УДК 539.3:534.1

А. Н. Спорыхин, А. И. Сумин

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ КОНЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Исследованию неустойчивости нелинейно-упругой среды при конечных возмущениях была посвящена работа [1], в которой докритические деформации принимались малыми. Ниже исследуется устойчивость деформирования таких сред при конечных возмущениях и конечных докритических деформациях.

1. Рассмотрим точки P_0 ненапряженного и недеформированного нелинейно-упругого тела, покоящегося в момент времени $t=0$, которые определяются декартовой системой координат x_i или криволинейной лагранжевой системой Θ_i. Пусть тело деформируется так, что в момент $t=t_0$ оно будет занимать некоторый объем V, отличный от объема V_0 недеформированного тела. Напряженно-деформированное состояние определим, относя все величины к площадкам в теле до деформации и предполагая, что лагранжева система координат в недеформированном состоянии декартова. В этом случае система уравнений, определяющая напряженно-деформированное состояние нелинейно-упругого тела, может быть записана, следуя [2]. В качестве геометрических уравнений в основном состоянии применим тензор деформаций Грина:

$$2\varepsilon_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}+u_{n,i}\,u_{n,j}. \tag{1.1}$$

Уравнения движения и граничные условия представим в виде

$$[\sigma_{in}(\delta_{mn}+u_{m,n})]_{,i}+X_m-\rho\ddot{u}_m=0,\quad [\sigma_{in}(\delta_{mn}+u_{m,n})]\,N_i=P_m. \tag{1.2}$$

Здесь σ_{in}—симметричный тензор обобщенных напряжений; X_m и P_m—проекции массовых и поверхностных сил на орты системы координат до деформации, отнесенные к единице объема деформации; N_i—нормаль к поверхности до деформации.

Если тело однородное и изотропное, функция энергии деформации Φ, измеренная на единицу объема до деформации, будет функцией трех алгебраических инвариантов $\Phi=\Phi(A_1, A_2, A_3)$. При этом соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид

$$\sigma_{ij}=\delta_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial A_1}+2\varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial A_2}+3\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial A^3}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим возмущенное состояние, отличающееся от заданного, описываемого системой уравнений (1.1—1.3), наличием конечных возмущений. Учитывая, что компоненты невозмущенного состояния удовлетворяют соотношениям (1.1—1.3), получим уравнения относительно возмущений: полей перемещений, напряжений, деформаций и т. д. Для деформаций из (1.1) получаем

$$\varepsilon'_{ij}=u'_{i,j}+u'_{j,i}+u_{n,i}\,u'_{n,j}+u'_{n,i}\,u_{n,j}+u'_{n,i}\,u'_{n,j}. \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем индекс-штрих приписан компонентам возмущений.

Возмущения инвариантов тензора деформаций при этом будут следующие:

$$A'_1=\varepsilon'_{ii};\quad A'_2=\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon'_{ij}+\varepsilon'_{ij}\cdot\varepsilon_{ji}+\varepsilon'_{ij}\cdot\varepsilon'_{ji};$$
$$A'_3=\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon_{jk}\cdot\varepsilon'_{ki}+\varepsilon_{jk}\cdot\varepsilon_{ki}\cdot\varepsilon'_{ij}+\varepsilon_{jk}\cdot\varepsilon_{ki}\cdot\varepsilon'_{jk}+$$
$$+\varepsilon_{ki}\cdot\varepsilon'_{ij}\cdot\varepsilon'_{jk}+\varepsilon_{jk}\cdot\varepsilon'_{ij}\cdot\varepsilon'_{ki}+\varepsilon_{ij}\cdot\varepsilon'_{jk}\cdot\varepsilon'_{ki}+\varepsilon'_{ij}\cdot\varepsilon'_{jk}\cdot\varepsilon'_{ki}. \tag{1.5}$$

Уравнения движения и граничные условия (1.2) в возмущениях примут вид

$$[(\sigma_{in}+\sigma'_{in})\,u'_{m,n}]_{,i}+[\sigma'_{in}\,(\delta_{mn}+u_{m,n})]+X'_m-\rho\ddot{u}'_m=0; \tag{1.6}$$
$$\{[(\sigma_{in}+\sigma'_{in})\,u'_{m,n}+[\sigma'_{in}\,(\delta_{mn}+u_{m,n})]\}\,N_i=P'_m. \tag{1.7}$$

Разлагая функцию энергии деформации для возмущенного состояния $\Phi=\Phi(A_1+A'_1, A_2+A'_2, A_3+A'_3)$ в ряд Тейлора в окрестности начального состояния, получим

$$\Phi'=\frac{\partial\Phi}{\partial A_1}A'_1+\frac{\partial\Phi}{\partial A_2}A'_2+\frac{\partial\Phi}{\partial A_3}A'_3=\frac{\partial^2\Phi}{\partial A_1^2}A'^2_1+$$
$$+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial A_1\,\partial A_2}A_1A_2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial A_1\,\partial A_3}A'_1A'_3+\ldots \tag{1.8}$$

Последнее позволяет записать соотношение между возмущениями напряжений и деформаций в виде

$$\sigma'_{ij}=\delta_{ij}\frac{\partial\Phi'}{\partial A_1}+2\varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi'}{\partial A_2}+2\varepsilon'_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial A_2}+2\varepsilon'_{ij}\frac{\partial\Phi'}{\partial A_2}+$$
$$+2\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{kj}\frac{\partial\Phi'}{\partial A_3}+3\,(\varepsilon_{ik}\,\varepsilon'_{kj}+\varepsilon'_{ik}\,\varepsilon_{kj}+\varepsilon'_{ik}\,\varepsilon'_{kj})\frac{\partial\Phi}{\partial A_3}+$$
$$+3\,(\varepsilon_{ik}\,\varepsilon'_{kj}+\varepsilon'_{ik}\,\varepsilon_{kj})\frac{\partial\Phi'}{\partial A_3}+3\,\varepsilon'_{ik}\,\varepsilon'_{kj}\frac{\partial\Phi'}{\partial A_3}. \tag{1.9}$$

Основной процесс деформирования будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от поведения возмущений, описываемых системой уравнений (1.4—1.9) при неограниченном увеличении времени t [5]. Заметим, что соотношения (1.4—1.9) отличаются от соответствующих соотношений [2] наличием нелинейных членов.

