

ной. В [3] доказано, что, если возмущения достаточно малы, то знак (2.5) совпадает со знаком линейного приближения. В случае конечных, порядка единицы возмущений, необходимо исследовать знак всего выражения (2.5). Можно показать аналогично [3], что для достаточно больших возмущений знак функции  $V$  будет определяться знаком последней формы в разложении потенциальной энергии. При этом функция  $V$  будет знакопостоянной в некоторой области изменения параметров нагрузки, если разложение потенциальной энергии обрывается формой четного порядка. В качестве критерия знакоопределенности формы высшего порядка можно использовать критерий [4].

В связи со сказанным возникают две постановки задачи устойчивости при конечных возмущениях:

1. Для заданного из физических соображений класса возмущений найти область изменения параметров нагрузки, для которых  $V > 0$ .

2. Из условия положительности (2.5) для каждого значения параметра нагрузки найти максимально допустимые возмущения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость в «большом». Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1958, вып. 3.
2. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
3. Малкин Н. Г. Теория устойчивости движения. М., Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
4. Вейссенберг А. Н. Критерии знакоопределенности форм высшего порядка. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., «Наука», 1961.

УДК 532.5.013.4

Н. В. Заварзин, В. М. Суязов

### ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИЧНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПО ЦИЛИНДРУ

1. Рассмотрим осесимметричное ламинарное течение жидкой пленки толщиной  $h$  по поверхности вертикального цилиндра радиуса  $a$ , происходящее под действием сил гравитации. Уравнения движения и неразрывности однородной вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющейся закону Навье-Стокса, в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla v, \quad \nabla \bar{v} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\bar{v}$  ( $u, v, w$ ) — вектор скорости,  $\bar{F}$  — вектор массовой силы,  $p$  — изотропное давление,  $\text{Re} = \hat{U} h \nu^{-1}$  — число Рейнольдса,  $\hat{U}$  — характерная скорость,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

В цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ , ось  $z$  которой направлена вверх, а ось  $r$  — по нормали к поверхности цилиндра, уравнения (1.1) имеют стационарное решение:

$$u^0 = v^0 = 0; \quad w^0 = \frac{1}{4} r^2 + e_1 \ln r + e; \quad p^0 = p_a \mp \frac{S}{\gamma};$$

$$e_1 = -\frac{1}{2} \gamma^2; \quad e_2 = -\frac{1}{4\beta^2} + e_1 \ln \beta; \quad \gamma = \frac{1}{\beta} \mp 1; \quad \beta = \frac{h}{a}. \quad (1.2)$$

Решение (1.2) удовлетворяет условию прилипания на стенке цилиндра

$$w^0 = 0; \quad r = \frac{1}{\beta},$$

условию отсутствия сдвиговых напряжений на поверхности стекающей пленки (трение на границе с газовой фазой пренебрежимо мало)

$$\frac{dw^0}{dr} = 0; \quad r = \gamma$$

и условию равенства нормальных напряжений на границе жидкости с газом

$$p^0 = p_a \mp \frac{S}{\gamma}. \quad (1.3)$$

В условии (1.3)  $p_a$  — давление в газовой фазе;  $S = T/\rho U^2 h$  — безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, соответствующий размерному коэффициенту  $T$ ;  $\rho$  — плотность жидкости. Здесь и далее верхний знак соответствует течению пленки по внутренней стенке цилиндра, нижний — по внешней.

2. Предположим, что основное течение (1.2) подвергается малым трехмерным возмущениям так, что поле скоростей и давления в новом течении имеет вид

$$u = u'(r, \theta, z, t), \quad v = v'(r, \theta, z, t); \quad w = w^0(r) + w'(r, \theta, z, t);$$

$$p = p^0(r) + p'(r, \theta, z, t), \quad (2.1)$$

где штрихованные величины представляют собой малые возмущения течения (1.2).

