14. Hill R. Constitutive Inequalities for Isotropic Elastic Solids under Finite Strain, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 314, № 1519, 1970.
15. **Черных К. Ф.** Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости.—«Изв. АН СССР, МТТ», 1970, № 3, с. 5—14.
16. **Черных К. Ф.** О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. — В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. (К 60-летию акад. В. В. Новожилова). М., Судпромгиз, 1970.
17. **Черных К. Ф.** Определяющие неравенства упругих тел. — В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. (К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.
18. **Черных К. Ф.** О постулате устойчивости анизотропного материала. — В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. (К 60-летию акад. В. Н. Челомея), 1974.
19. **Черных К. Ф.** Линейная теория оболочек. II, Изд-во ЛГУ, 1964.
20. **Каган В. Ф.** Основы теории поверхностей. I, ГИТТЛ, М.-Л., 1947.
21. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ М., Физматгиз, 1963.
22. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967.
23. **Бондарь В. Д.** Об одном представлении тензорной функции. ДАН СССР, 1961, 141, 1 с. 16—18.
24 **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М., «Наука», 1965.

УДК 532.528;532.529.5/6

Г. С. Розаренов

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ КАВИТАЦИОННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

В настоящей работе получено решение краевой задачи для уравнений газовой механики, описывающей движение вязкого теплопроводного газа с учетом теплопроводности несжимаемой жидкости.

В сферической системе координат движение вязкого теплопроводного газа выражается уравнениями:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial u}{\partial r}+2\frac{u\rho}{r}=0; \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t}+u\frac{\partial E}{\partial r}\right)+p\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2-\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+$$

$$+2\frac{up}{r}=0,$$

где T — температура, E — внутренняя энергия на единицу массы, μ и χ—соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.

Уравнения состояния запишутся в виде

$$p = R_г \rho T, \quad E = kT, \tag{2}$$

где $R_г$ и k — некоторые газовые постоянные.

Решение

$$v = \begin{vmatrix} \rho(t, r) \\ u(t, r) \\ T(t, r) \end{vmatrix}$$

системы уравнений (1), (2) необходимо искать при следующих краевых условиях:

$$t = 0 : \rho(0, r) = \rho_0, \ u(0, r) = 0, \ T(0, r) = T_0, \ r \in [0, R_0];$$

$$r = 0 : u(t, 0) = 0, \ \frac{\partial T}{\partial r} = 0; \tag{3}$$

$$r = R(t) : u(t, R(t)) = R(t); \ p = \rho_1 R \frac{du}{dt} +$$

$$+ u\left[\frac{3}{2}\rho_1 u + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1}\right] + 2\sigma R^{-1} + (p_0 + p_\infty);$$

$$\varkappa \frac{\partial T}{\partial r} = \varkappa_1 \frac{\partial T}{\partial r}; \ T(t, R) = \alpha(t) = T_1(t, R),$$

здесь ρ_1 — плотность, T_1 — температура, μ_1 и $\varkappa_1$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности жидкости.

Давление газа на поверхности пузырька с учетом закона сохранения массы ($u = \dot{R}$) получено из закона сохранения импульса в виде

$$(\sigma_{rr})_г = (\sigma_{rr})_ж, \tag{4}$$

где

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}\right) -$$

нормальная компонента тензора напряжений (в рассматриваемой задаче именно эта компонента отлична от нуля).

Из (4) вытекает, что при $r = R(t)$ и, следовательно, из интеграла Лагранжа—Коши для p_1, следует:

$$p = \rho_1 R \ddot{R} + \dot{R}[1{,}5\rho_1 \dot{R} + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1}] + 2\sigma R^{-1} + (p_0 + p_\infty).$$

Уравнение баланса тепла для жидкости—

$$\rho_1 k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + v \frac{\partial T_1}{\partial r}\right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \varkappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0, \tag{5}$$

здесь v—радиальная скорость жидкости; k_1 — константа из уравнения состояния

$$E_1 = k_1 T_1,$$

$$T_1(t, \infty) = T_0.$$

Из несжимаемости жидкости следует, что $\rho_1 = \mathrm{const}$, а

$$v(t, r) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} = u(t, R)\left[\frac{R(t)}{r}\right]^2.$$

Теперь краевую задачу можно записать (1—3,5) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u\rho}{r} = 0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0;$$

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) + p\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0;$$

$$p = R_{\text{г}}\,\rho\, T, \quad E = kT;$$

$$k_1\rho_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + v\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) - \mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 - \varkappa_1\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r}\right) = 0;$$

$$t = 0 : r \in [0,1],\ \rho(0, r) = 1;\ T(0, r) = T_0/c^2 : u(0, r) = 0; \qquad (6)$$

$$r = R(t) : u(t, R(t)) = \dot{R}(t); \quad p = \rho_1 R\frac{du}{dt} +$$

$$+ u\left[\frac{3}{2}\rho_1 u + 4(\mu_1 - \mu) R^{-1}\right] + 2\sigma R^{-1} + p_0 + p_\infty;$$

$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial r} = \varkappa_1\frac{\partial T}{\partial r};$$

$$T(t, R) = T_1(t, R);$$

$$T_1(t, \infty)\; T_0/c^2.$$

Для численного интегрирования задачи (6) используется разностный метод, элементы которого изложены в [2]. Конструкция подвижной разностной сетки выбрана таким образом, чтобы не выделять разрывы в искомом решении, которые будут сглажены из-за вязкости газа.