2. Будем искать решение уравнений (1.6), (1.7) в виде ряда

$$u'_m=f_e(t)\,\varphi_{ml}(x_k)\quad (m=1,\ 2,\ 3;\ l=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.1}$$

где $\varphi_{ml}(x_k)$ — функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям; $f_l(t)$ —некоторые функции времени.

В качестве системы аппроксимирующих функций φ_{ml} выбираем формы прогибов устойчивости в малом [1], предполагая, что условие полноты системы функций φ_{ml} является достаточным условием сходимости ряда (2.1). Уравнение метода Галеркина [5], соответствующее нелинейной краевой задаче (1.6), (1.7), может быть записано в виде

$$\int\limits_V \{(\sigma_{in}+\sigma'_{in})\,u'_{m,n}+\sigma'_{in}\,(\delta_{mn}+u_{m,n})\}\,\varphi_{mk,i}\,dV-\int\limits_V X'_m\,\varphi_{mk}\,dV-$$

$$-\int\limits_S \rho'_m\,\varphi_{mk}\,dS+\rho\int\ddot{u}'_m\,\varphi_{mk}\,dV=0 \quad (m=1,\,2,\,3;\;k=1,\,2,\,\ldots). \tag{2.2}$$

Подставляя ряд (2.1) в (2.2), учитывая соотношения (1.4), (1.8), (1.9) и пренебрегая возмущениями массовых и поверхностных сил, что соответствует случаю «мертвой» нагрузки, получим систему уравнений

$$a_{ke}\,\ddot{f}_e+c_{ke}\,f_e+d_{ker}\,f_e\,f_r+l_{kerd}\,f_e\,f_r\,f_d+\ldots=0,$$
$$(k,\,e,\,r,\,d=1,\,2,\,\ldots\,\infty). \tag{2.3}$$

Здесь a_{ke}, c_{ke} — матрицы с постоянными коэффициентами; следующие за ними члены—векторы из квадратичных, трилинейных и т. д. форм.

Имеем систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат $f_n(t)$, каждая из которых характеризует вклад n-й формы колебаний в движение системы около невозмущенного равновесия. Матрица c_{ke} и коэффициенты соответствующих форм определяются заданием вида упругого потенциала. В силу свойства ортогональности системы функций φ_{mk}, матрицы a_{ke} и c_{ke} будут диагональными, а форма $a_{ke}\dot{f}_k\dot{f}_e$ — положительно определенной. Таким образом, вопрос об устойчивости основного процесса деформирования нелинейно-упругой среды свелся к вопросу об устойчивости нулевого решения системы (2.3). Представим систему (2.3) в виде

$$a\ddot{z}+cz+dzz+lzzz+\ldots=0, \tag{2.4}$$

где z — некоторый вектор; a, c, d ...—действительные функционалы. Очевидно, уравнение (2.4) допускает интеграл

$$V=\frac{1}{2}\,a\,\dot{z}\,\dot{z}+\frac{1}{2}\,czz+\frac{1}{3}\,dz\;z\;z+\frac{1}{4}\,lz\;z\;z\;z+\ldots=c_1. \tag{2.5}$$

Так что $\dot{V}=0$. Если $V>0$, то, согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости, нулевое решение (2.4) будет устойчиво. Функция V будет функцией Ляпунова для уравнения (2.4). Встает вопрос об условиях, при которых функция V будет положительной. В [3] доказано, что, если возмущения достаточно малы, то знак (2.5) совпадает со знаком линейного приближения. В случае конечных, порядка единицы возмущений, необходимо исследовать знак всего выражения (2.5). Можно показать аналогично [3], что для достаточно больших возмущений знак функции V будет определяться знаком последней формы в разложении потенциальной энергии. При этом функция V будет знакопостоянной в некоторой области изменения параметров нагрузки, если разложение потенциальной энергии обрывается формами четного порядка. В качестве критерия знакоопределенности формы высшего порядка можно использовать критерий [4].

В связи со сказанным возникают две постановки задачи устойчивости при конечных возмущениях:

1. Для заданного из физических соображений класса возмущений найти область изменения параметров нагрузки, для которых $V>0$.

2. Из условия положительности (2.5) для каждого значения параметра нагрузки найти максимально допустимые возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Нелинейная теория упругости и устойчивость в «большом». Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1958, вып. 3.
2. **Гузь А. Н.** Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев, «Наукова думка», 1973.
3. **Малкин Н. Г.** Теория устойчивости движения. М., Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
4. **Вейссенберг А. Н.** Критерии знакоопределенности форм высшего порядка. — ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
5. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., «Наука», 1961.

УДК 532.5.013.4

Н. В. Заварзин, В. М. Суязов

ВЛИЯНИЕ АСИММЕТРИЧНОСТИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ПО ЦИЛИНДРУ

1. Рассмотрим осесимметричное ламинарное течение жидкой пленки толщиной h по поверхности вертикального цилиндра радиуса a, происходящее под действием сил гравитации. Уравнения движения и неразрывности однородной вязкой несжимаемой жидкости, подчиняющейся закону Навье-Стокса, в безразмерной форме имеют вид