Процедура линеаризации системы (1.1) с учетом (2.1) дает

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + w^0 \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( L u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right);$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + w^0 \frac{\partial v'}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}} \left( L v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \right); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + u' \frac{\partial \omega^0}{\partial r} + \omega^0 \frac{\partial \omega'}{\partial z} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} L \omega';$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega'}{\partial z} = 0;$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Будем рассматривать возмущения вида

$$u' = iU(r) \exp[in\theta + i\alpha(z-ct)]; \quad v' = V(r) \exp[in\theta + i\alpha(z-ct)];$$

$$\omega' = W(r) \exp[in\theta + i\alpha(z-ct)]; \quad p' = P(r) \exp[in\theta + i\alpha(z-ct)]. \quad (2.3)$$

Здесь  $U, V, W, P$ —безразмерные функции  $r$ ;  $n$  (обязательно целое)—азимутальное волновое число;  $\alpha = 2\pi h/\lambda$ —волновое число в осевом направлении;  $\lambda$ —длина волны возмущений;  $c = c_r + ic_i$ —комплексная скорость.

Подставляя (2.3) в (2.2), получим

$$\alpha(\omega^0 - c)U = DP - \frac{i}{\text{Re}} \left[ D^2U + \frac{1}{r} DU - \left( \alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) U - \frac{2u}{r^2} V \right];$$

$$\alpha(\omega^0 - c)V = -\frac{n}{r} P - \frac{i}{\text{Re}} \left[ D^2V + \frac{1}{r} DV - \left( \alpha^2 + \frac{n^2 + 1}{r^2} \right) V - \frac{2n}{r^2} U \right];$$

$$\alpha(\omega^0 - c)W + UD\omega^0 = -\alpha P - \frac{i}{\text{Re}} \left[ DW^2 + \frac{1}{r} DW - \left( \alpha^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) W \right];$$

$$DU + \frac{1}{r} U + \frac{n}{r} V + \alpha W = 0; \quad D = \frac{d}{dr}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dr^2}. \quad (2.4)$$

Система (2.4) решается методом малого параметра, в качестве которого выбирается волновое число  $\alpha$  (случай длинноволновых возмущений). Представим  $U, V, W, P$  и  $c$  бесконечными рядами по  $\alpha$ , имеющими вид

$$q = q_0 + \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 + \dots \quad (2.5)$$

При этом характер уравнений (2.4) диктует необходимость модификации разложения (2.5), которая позволит сбалансировать порядок величин, входящих в уравнения системы [1]:

$$U = \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \dots; \quad V = \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots; \quad P = \alpha P_1 + \alpha^2 P_2 + \dots$$

$$W = W_0 + \alpha W_1 + \dots; \quad c = c_0 + \alpha c_1 + \dots \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.4), получим системы уравнений, соответствующие первому и второму приближениям. Ограничиваясь рассмотрением случая  $n=1$ , в первом приближении имеем

$$DP_1 - \frac{i}{\text{Re}} \left( D^2U_1 + \frac{1}{r} DU_1 - \frac{2}{r^2} U_1 - \frac{2}{r^2} V_1 \right) = 0;$$

$$\frac{1}{r} P_1 + \frac{i}{\text{Re}} \left( D^2 V_1 + \frac{1}{r} D V_1 - \frac{2}{r^2} V_1 - \frac{2}{r^2} U_1 \right) = 0;$$

$$D^2 W_0 + \frac{1}{r} D W_0 - \frac{1}{r^2} W_0 = 0, \quad D U_1 + \frac{1}{r} U_1 + \frac{1}{r} V_1 + W_0 = 0. \quad (2.7)$$