Разностная схема для аппроксимации дифференциальных и интегральных законов сохранения получена для внутренней задачи течения газа в [1]. Поэтому выпишем лишь разностную схему для аппроксимации граничных условий на подвижной границе при $r = R(t)$, а также разностной схемы уравнения баланса тепла для жидкости при

$$r > R(t).$$

Так как граница раздела сред $r = R(t)$ является контактным разрывом, имеем

$$u(t, R) = v(t, R).$$

Следовательно, разностная схема для промежуточного слоя $t = t_0 + \tau/2$ имеет следующий вид:

$$v_1 = u_N; \quad T_1 = T_N;$$

$$\varkappa_1 (T_2 - T_1) = \varkappa (T_N - T_{N-1});$$

$$\tilde{\rho}_N + a_N (\tilde{u}_N - \tilde{u}_{N-1}) = f_N;$$

$$b_N \tilde{u}_N + c_N \tilde{\rho}_N = g_N.$$

Уравнение теплопроводности (5) для жидкости аппроксимируется на промежуточном слое при $t = t_0 + \tau/2$ неявными разностными уравнениями

$$\alpha_m \tilde{T}_{m+1} + \beta_m \tilde{T}_m + \gamma_m \tilde{T}_{m-1} = h_m;$$

$$\tilde{T}_M = T_0, \qquad m = 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ M(t). \tag{7}$$

Для вычисления величины T на искомом слое при $r > R(t)$ используется явная разностная схема, аппроксимирующая интегральный закон сохранения энергии

$$\oint \left[\rho \left(k_1 T_1 + \frac{v^2}{2}\right)\right] r^2\, dr - \rho_1 v \left[k_1 T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v^2}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3} \mu_1 v \frac{\partial v}{\partial r} - \varkappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}\right] r^2\, dt,$$

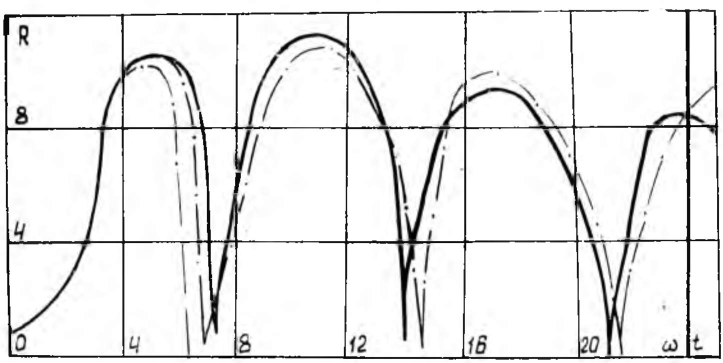

Рис. 1

выписываемый для элементарной ячейки разностной сетки, использующей осредненные значения $T_{i-\frac{1}{2}}$, $T_{i+\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое.

Решение на промежуточном слое при $r < R(t)$ находится с помощью матричной прогонки, а при $r > R(t)$ с помощью обычной прогонки для уравнений (7).

Численное интегрирование задачи (6) было выполнено при

$$R_0 = 0{,}005 \text{ см}, \quad \omega = 750 \text{ кгц}, \quad p_m = 10 \text{ ат}, \quad p_0 = 1 \text{ ат},$$

$$\mu = 0{,}02\ \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}, \quad \mu_1 = 0{,}01006\ \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}, \quad \sigma = 72{,}75 \text{ дн},$$

$$\varkappa = 0{,}598 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}, \quad \varkappa_1 = 0{,}00143 \frac{\text{как}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}.$$

На рис. 1,2 показано поведение траекторий $R(t)$, $\dot{R}(t)$ решения уравнения Нолтинга—Неппаерса для тех же начальных данных. Решение задачи (6) приведено на рис. 1,2 в сравнении с решением, полученным для газодинамической задачи при $\chi = 0$— без теплообмена с жидкостью.

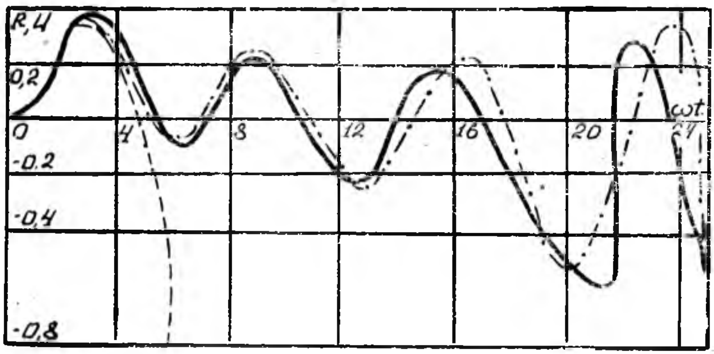

Рис. 2

Анализ результатов показывает, что в начале пульсаций (для $\chi \neq 0$) получен большой рост пузырька за счет поглощения тепла из жидкости в фазе роста. Для $\omega t > 18$ существенную роль начинает играть теплоотдача в жидкость, так как температура газа в полости увеличивается за счет диссипации энергии на фронте ударной волны, возникающей при интенсивном схлопывании.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Розаренов Г. С.** Влияние вязкости и теплопроводности газа на пульсацию сферического пузырька в несжимаемой жидкости. — «Труды НИИМ Воронежского гос. ун-та», 1973, вып. 8.
2. **Алалыкин Т. Б., Годунов С. К.** и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., 1970.