-1} = h_m;$$

$$\tilde{T}_M = T_0, \quad m = 2, 3, 4, \dots M(t). \quad (7)$$

Для вычисления величины T на искомом слое при $r > R(t)$ используется явная разностная схема, аппроксимирующая интегральный закон сохранения энергии

$$\oint \left[\rho \left(k_1 T_1 + \frac{v^2}{2} \right) \right] r^2 dr - \rho_1 v \left[k_1 T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v^2}{2} - \frac{4}{3} \mu_1 v \frac{\partial v}{\partial r} - \chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right] r^2 dt,$$

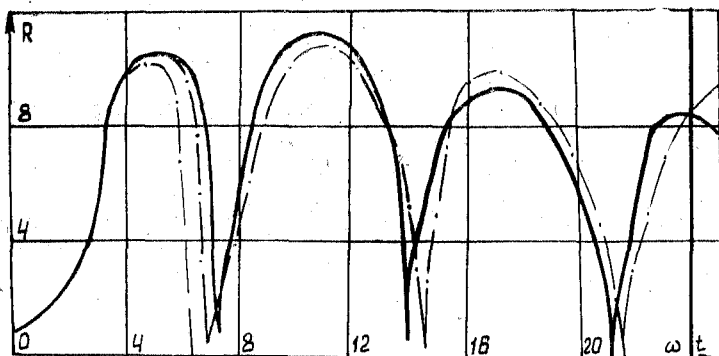


Рис. 1

выписываемый для элементарной ячейки разностной сетки, использующей осредненные значения $T_{i-\frac{1}{2}}$, $T_{i+\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое.

Решение на промежуточном слое при $r \leq R(t)$ находится с помощью матричной прогонки, а при $r > R(t)$ с помощью обычной прогонки для уравнений (7).

Численное интегрирование задачи (6) было выполнено при

$$R_0 = 0,005 \text{ см}, \quad \omega = 750 \text{ кгц}, \quad \rho_m = 10 \text{ ат}, \quad \rho_0 = 1 \text{ ат},$$

$$\mu = 0,02 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}, \quad \mu_1 = 0,01006 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}, \quad \sigma = 72,75 \text{ дн},$$

$$\chi = 0,598 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}, \quad \chi_1 = 0,00143 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}.$$

На рис. 1,2 показано поведение траекторий $R(t)$, $R(t)$ решения уравнения Нолтинга—Неппаерса для тех же начальных данных. Решение задачи (6) приведено на рис. 1,2 в сравнении с решением, полученным для газодинамической задачи при $\chi=0$ — без теплообмена с жидкостью.

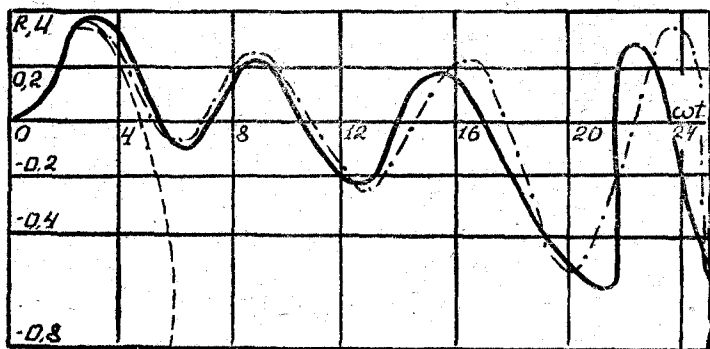


Рис. 2

Анализ результатов показывает, что в начале пульсаций (для $\chi \neq 0$) получен большой рост пузырька за счет поглощения тепла из жидкости в фазе роста. Для $\omega t > 18$ существенную роль начинает играть теплоотдача в жидкость, так как температура газа в полости увеличивается за счет диссипации энергии на фронте ударной волны, возникающей при интенсивном схлопывании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розаренов Г. С. Влияние вязкости и теплопроводности газа на пульсацию сферического пузырька в несжимаемой жидкости. — «Труды НИИМ Воронежского гос. ун-та», 1973, вып. 8.
2. Алашкин Т. Б., Годунов С. К. и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., 1970.