Система уравнений второго приближения имеет вид

$$(\omega^0 - c_0) U_1 = D P_2 - \frac{i}{\text{Re}} \left( D^2 U_2 + \frac{1}{r} D U_2 - \frac{2}{r^2} U_2 - \frac{2}{r^2} V_2 \right);$$

$$(\omega^0 - c_0) V_1 = -\frac{1}{r} P_2 - \frac{i}{\text{Re}} \left( D^2 V_2 + \frac{1}{r} D V_2 - \frac{2}{r^2} V_2 - \frac{2}{r^2} U_2 \right);$$

$$(\omega^0 - c_0) W_0 + U_1 D \omega^0 = -\frac{i}{\text{Re}} \left( D^2 W_1 + \frac{1}{r} D W_1 - \frac{1}{r^2} W_1 \right);$$

$$D U_2 + \frac{1}{r} U_2 + \frac{1}{r} V_2 + W_1 = 0. \quad (2.8)$$

В качестве граничных условий воспользуемся условиями прилипания на поверхности цилиндра и динамическими условиями на поверхности стекающего слоя. С учетом разложения (2.6) эти условия для первого приближения дают

$$U_1 = V_1 = W_0 = 0; \quad r = \frac{1}{\beta}; \quad (2.9)$$

$$P_1 - \frac{2i}{\text{Re}} D U_1 = 0; \quad U_1 - \gamma D V_1 + V_1 = 0;$$

$$\frac{U_1}{\omega^0 - c_0} + D W_0; \quad r = \gamma. \quad (2.10)$$

Для второго приближения имеем

$$U_2 = V_2 = W_1 = 0; \quad r = \frac{1}{\beta}; \quad (2.11)$$

$$\mp \frac{S U_1}{\omega^0 - c_0} - P_2 + \frac{2i}{\text{Re}} D U_2 = 0; \quad U_2 - \gamma D V_2 + V_2 = 0;$$

$$\frac{U_2}{\omega^0 - c_0} + \frac{c_1 U_1}{(\omega^0 - c_0)^2} + D W_1 = 0; \quad r = \gamma. \quad (2.12)$$

3. Система (2.7) с граничными условиями (2.9) — (2.10) и система (2.8) с условиями (2.11) — (2.12) представляют собой задачи о собственных значениях, которые дают нетривиальные решения при определенных значениях собственных чисел. Решение системы (2.7) имеет вид

$$W_0 = a_1 r + a_2 r^{-1}, \quad U_1 = a_3 + a_4 \ln r + a_5 r^2 + a_6 r^{-2};$$

$$V_1 = -a_3 - a_2 - a_4 (1 + \ln r) - (3a_5 + a_1) r^2 + a_6 r^{-2};$$

$$P_1 = -\frac{ir}{\text{Re}} [-8a_5 - 2a_1 + 2(a_2 + a_4) r^{-2}]. \quad (3.1)$$

Так как решение задачи о собственных значениях определяется с точностью до постоянной, мы зафиксируем одну из постоянных  $a_i$ , именно  $a_4$ , положив  $a_4 = 1$ . Остальные пять неизвестных по-

стоянных можно определить из граничных условий (2.9) и первых двух условий (2.10):

$$a_1 = \frac{4\beta^2}{1 + \gamma^2\beta^2}; \quad a_2 = -\frac{4}{1 + \gamma^2\beta^2}; \quad a_3 = \ln \beta + \frac{\beta^{-2} + 4\gamma^2 - \beta^2\gamma^4}{2(\gamma^4\beta^2 + \beta^{-2})};$$

$$a_5 = -\frac{1 + 2\gamma^2\beta^2}{2(\gamma^4\beta^2 + \beta^{-2})}; \quad a_6 = \frac{\gamma^4 - 2\gamma^2\beta^{-2}}{2(\gamma^4\beta^2 + \beta^{-2})}. \quad (3.2)$$

Из последнего граничного условия (2.10) с учетом (3.2) находим собственное значение задачи первого приближения:

$$c_0 = \omega^0 + \frac{1}{4} \gamma^2 (a_3 + \ln \gamma - 1) \Big|_{r=\gamma}. \quad (3.3)$$

Как видно из (3.3), значение  $c_0$  вещественно, следовательно, первое приближение не дает сведений об устойчивости основного течения (1.2).

