УДК 539-3

Н. П. Бестужева, Г. И. Быковцев, В. Н. Дурова

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН И ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

1. Рассматривается физически линейное неоднородное «упругое» тело с начальными напряжениями, процесс распространения возмущений в котором описывается уравнениями [1, 2]

$$(\sigma_{ij}+\sigma_{jk}u_{i,k})_{,j}=\rho\ddot{u}_i; \tag{1.1}$$

$$(\sigma_{ij}+\sigma_{ik}u_{i,k})N_j|_s=P_i; \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}). \tag{1.3}$$

Перемещения u_i, напряжения σ_{ij} и упругие постоянные μ, λ являются аналитическими функциями действительного переменного x^i в некоторой области V, ограниченной поверхностью S.

Введем в рассмотрение комплексную переменную z^i и обозначим через $u_i(z^i,t)$, $\sigma_{ij}(z^i,t)$, $\mu(x^i)$, $\lambda(z^i)$ аналитические продолжения функций $u_i(x^i\,t)$, $\sigma_{ij}(x^i t)$, $\mu(x^i)$, $\lambda(x^i)$ в комплексное пространство z^i. Решения уравнений (1.1—1.3) имеют разрывы на некоторой комплексной поверхности Σ, определенной уравнениями

$$z^i=z^i(u^\alpha,\ u^\beta,\ t), \tag{1.4}$$

u^α, u^β — параметрические координаты на поверхности. Будем называть такие поверхности комплексными волнами. Считается, что на Σ функции $u_{i,j}$, v_i, u_i непрерывны, а некоторые частные производные второго порядка могут претерпевать разрывы.

Пусть начальное напряженное состояние определяется линейной теорией, то есть влияние углов поворота бесконечно малого объемного элемента учитывается только после прохождения фронта возмущений. Тогда, вследствие (1.1), имеем

$$[\sigma_{ij,j}]+\sigma^\circ_{jk}[u_{i,kj}]-\rho[\ddot{u}_i]=0. \tag{1.5}$$

Здесь $\sigma^\circ_{ij}=\sigma^+_{ij}(z^i,\ t)$, $[a]=a^+-a^-$. Значения величин с индексом $^+$ относятся к значениям перед фронтом Σ, $^-$ — к значениям за фронтом.

Принимая во внимание условия совместности [3]

$$[u_{i,kj}]-\omega_i\nu_k\nu_j/G,\quad [\ddot{u}_i]=-\omega_i G,\quad \omega_i=[v_{i,n}],\quad v_i=\dot{u}_i,$$

где G — скорость распространения, ν_i—нормаль к поверхности Σ, запишем (1.5) в форме

$$(\lambda+\mu)\,\omega_k\,\nu_k\,\nu_i+\omega_i\,(\mu+\sigma^0_{jk}\,\nu_k\,\nu_j-\rho G^2)=0. \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует, что в нелинейно-упругой среде, динамическое поведение которой описывается соотношениями (1.1—1.3), могут существовать два типа комплексных волн: продольные или эквиволюминальные, распространяющиеся со скоростями

$$\rho\,G^2=\rho\,c_1^2=\lambda+2\mu+\sigma^0_{ij}\,\nu_i\,\nu_j, \tag{1.7}$$

причем в этом случае

$$\omega=\omega_i\,\nu_i\neq 0,\quad \omega_i=\omega\,\nu_i, \tag{1.8}$$

и поперечные, или безвихревые, для которых

$$\rho\,G^2=\rho\,C_2^2=\mu+\sigma^0_{ij}\,\nu_i\,\nu_j,\quad \omega=0. \tag{1.9}$$

С аналогичными скоростями распространяются волны ускорений в гипоупругой среде Трусделла [4], [5].

Как следует из (1.7), (1.9), скорости c_1 и c_2 зависят от напряженного состояния перед фронтом и направлением движения этого фронта. Если поверхности $\Sigma_к$ распространяются в ненапряженной среде, их скорости совпадают со скоростями упругих волн.

Рассмотрим вопрос о поведении комплексных волн в процессе распространения.

Продифференцировав (1.1), (1.3) по времени и взяв разность полученных уравнений с разных сторон от поверхности разрыва, получим, что на Σ должны выполняться следующие соотношения в разрывах:

$$[\dot\sigma_{ij,\,j}]+[\sigma_{jk,\,j}\,v_{i,\,k}]+[\sigma_{ik}\,\dot u_{i,\,kj}]+[\sigma_{jk}\,v_{ki,\,j}]-\rho\,[\ddot v]=0; \tag{1.10}$$

$$[\dot\sigma_{ij,\,j}]-\lambda\,[v_{k,\,ki}]+\mu\,([v_{i,\,kk}]+[v_{k,\,ki}])+\lambda_{,\,i}\,[v_{k,\,k}]+$$
$$+\mu_{,\,k}\,([v_{i,\,k}]+[v_{k,\,i}]). \tag{1.11}$$

Используя условия совместности первого, второго порядка [3]

$$[v_{i,\,kj}]=L_i\,\nu_j\,\nu_k+g^{\alpha\beta}\,\omega_{i,\,\alpha}\,(\nu_j\,z_{k\beta}+\nu_k\,z_{j\beta})-\omega_i\,g^{\alpha\beta}\,g^{\gamma\tau}\,b_{\alpha\gamma}\,z_{j\beta}\,z^k_{\tau}, \tag{1.12}$$

$$[v_{i,\,j}]=\omega_i\,\nu_j,$$

а также тождество

$$[a\,b]=a^+\,[b]+b^+\,[a]-[a]\,[b],$$

запишем соотношение (1.10) с учетом (1.11) в форме:

$$L^k\,[(\rho G^2-\mu)\,\delta_{ik}-(\lambda+\mu)\,\nu_k\,\nu_i-\sigma^0_{jn}\,\nu^n\,\nu^j\,\delta_{ik}]=$$
$$=2\rho G\delta\omega_i/\delta t+\rho\omega_i\delta G/\delta t-2\,(\lambda+2\mu)\,\omega\omega_i/G+(\lambda+\mu)\,[(\nu^k\,z^i_{\beta}+$$
$$+\nu_i\,z^k_{\beta})\,\omega_{k,\,\alpha}\,g^{\alpha\beta}-\omega_k\,g^{\alpha\beta}\,g^{\gamma\tau}\,b_{\alpha\gamma}\,z^k_{\beta}\,z^i_{\tau}]-2\mu\Omega\omega^i+\sigma^0_{jk,\,j}\,\omega^i\,\nu^k+$$
$$+\sigma^0_{jk}\,[\omega^i_{,\,\alpha}\,g^{\alpha\beta}\,(\nu^j\,z^k_{\beta}+\nu^k\,z^j_{\beta})-\omega^j\,g^{\alpha\beta}\,g^{\gamma\tau}\,b_{\alpha\gamma}\,z^i_{\beta}\,z^k_{\tau}+\lambda_{,\,i}\,\omega_k\,\nu_k+$$
$$+\mu_{,\,k}\,(\omega^i\,\nu^k+\omega^k\,\nu^i). \tag{1.13}$$

Сворачивая (1.13) с ν^i, получаем условие разрешимости системы (1.13) относительно L_i для продольной волны в виде

$$2\rho G\delta\omega/\delta t + \overset{0}{\sigma}_{jk} g^{\alpha\beta} (\nu^j z^k_\beta = \nu^k z^j_\beta) \omega_{,\alpha} + \omega [-\rho\delta G/\delta t -$$
$$-2(\lambda+2\mu)\Omega + \overset{0}{\sigma}_{jk,j} \nu^k - \overset{0}{\sigma}_{jk} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} z^j_\beta z^k_\tau] +$$
$$+ (\lambda+2\mu)_{,k} \nu^k \omega + 2\omega^2 (\lambda+2\mu)/G, \tag{1.14}$$

при этом

$$L^i = L^k \nu_k \nu^i + \omega_{,\alpha} g^{\alpha\beta} z^i_\beta + [2\rho G\delta\nu^i/\delta t + \overset{0}{\sigma}_{jk} \nu^i_{,\alpha} g^{\alpha\beta} (\nu^j z^k_\beta +$$
$$+ \nu^k z^j_\beta)] \omega/(\lambda+\mu). \tag{1.15}$$

Аналогичные соотношения на поперечной волне имеют вид:

$$L^k \nu_k = -(\omega_{k,\alpha} g^{\alpha\beta} z^k_\beta) + [2\rho G\delta\nu^n/\delta t + \overset{0}{\sigma}_{jk} \nu^n_{,\alpha} g^{\alpha\beta} (\nu^j z^k_\beta +$$
$$+ \nu^k z^j_\beta)] \omega_n/(\lambda+\mu) - \mu_{,k} \omega^k/(\lambda+\mu); \tag{1.16}$$

$$2\rho G\delta\omega^i/\delta t + \overset{0}{\sigma}_{jk} g^{\alpha\beta} (\nu^j z^k_\beta + \nu^k z^j_\beta) \omega^i_{,\alpha} + \omega^i (-2\mu\Omega + \rho\delta G/\delta t +$$
$$+ \overset{0}{\sigma}_{jk,j} \nu^k - \overset{0}{\sigma}_{jk} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} z^j_\beta z^k_\tau] + [2\rho G\delta\nu^k/\delta t +$$
$$+ \overset{0}{\sigma}_{jn} \nu^k_{,\alpha} g^{\alpha\beta} (\nu^j z^n_\beta + \nu^n z^j_\beta)] \omega_k \nu^i + \mu_{,k} \nu^k \omega^i +$$
$$+ 2(\lambda+2\mu)\omega^2/G = 0; \tag{1.17}$$
$$L_i = [v_{i,nn}] = [v_{i,ke}] \nu^k \nu^e.$$

При получении соотношений (1.14—1.17) учитывались следующие тождества теории поверхностей:

$$z^i_\alpha = \partial z^i/\partial u^\alpha; \quad \nu^j z^j_\alpha = 0;$$
$$\partial z^j/\partial t = G\nu^j; \quad \nu^i_{,\alpha} = -g^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} z^i_\gamma; \quad \delta\nu^k/\delta t = -g^{\alpha\beta} z^k_\beta G_{,\alpha}. \tag{1.18}$$

Здесь $g_{\alpha\beta} = z^j_\alpha \cdot z^j_\beta$ — первая квадратичная форма поверхности (1.4), при этом $g_{\alpha\beta} g^{\gamma\beta} = \delta^\gamma_\alpha$; $\beta_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй квадратичной формы; $2\Omega = g_{\alpha\beta} \cdot b^{\alpha\beta}$ — средняя кривизна поверхности.

Для $G_{,\beta}|^k$ имеем выражение

$$G_{,\alpha} = \frac{\partial G}{\partial z^i} z^i_\alpha - \frac{\partial G}{\partial \nu^i} g^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} z^i_\gamma|_k. \tag{1.19}$$

Из (1.10), (1.9) следует:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z^i}\right|_k = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{mn}}{\partial z^i} \nu^m \nu^n/2\rho G - G^2 \left.\frac{\partial \rho}{\partial x^i}\right|_k. \tag{1.20}$$
$$\frac{\partial G}{\partial \nu^i} = \left.\frac{\overset{0}{\sigma}_{ij} \nu^j}{\rho G}\right|_k; \quad a_1 = \lambda + 2\mu; \quad a_2 = \mu.$$

Кроме того, следует отметить, что

$$\delta/\delta t|_{(1)} = \partial/\partial\tau_1; \quad \delta/\delta t|_{(2)} = \partial/\partial\tau_2; \tag{1.21}$$
$$\tau_k = h_k/G_{(k)},$$

где h_k—расстояние по нормали к поверхности Σ_k. Здесь и в дальнейшем индексом 1 отмечены соотношения на продольной волне, индексом 2—на поперечной.

Пусть зависимости:

$$du^\gamma / ds = \sigma^0_{jk}\, g^{\alpha\beta}\, (\nu^j z^k_\beta + \nu^k z^j_\beta)/2\rho G|_k; \qquad (1.22)$$

$$\partial\tau/\partial s|_k = 1$$

определяют кривую $u^\gamma = u^\gamma(s_k)$; $\tau = \tau(s_k)$, которую будем называть лучом к поверхности разрыва Σ_k. Делая замену переменных в (1.14), (1.17) по формулам

$$d/ds_k = \partial/\partial\tau \cdot d\tau/\partial s_k + \partial/\partial\alpha\; \partial\alpha/ds_k,$$

придем к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению изменения модуля волнового вектора вдоль луча, определенного соотношениями (1.22):

$$\frac{dW_k}{ds_k} + A_1 W_k + A_2 W_k^2 = 0; \quad A_i = A_i(s_k). \qquad (1.23)$$

Решение уравнения (1.23) имеет вид

$$W_k = W_0 \exp\left\{-\int_0^{s_k} A_1\, ds\right\}\left[W_0 \int_0^{s_k} A_2 \exp\left(-\int_0^{s_k} A_1\, ds\right) + 1\right]^{-1}; \qquad (1.24)$$

$$W_0 = W|_{s_k=0}.$$

Таким образом, если $\sigma^0_{ij} \neq 0$, то разрыв производных от перемещений распространяется вдоль луча, не совпадающего с нормалью к поверхности Σ_k.

Для малых амплитуд, когда $W \ll 1$, решение (1.24) будет иметь вид

$$W_k = W_0 \exp\left(-\int_0^{s_k} A_1\, ds\right)\Bigg|_k. \qquad (1.25)$$

Если в проекции на действительное пространство x^i фронты Σ_1, Σ_2 представлены действительными поверхностями разрыва, то полученные соотношения при $z^i = x^i$ будут характеризовать действительные продольные и поперечные разрывные волны. Если при $z^i = x^i$ поверхности Σ_1 и Σ_2 комплексны, то мы имеем дело с особенностями типа линии. Последние представления удобны для решений, имеющих изолированные разрывы на границе, т. е. при изучении разрывных поверхностных волн.

2. Пусть на свободной от напряжений границе упругого тела S имеется некоторая кривая l, являющаяся кривой поверхностного разрыва, т. е. производные от скоростей перемещений, определенные на S, претерпевают разрывы при переходе через l. Если уравнение $S: \Phi(x^i) = 0$, то уравнение движущейся кривой может быть представлено в виде

$$\Phi(x^i)=0; \quad \Psi(x^i, t)=0.$$

Предполагается, что функции Φ, Ψ являются аналитическими функциями переменных, x^i, т. е. существуют аналитические продолжения этих функций в пространство z^i, которые обозначим через $\Phi(z^i)$, $\Psi(z^i, t)$. Уравнения $\Phi(z^i)=0$, $\Psi(z^i, t)$ определяют в z^i соответственно граничную поверхность и комплексную кривую разрыва l. В дальнейшем считаем, что l есть линия пересечения границы S с поверхностями разрыва Σ_1 и Σ_2. Тогда при переходе через l в окрестности границы, для поверхностных скачков производных от перемещений, имеем:

$$[v_{i,j}]_s=[v_{i,j}]_1+[v_{i,j}]_2;$$

$$[\dot{v}_{i,j}]_s=[\dot{v}_{i,j}]_1+[\dot{v}_{i,j}]_2. \tag{2.1}$$

Обозначим через N_i—нормаль к граничной поверхности S, через l_i—единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности S и ортогональный линии l. Так как поверхности Σ_k, S пересекаются по кривой l, то c—скорость перемещения линии l в направлении нормали связана со скоростями распространения поверхностей Σ_k $(k=1,2)$ соотношениями:

$$c_1=c\nu_i^{(1)} l^i; \quad c_2=c\nu_i^{(2)} l^i; \tag{2.2}$$

$$N^i \nu_i^{(1)}=\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c}\right)^2}; \quad N_i \nu^{i(2)}=\sqrt{1-\left(\frac{c_2}{c}\right)^2}; \tag{2.3}$$

$$\nu_i^{(1)} \nu^{i(2)}=\frac{c_1 c_2}{c^2}-\sqrt{1-\left(\frac{c_1}{c}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{c_2}{c}\right)^2}. \tag{2.4}$$

По предположению величины $N_i(x^j)$, $l_i(x^j)$ всегда действительны, так как действительны функции $\Phi(x^i)$, $\Psi(x^i, t)$, которые можно рассматривать как проекции функций $\Phi(z^i)$, $\Psi(z^i, t)$ на действительное пространство x^i. Если $c<c_2<c_1$, то поверхности Σ_1 и Σ_2, как следует из (2.2), (2.3), комплексные; при $z^i=x^i$ каждая из них распадается на две поверхности, пересекающиеся по l. В этом случае об l будем говорить как об изолированном поверхностном разрыве (поверхностной разрывной волне).

С обеих сторон от линии разрыва l напряжения должны удовлетворять граничным условиям (1.2), откуда следует

$$[\dot{\sigma}_{ij}]_s N^j=0. \tag{2.5}$$

Для скачка $[\dot{\sigma}_{ij}]_s$ имеем выражение

$$[\dot{\sigma}_{ij}]_s=\lambda\delta_{ij}[\dot{v}_{k,k}]_s+\mu([\dot{v}_{i,j}]_s+[\dot{v}_{j,i}]_s).$$

Согласно определению поверхностного разрыва (2.1) с использованием условий совместности (1.12) запишем уравнение (2.5) в форме

$$\lambda\omega N_i+2\mu\omega\nu_i\nu_j N^j|_1+\mu(\omega_j\nu_i+\omega_i\nu_j)N^j|_2=0. \tag{2.6}$$

Сворачивая соотношение (2.6) сначала с N_i, а затем с $\nu_{i(2)}$ и учитывая (1.8), (1.9), получим систему уравнений относительно ω, $k=\omega_k^{(2)} N^k$

$$[\lambda+2\mu\,(\nu_k^{(1)} N^k)^2]\,\omega+2\mu\,\nu_k^{(2)} N^k\,k=0; \tag{2.7}$$

$$]\lambda\nu_k^{(2)} N^k+2\mu\,\nu_j^{(1)} N^j\,\nu_i^{(1)}\,\nu^{i(2)}]\,\omega+\mu k=0.$$

Равенство нулю определителя системы (2.7) дает уравнение для определения скорости c, которое с учетом (2.2.)—(2.4) примет вид

$$\left(\frac{c^2}{c_2^2}-2\right)^2-4\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{c_2^2}\right)}=0. \tag{2.8}$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$\rho c^2=\rho c_R^2+\sigma_{ij}\,l^i\,l^j. \tag{2.9}$$

Здесь c_R—релеевская скорость упругих волн [6].

Так же как скорости продольных и поперечных волн, скорость c поверхностной волны зависит только от той компоненты тензора начальных напряжений, которая соответствует направлению распространения волны.

Решая систему (2.7) при условии (2.8), получим

$$\omega=2\mu\nu_i^{(2)} N^i\,\chi;\quad \omega_k^{(2)} N^k=-[\lambda+2\mu\,\nu_k^{(1)} N^k]\,\chi. \tag{2.10}$$

Величина χ—интенсивность поверхностной волны.

3. Рассмотрим изменение интенсивности поверхностной волны в процессе распространения.

Продифференцировав граничное условие (1.2) и равенство (1.3) два раза по времени и записав полученные соотношения в скачках, имеем

$$[\ddot{\sigma}_{ij}]_s+2\,[\sigma_{jk}\,\dot{v}_{i,k}]=0; \tag{3.1}$$

$$[\ddot{\sigma}_{ij}]_s=\lambda\,[\dot{v}_{k,k}]_s\,\delta_{ij}+\mu\,([\dot{v}_{i,j}]_s+[\dot{v}_{j,i}]_s).$$

Используя определение скачка на поверхности (2.1), а также принимая во внимание смешанные условия совместности на Σ_k [3]:

$$[\dot{v}_{i,j}]_k=(-L_i\,G+\partial\omega_i/\partial t)\,\nu_j-Gg^{\alpha\beta}\,\omega_{i,\alpha}\,z_{j\beta}-g^{\alpha\beta}\,z_{j\beta}\,\omega_i\,G_{,\alpha}|_k,$$

запишем (3.1) в форме

$$c_1\,\{\lambda L_k\,\nu^k\,N_i+\mu\,(L_i\,\nu_j^i\times L_j\,\nu_i)\,N^j\}_{(1)}+c_2\,\{\lambda L_k\,\nu^k\,N_i+$$
$$+\mu\,(L_i\,\nu_j+L_j\,\nu_i)\,N^j\}_{(2)}=F_i. \tag{3.2}$$

Здесь

$$F_i=\{\lambda\delta_{ij}\,(\partial\omega_k/\partial\tau_1\nu^k-g^{\alpha\beta}\,c_1\,\omega_{k,\alpha}\,z_\beta^k)+\mu\,(\partial\omega_i/\partial\tau_1\,\nu_j-$$
$$-g^{\alpha\beta}\,c_1\,\omega_{i,\alpha}\,z_{j\beta})+\mu\,(\partial\omega_j/\partial\tau_1\,\nu_j^i+g^{\alpha\beta}\,c_1\,\omega_{j,\alpha}\,z_{i\beta})\}\,N^j-$$

$$-\lambda\delta_{ij}\, g^{\alpha\beta}\, z_{k\beta}\, \omega_k\, G_{,\alpha}\, N^j - \mu \{g^{\alpha\beta}\, (x_{j\beta}\, \omega_i = x_{i\beta}\, \omega_j)\, G_{,\alpha}\}\, N^j -$$
$$-2\, \omega_i\, \omega_j\, \rho\, c_k^2\, N^j|_1 + \ldots, \tag{3.3}$$

где точками обозначено выражение, которое получится, если в выписанных членах заменить индекс 1 на 2.

Умножая (3.2) на N^i, а затем на $\nu_{i(2)}$ имеем

$$c_1\, [\lambda + 2\mu\, (\nu_k^{(1)}\, N^k)^2]\, W + 2\mu\, c_2\, \nu_k^{(2)}\, N^k\, K = Q_1\, (\omega_i^{(1)}\, \omega_i^{(2)};$$

$$c_1\, [\nu_k^{(2)}\, N^k + 2\mu\, \nu_j^{(1)}\, N^j\, \nu_i^{(1)}\, \nu^{i(2)}]\, W + \mu K = Q_2\, (\omega_i^{(1)},\ \omega_i^{(2)}),$$

где

$$W = L_i\, \nu^i|_1; \quad K = L_i^{(2)}\, N^i;$$

$$Q_1 = A_i\, N^i; \quad Q_2 = A_i\, \nu^i_{(2)};$$

$$A_i = F_i - c_1\, \mu\, N^j \Big\{ g^{\alpha\beta}\, (\nu_j\, z_{i\beta} + \nu_i\, z_{j\beta})\, \omega_{,\alpha} + \frac{2\rho\, c_1}{\lambda + \mu}\, \frac{\partial\, (\nu_i\, \nu_j)}{\partial \tau_1} +$$

$$+ \frac{\overset{0}{\sigma}_{lk}}{\lambda + \mu}\, g^{\alpha\beta}\, (\nu^l\, z_\beta^k + \nu^k\, z_\beta^l)\, (\nu_i\, \nu_j)_{,\alpha} \Big\}_{(1)} + c_2 \lambda N_i \Big\{ \omega_{k,\alpha}\, g^{\alpha\beta}\, z_\beta^k -$$

$$- \Big[\frac{2\rho G}{\lambda + \mu}\, \frac{\partial \nu^n}{\partial \tau_2} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{jk}}{\lambda + \mu}\, \nu^n_{,\alpha}\, g^{\alpha\beta}\, (\nu^j\, z_\beta^k + \nu^k\, z_\beta^j) \Big]\, \omega_n +$$

$$+ c_2\, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\, \mu_{,k}\, \omega^k \Big\}_{(2)}.$$

Определитель системы линейных неоднородных уравнений относительно w, K в силу уравнения (2.8) равен нулю, и условие разрешимости этой системы дает следующее соотношение:

$$Q_1 - 2\nu_i^{(2)}\, N^i\, Q_2 = 0. \tag{3.4}$$

В уравнении (3.4), выполненном на S, одна группа членов, относящихся к соотношениям на комплексной продольной волне, записана в координатах τ_1, u^α, $u^3|_1$; другая группа, характеризующая влияние комплексной поперечной волны,—в координатах τ_2, u^α, $u^3|_2$. Поскольку вследствие (2.10) ω и $\omega_k^{(2)}$ на S выражаются через χ, то, совершая переход в (3.4) к единым координатам τ, α, ν, связанным с геометрией кривой l, расположенной на S, получим уравнение, характеризующее изменение интенсивности χ в процессе распространения.

Система координат $g^1 = \tau$, $g^2 = \alpha$, $g^3 = \nu$ вводится так же, как в работах [7], [3]. Точка M на S определяется двумя параметрами τ и α, причем $\tau = \frac{h}{c}$, где h — длина дуги геодезической, проведенной от точки M перпендикулярно к l, а α—характеризует точку на S. Точку N вне S удобно определять величиной ν—расстоянием по нормали от точки N до S и параметрами τ, α, характеризующими точку пересечения нормали с S.

Компоненты метрического тензора G_{ij} системы q^i, а также необходимые для окончательных вычислений значения скалярных произведений $(j^l\, i^n)\,|_k$, где $j^l|_k$—единичные векторы, касательные к координатным линиям системы τ_k, u^α, $u^\beta|_k$, а i^n—локальный базис системы τ, α, ν, приведены в работе [3].

Учитывая соотношения (1.18)—(1.21), формулы перехода, имеющие место на S,

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial q^n}\; N^n_\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\Big|_k \qquad \left(\sum \alpha\right); \tag{3.5}$$

$$g_{\alpha\beta} = N^n_\beta\, N^k_\alpha \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}\; G_{nk} \qquad \left(\sum\nolimits_{\alpha,\,\beta}\right); \tag{3.6}$$

$$b_{\alpha\beta} = \nabla_\beta\,(q^i_\alpha)\,\mu_i = \nabla_r\,(q^i_r)\,\mu_i = \Gamma_{rl,\,i}\; q^l_\alpha\, q^r_\beta\, \mu^i|_k \qquad \left(\sum\nolimits_{\alpha,\,\beta}\right). \tag{3.7}$$

$$= \Gamma_{rl,\,i}\, N^l_\alpha\, N^r_\beta\, \mu^i \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\beta\beta}}$$

$$\delta/\delta t|_k = \partial/\partial\tau_k = \partial/\partial g^n\, N^n_1 \cdot c_k, \tag{3.8}$$

(по α, β не суммировать!)

где $\mu^i = \left\{ \frac{c_k}{c^2},\ 0\ , -i \sqrt{\frac{c_k^2}{c^2} - 1} \right\}$—контрвариантные компоненты вектора нормали к комплексной поверхности Σ_h в метрике координат

$$q^i, \quad 2\Gamma_{nl,\,i} = G_{ni,\,l} + G_{li,\,n} - G_{nl,\,i}, \text{ а } N^n_\beta = (j^\beta\, i^n)/\sqrt{G_{nn}},$$

$$N_{n\beta} = (j^\beta \cdot i^n) \sqrt{G_{nn}},$$

также соотношения (2.2)—(2.4) вместе с

$$z^i_\beta\, N_i|_k = \frac{c_k}{c}; \tag{3.9}$$

$$z^i_{\beta\,(1)}\, \nu^{(2)}_i = \sqrt{1 - \frac{c_1^2\, c_2^2}{c^4}\left(2 + \frac{1}{4}\,\frac{c^4}{c_2^4} - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2},$$

можно совершить в (3.4) указанный переход.

Кроме того, следует отметить, что

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial\tau_k} = \frac{\partial\omega_i}{\partial q^n}\,\frac{\partial q^n}{\partial\tau_k} = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\tau}\, N^\tau_{\cdot k} + \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\, N^\nu_{\cdot k}\right) c_k\Big|_k;$$

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial u^\gamma} = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\tau}\, N^\tau_\gamma + \frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha}\, N^\alpha_\gamma + \frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\, N^\nu_\gamma\right)\sqrt{g_{\gamma\gamma}}\Big|_k.$$

Дифференцирование по α, τ—это дифференцирование по касательному направлению к поверхности S. Используя это обстоятельство, а также формулы (2.10), (1.7)—(1.9), выражения для производных $\frac{\partial\omega_i^{(1)}}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\omega_i^{(2)}}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\omega_i^{(1)}}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\omega_i^{(2)}}{\partial\alpha}$ можно записать в форме:

$$\frac{\partial\omega_i^{(1)}}{\partial\tau} = a_i\,\frac{\partial\chi}{\partial\tau} + b_i\,\chi; \qquad \frac{\partial\omega_i^{(1)}}{\partial\alpha} = c_1\,\frac{\partial\chi}{\partial} + d_i\,\chi; \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\omega_i^{(2)}}{\partial\tau}\, N_i = k_1\,\frac{\partial\chi}{\partial\tau} + k_2\,\chi; \qquad \frac{\partial\omega_i^{(2)}}{\partial\alpha}\, N_i = k_3\,\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} + k_4\,\chi.$$

С учетом (3.5)—(3.10), (2.2), (1.18)—(1.21) условие разрешимости (3.4) примет вид

$$B_1 \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + B_2 \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + B_3 \chi + D_i \frac{\partial \omega_i^{(1)}}{\partial \nu} + F_i \frac{\partial \omega_i^{(2)}}{\partial \nu} = 0. \tag{3.11}$$

Исключение величины $\left.\frac{\partial \omega_i^{(1)}}{\partial \nu}\right|_{\nu=0}$, $\left.\frac{\partial \omega_i^{(2)}}{\partial \nu}\right|_{\nu=0}$ из соотношения (3.11) производится с помощью уравнений (1.14), (1.17), предварительно приведенных с помощью формул (3.5)—(3.10), (2.2)—(2.4), (1.18)—(1.21) к виду

$$\left.\frac{\partial \omega_i^{(1)}}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = n_i^{(1)} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + l_i^{(1)} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + m_i^{(1)} \chi; \tag{3.12}$$

$$\left.\frac{\partial \omega_i^{(2)}}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = n_i^{(2)} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + l_i^{(2)} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + m_i^{(2)} \chi.$$

В заключение отметим, что встречающиеся в промежуточных выкладках (3,9) — (3.12) $c_{,\alpha}$, $c_{,\tau}$, $c_{,\nu}$ могут быть вычислены как производные функции $c(q^i)$, неявно заданной уравнением (2.8).

С учетом сказанного окончательно получим следующее уравнение для изменения комплексной интенсивности χ:

$$\frac{\partial \chi}{\partial s_e} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln g_{\alpha\alpha}}{\partial s_e} \chi + cA_1 \chi^2 + ic\left(A_2 \frac{b_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}} + A_3 b_{\tau\tau}\right)\chi +$$
$$+ iA_4 \frac{b_{\alpha\tau}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \chi + (A_5^{(s_e)} + icA_6)\chi = 0. \tag{3.13}$$

Здесь обозначено:

$$\frac{\partial}{\partial s_e} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\overset{0}{\sigma}_{\alpha\tau}}{\rho l} \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

Последние два слагаемых в (3.13), характеризующие влияние неоднородности, могут быть представлены в виде:

$$A_5^{(se)} = K_1 \frac{\partial \ln (\lambda + 2\mu)}{\partial s_e} + K_2 \frac{\partial \ln \mu}{\partial s_e} + K_3 \frac{\partial \ln \rho}{\partial s_e} +$$
$$+ K_4 \frac{\partial \ln \overset{0}{\sigma}_{\tau\tau}}{\partial s_e} + K_5 \frac{\partial \ln \overset{0}{\sigma}_{11}}{\partial s_e};$$

$$A_6^{(\nu)} = P_1 \frac{\partial \ln (\lambda + 2\mu)}{\partial \nu} + P_2 \frac{\partial \ln \mu}{\partial s_e} + P_3 \frac{\partial \ln \rho}{\partial \nu} +$$
$$+ P_4 \frac{\partial \ln \overset{0}{\sigma}_{\tau\tau}}{\partial \nu} + P_5 \frac{\partial \ln \overset{0}{\sigma}_{\tau\nu}}{\partial \nu} + P_6 \frac{\partial \ln \overset{0}{\sigma}_{\nu\nu}}{\partial \nu}.$$

Коэффициенты A_i, K_i, P_i даны в приложении.

Если составляющая напряженного состояния перед фронтом $\overset{0}{\sigma}_{\alpha\tau} = 0$, то $s_e = \tau$ и изменение интенсивности происходит вдоль геодезической линии, расположенной на S, ортогонально к фронту. Для волны, распространяющейся на плоскости, то есть при $b_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\tau} = b_{\tau\tau} = 0$; $\sigma^0_{\alpha\tau} = 0$; это направление совпадает с нормалью к фронту.

Уравнение (3.13) вдоль временного луча может быть легко проинтегрировано. Его решение запишем в виде

$$\chi(s_e) = \chi_0 (g_{\alpha\alpha})^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ -i \int_0^{s_e} \left[c \left(A_2 \frac{b_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}} + A_3 b_{\tau\tau} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + A_4 b_{\alpha\tau} \right] ds \right\} \exp \left[- \int_0^{s_e} A_5 \, ds \right] \cdot \exp \left[-i \int_0^{s_e} c \, A_6 \, ds \right] \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{s_e} c A_1 (\ldots) \, ds + \chi_0 \right\}^{-1}, \qquad (3.14)$$

где (...) обозначено выражение, стоящее перед множителем в —1 степени.

Интенсивность χ представлена в виде произведения шести сомножителей, каждый из которых характеризует влияние того или иного фактора. Первый множитель χ_0 определяет начальную интенсивность поверхностного разрыва, т. е. значение χ при $\tau=0$. Второй характеризует зависимость интенсивности от внутренней геометрии лучей, третий показывает, что кривизна поверхности S не влияет на затухание интенсивности, четвертый множитель характеризует влияние неоднородностей вдоль луча, пятый показывает, что неоднородность среды и напряженного состояния по глубине не влияет на затухание интенсивности, последний множитель в степени —1 — результат учета нелинейных членов.

4. Положим $\sigma^0_{\alpha\tau} = 0$, $\sigma^0_{\alpha\alpha} = 0$ и рассмотрим возрастание интенсивности, связанное с достижением некоторого критического значения той компоненты тензора начальных напряжений, которая соответствует направлению распространения поверхностного возмущения.

Пролинеаризировав уравнения (1.1), (1.2), получим уравнения для возмущений, соответствующие уравнениям устойчивости 2-го варианта теории малых докритических деформаций [2], [9]

$$\sigma_{ij,j} + \sigma^0_{jk} u_{i,kj} = \rho \ddot{u}_i;$$

$$\sigma_{ij} N^j = 0|_S. \qquad (4.1)$$

Исследуем устойчивость свободной границы полупространства $x_2 \geq 0$ (плоская задача) при сжатии вдоль оси ox_1 усилиями интенсивности P. Подобная задача впервые рассмотрена Био [10] для несжимаемых тел. В рамках уравнений устойчивости 3-го варианта подробно метод нахождения решения, который пригоден и для уравнений (4.1), представлен в работе [2]. Используя результаты ее, придем к следующему характеристическому уравнению определения критического числа статистической задачи о поверхностной неустойчивости упругого полупространства:

$$\left(\frac{P_{\text{кр}}}{\mu}-2\right)^2-4\sqrt{\left(1-\frac{P_{\text{кр}}}{\lambda+2\mu}\right)}\sqrt{1-\frac{P_{\text{кр}}}{\mu}}=0.$$

Решение этого уравнения, имеющее физический смысл, может быть записано в форме

$$P_{\text{кр}}=\rho\, c_R^2,$$

где c_R — значение релеевской упругой скорости.

При локальном рассмотрении задачи о распространении поверхностной волны можно положить $\sigma_{\tau\tau}=-P$, тогда

$$\rho c^2=\rho\varepsilon_R-P=P_{\text{кр}}-P,$$

и уравнение (3.13) перепишется в виде

$$\frac{\partial\chi}{\partial\tau}+\frac{1}{4}\frac{\partial\ln g_{\alpha\alpha}}{\partial\tau}+\sqrt{(P_{\text{кр}}-P)/\rho}\,A_1\chi^2+i\sqrt{(P_{\text{кр}}-P)/\rho}\times$$

$$\times\left(A_2\frac{b_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}+A_3 b_{\tau\tau}\right)\chi+\left(A_5+i\sqrt{(P_{\text{кр}}-P)/\rho}\,A_6\right)\chi=0. \qquad (4.2)$$

При $P<P_{\text{кр}}$ вклад каждого множителя в решение для χ проанализирован в § 3. При $P>P_{\text{кр}}$, члены, характеризующие влияние кривизны поверхности S и неоднородности по глубине, становятся действительными и при определенных условиях обеспечивают неограниченное возрастание малых возмущений, характерное для неустойчивых состояний равновесия. Действительно, уже в плоском случае, исключая для простоты неоднородность по τ, решение линеаризированного уравнения (4.2) примет вид

$$\chi(\tau)=\chi_0\left[\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{P_{\text{кр}}-P}{\rho}}\,A_2\frac{\tau}{R}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\exp\left(-i\sqrt{\frac{P_{\text{кр}}-P}{\rho}}\,A_6\,\tau\right)\right],$$

R—радиус кривизны границы берется со знаком $\pm$ в зависимости от того, выпуклая или вогнутая граница.

При $P<P_{\text{кр}}$ $|\chi|=|\chi_0|$ и интенсивность плоской волны не меняется в процессе распространения. При $P>P_{\text{кр}}$, даже без исследования знаков A_2, A_6, ясно, что наличие как угодно малого искривления границы S и существование сколь угодно небольших изменений неоднородности по глубине способны вызвать неограниченный рост характеристик возмущений.

Учет нелинейных членов приведет к решению вида

$$\chi(\tau)=\frac{\chi_0\left[\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{P_{кр}-P}{\rho}}A_2\frac{\tau}{R}\right)\right]\left[\exp\left(-i\sqrt{\frac{P_{кр}-P}{\rho}}A_6\tau\right)\right.}{\chi_0\left[\exp\left(\pm i\sqrt{\frac{P_{кр}-P}{\rho}}A_2\frac{\tau}{R}\right]\left[\exp\left(-i\sqrt{\frac{P_{кр}-P}{\rho}}A_6\tau\right]\times\right.\right.}$$

$$\times A_1\sqrt{\frac{P_{кр}-P}{\rho}}+\chi_0.$$

При $P>P_{кр}$ и $\tau\to\infty$ имеем

$$|\chi|=\frac{1}{A_1\sqrt{\left|\frac{P-P_к}{\rho}\right|}}. \tag{4.3}$$

Величина $|\chi|$, определенная по формуле (4.3), характеризует послекритическое поведение исходного возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. Л., Гостехиздат, 1948.
2. **Грузь А. Н.** Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. **Бестужева Н. П., Быковцев Г. И., Дурова В. Н.** Об условиях совместности на поверхностных разрывах. — В сб.: Механика деформируемого твердого тела. 1976, вып. 2 (Куйбышевский гос. ун-т).
4. Eringen A. C. Nonlinear theory of continuons. Media. N.-York, 1962.
5. **Заварзина Н. А.** Лучевой метод решения динамических задач в гипоупругой среде. — «Труды НИИМ ВГУ», 1972, вып. 6.
6. **Соболев С. Л.** Некоторые вопросы распространения колебаний. — В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные уравнения математической физики. Гл. 12, М., Гостехиздат, 1937.
7. **Бабич В. М.** О распространении волн Релея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы. ДАН СССР, 1961, т. 137, № 6.
8. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., «Наука», 1961.
9. Biot M. A. Mechanics of incremental deformations. Iohn Wileyand Sons 1965. N.-4.

УДК 539.3

В. Ф. Терентьев, А. П. Господариков

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ЗАКРИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

1. Геометрически нелинейные проблемы статики одномерных упругих систем [1, 2] могут быть записаны как двуточечные краевые задачи вида