Решение системы второго приближения (2.8), найденное с учетом (1.2), (3.1) — (3.3), имеет вид

$$W_1 = b_1 r + b_2 r^{-1} + i \operatorname{Re} \tilde{W}_1(r);$$

$$U_2 = b_3 + b_4 \ln r + b_5 r^2 + b_6 r^{-2} + i \operatorname{Re} U_2(r);$$

$$V_2 = -(b_1 + 3b_5) r^2 - b_2 - b_3 - b_4 (\ln r + 1) + b_6 r^{-2} + i \operatorname{Re} \tilde{V}_2(r);$$

$$P_2 = \frac{ir}{\operatorname{Re}} \left[ 8b_5 + 2b_1 - 2(b_2 + b_4) r^{-2} \right] + P_2(r). \quad (3.4)$$

Постоянные  $b_i$  нужно определить из граничных условий второго приближения; вид функций  $\tilde{W}_1(r)$ ,  $\tilde{U}_2(r)$  и  $\tilde{V}_2(r)$ ,  $\tilde{P}_2(r)$ , включающих постоянные первого приближения (3.2), здесь не приводятся.

Так как при решении задачи о собственных значениях первого приближения была зафиксирована величина  $a_4 = 1$ , что позволило найти собственное значение  $c_0$ , то при решении задачи второго приближения необходимо положить равной нулю постоянную  $b_4$ .

Таким образом, величина  $a_4$  выбрана равной единице раз и навсегда и не подлежит уточнению в последующих приближениях. Для определения оставшихся пяти неизвестных  $b_i$  имеем пять граничных условий: условия (2.11) и первые два условия (2.12). Из них получаем

$$b_1 = -i \operatorname{Re} \frac{\beta \left[ \tilde{W}_1 \left( \frac{1}{\beta} \right) + \beta (\gamma A + B) \right]}{1 + \gamma^2 \beta^2};$$

$$b_2 = i \operatorname{Re} \frac{[(\gamma A + B) - \gamma^2 \beta \tilde{W}_1 \left( \frac{1}{\beta} \right)]}{1 + \gamma^2 \beta^2};$$

$$b_3 = -i \operatorname{Re} \frac{[\gamma^2 (\gamma A + 2B) + (\beta^{-2} - \gamma^4 \beta^2) E]}{2(\gamma^4 \beta^2 + \beta^{-2})} - i \operatorname{Re} \tilde{U}_2 \left( \frac{1}{\beta} \right);$$

$$b_5 = i \operatorname{Re} \frac{[\gamma^2 \beta^3 (\gamma A/2 + B) + E]}{2(\gamma^4 \beta^2 + \beta^{-2})},$$

$$b_6 = i \operatorname{Re} \frac{\gamma^4 [\gamma^{-2} \beta^{-2} (\gamma A/2 + B) - E]}{2(\gamma^4 \beta^2 + \beta^{-2})}, \quad (3.5)$$

где

$$A = \mp \frac{S}{\omega^0(\gamma) - c_0} U_1(\gamma) - \tilde{P}_2(\gamma) - 2D\tilde{U}_2(\gamma);$$

$$B = \gamma D\tilde{V}_2(\gamma) - \tilde{U}_2(\gamma) - \tilde{V}_2(\gamma);$$

$$E = \tilde{U}_2\left(\frac{1}{\beta}\right) + \tilde{V}_2\left(\frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\beta}\right) \tilde{W}_1\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Из последнего граничного условия (2.12) находим собственное значение задачи второго приближения:

$$c_1 = - \frac{(\omega^0 - c_0)^2}{U_1} DW_1 - \frac{(\omega^0 - c_0)}{U_1} U_2 \Big|_{r=r_1}. \quad (3.6)$$

Так как  $b_i$ , определенные в (3.5), чисто мнимые величины, а  $\omega^0 - c_0$  и  $U_1$  — действительные, то значение  $c_1$  — мнимая величина. С учетом (3.5) соотношение (3.6) запишем в виде

$$c_1 = i \operatorname{Re} F(\beta, S).$$

Тогда по знаку функции  $F(\beta, S)$  можно судить о поведении малых возмущений основного потока, т. е. об устойчивости течения (1.2). На рис. 1 представлен вид функции  $F(\beta, S)$  в зависимости от значений параметра  $\beta$  (безразмерной толщины стекающей пленки) при фиксированном значении параметра  $S$ , соответствующем анилину. Расчеты

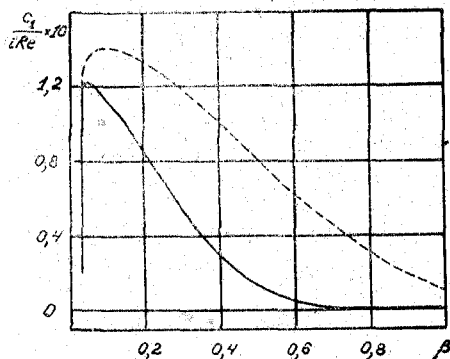


Рис. 1

проведены для значений  $\beta$ , изменяющихся в интервале (0,03, 0,98). Сплошная линия соответствует течению по внутренней стенке цилиндра, штриховая — по внешней. Видно, что в рассматриваемом интервале значений  $\beta$  функция  $F(\beta, S)$  положительна, что свидетельствует о неустойчивости течения (1.2). При  $\beta \rightarrow 1$ , когда толщина стекающего слоя приближается к величине радиуса цилиндра, график функции  $F(\beta, S)$  для внутренней поверхности асимптотически стремится к нулю, т. е. внутреннее течение становится нейтрально устойчивым. Внешнее течение при этом продолжает оставаться неустойчивым. Судя по тенденции к убыванию функции  $F(\beta, S)$

при  $\beta < 0,04$ , можно предположить, что для малых значений  $\beta$  возможен устойчивый режим течения, однако этот вопрос требует дополнительного изучения в рамках тонкослойной аппроксимации.

В заключение отметим, что как в случае внешнего, так и внутреннего течения имеет место незначительный стабилизирующий эффект поверхностного натяжения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hickox C. E., Phys. fluids, 1971, v. 14, № 2.

УДК 678:532.135

**Н. В. Заварзин, В. М. Суязов**

### **О ВЛИЯНИИ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛЕНКИ**

Рассматривается вязкоупругая жидкость модели Олдройда [1] с двумя временами релаксации. Известно [2], что конститутивные уравнения Олдройда могут быть использованы для описания поведения ряда неньютоновских систем, в частности растворов полимеров. Последние отчетливо обнаруживают эффект пристенного скольжения, экспериментальное изучение которого проводилось в работе [3]. На необходимость учета проскальзывания при течении полимерных растворов указывают также результаты работы [4], где основной причиной появления нерегулярности при течении расплавов и концентрированных растворов полимеров авторы считают поверхностное скольжение.

1. Определяющие уравнения вязкоупругой жидкости модели Олдройда можно записать в следующей безразмерной форме:

$$S^{ik} = -pg^{ik} + p^{ik};$$

$$p^{ik} + M_1 (D/Dt) p^{ik} = \frac{2}{\text{Re}} [1 + M_2 (D/Dt)] \varepsilon^{ik};$$

$$M_1 = \lambda_1 U h^{-1}, \quad M_2 = \lambda_2 U h^{-1}, \quad \text{Re} = U h \nu^{-1}, \quad U = g h^2 \nu^{-1},$$

где  $p$  — изотропное давление,  $p^{ik}$  — напряжения, определяемые через скорости деформаций  $\varepsilon^{ik}$ ,  $g^{ik}$  — контравариантный метрический тензор,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — время релаксации напряжений и скоростей деформаций соответственно,  $U$  и  $h$  — характерные скорость и размер,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ .