

В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Тонкостенные системы с начальными несовершенствами являются наиболее приемлемой моделью для изучения выпучивания за пределами упругости [1—3].

Рассматривается поведение пластически деформируемых цилиндрических оболочек, имеющих отклонения от первоначальной круговой формы и начальные остаточные напряжения, в случае комбинированного нагружения осевой силой и поперечным давлением при конечных прогибах.

1. Система уравнений равновесия и деформационных соотношений цилиндрических оболочек приводится к виду [4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = L (W + W^0, F) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + q; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} L (W + 2W^0, W) - \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$T_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad T_3 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y};$$

$$L(f, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

где  $q$  — поперечная нагрузка,  $x, y$  — координаты вдоль образующей и по дуге,  $T_3$  — сдвиговое усилие,  $M_3$  — крутящий момент,  $\varepsilon_3$  — сдвиговая деформация,  $W^0$  — начальный прогиб; остальные обозначения общепринятые.

К системе (1.1) применяется вариант метода последовательных нагружений, который заключается в поэтапном нагружении системы и, в соответствии с этим, поэтапном изменении величины прогиба  $W$  и функции напряжений  $F$ . Система нелинейных уравнений на каждом этапе нагружения сводится к системе линейных уравнений относительно приращений прогиба  $\Delta W$  и функции напряжений  $\Delta F$ . Аналогичный подход применяется для решения некоторых задач деформирования без начальных несовершенств в [5, 6].

Пусть внешние нагрузки получили некоторое приращение  $\Delta T$  и  $\Delta q$  ( $T$  — осевая сжимающая сила).

Во избежание накопления погрешности решения величины  $\Delta T$  и  $\Delta q$  выбираются такими, чтобы производимое ими приращение прогиба  $\Delta W$  не превышало величины  $0,1H$  ( $H$ —толщина оболочки).

В новом положении равновесия, обозначенном индексом « $r$ », имеем

$$\begin{aligned} W_r &= W + \Delta W; \quad F_r = F + \Delta F; \quad M_{kr} = M_k + \Delta M_k; \\ \varepsilon_{kr} &= \varepsilon_k + \Delta \varepsilon_k \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Это положение равновесия также описывается системой вида (1.1), где вместо  $W$ ,  $F$ ,  $M_k$  и  $\varepsilon_k$  введены соотношения вида (1.2). Вычитая из уравнений новой системы уравнения (1.1), пренебрегая произведениями малых величин  $\Delta W$  и  $\Delta F$ , получаем систему, линейную относительно приращений  $\Delta W$  и  $\Delta F$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Delta M_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_3}{\partial y^2} &= L (W + W^0, \Delta F) + \\ &+ L (\Delta W, F) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + \Delta q; \\ \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_3}{\partial x \partial y} &= -L (W + W^0, \Delta W) - \\ &- \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Если разбить внешнюю нагрузку на  $S$  этапов, то систему (1.3) можно рассматривать как линейную систему относительно приращений  $\Delta W_i$  и  $\Delta F_i$  и на  $i$ -этапе нагружения, а величины  $W$  и  $F$  рассматривать как суммарный прогиб и суммарную функцию напряжений, достигнутые за предыдущие ( $i-1$ ) этапы нагружения,

$$W = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta W_e; \quad F = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta F_e.$$

Начальное отклонение от круговой формы  $W^0$  задается в виде ряда [7, 8].

$$W^0(x, y) = \sum_{m,n} X_m(x) \left( f_{mn}^0 \sin \frac{ny}{R} + u_{mn}^0 \cos \frac{ny}{R} \right), \quad (1.4)$$

где  $f_{mn}^0$ ,  $u_{mn}^0$ —амплитудные значения изгибных составляющих начального прогиба;  $X_m(x)$ —ортогональные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Методы построения рядов вида (1.4), например, по результатам обмера реальных оболочек известны [9]. Решение системы (1.3) на  $i$ -этапе нагружения имеет вид

$$\Delta W_i = f_0^i + \sum_{m,n} X_m(x) \left( f_{mn}^i \sin \frac{ny}{R} + u_{mn}^i \cos \frac{ny}{R} \right);$$

$$\Delta F_i = \sum_{m,n} X_m(x) \left( p_{mn}^i \sin \frac{ny}{R} + h_{mn}^i \cos \frac{ny}{R} \right) -$$

$$-\frac{\Delta T_i}{2} y^2 - \frac{\Delta q_i R}{2} x^2.$$

Величина  $f'_0$  определяется из условия замкнутости оболочки

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0,$$

где  $v$  — тангенциальное смещение.

Суммарный прогиб  $W$  и функция напряжений  $F$  за предыдущие  $(i-1)$  этапы нагружения определяются в виде

$$W = f_0 + \sum_{m,n} X_m(x) \left( f_{mn} \sin \frac{ny}{R} + u_{mn} \cos \frac{ny}{R} \right);$$

$$F = \sum_{m,n} X_m(x) \left( p_{mn} \sin \frac{ny}{R} + h_{mn} \cos \frac{ny}{R} \right) - \frac{T}{2} y^2 - \frac{qR}{2} x^2,$$

$$f_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} f_{mn}^e; \quad u_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} u_{mn}^e; \quad T = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta T_e;$$

$$p_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} p_{mn}^e; \quad h_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} h_{mn}^e; \quad q = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta q_e.$$

2. Связь между приращениями внутренних усилий и моментов и приращениями деформаций и кривизн в общем случае имеет вид

$$\Delta T_k = A_{k1} \Delta \varepsilon_1 + A_{k2} \Delta \varepsilon_2 + A_{k3} \Delta \varepsilon_3 - A_{k4} \Delta \chi_1 - A_{k5} \Delta \chi_2 - A_{k6} \Delta \chi_3;$$

$$\Delta M_k = B_{k1} \Delta \varepsilon_1 + B_{k2} \Delta \varepsilon_2 + B_{k3} \Delta \varepsilon_3 - B_{k4} \Delta \chi_1 - B_{k5} \Delta \chi_2 - B_{k6} \Delta \chi_3. \quad (2.1)$$

$(k = 1, 2, 3).$

Полагаем, что кривизна положительна, если выпуклость обращена в сторону отрицательного направления оси  $z$ .

Выражая приращения деформаций  $\Delta \varepsilon_k$  и моментов  $\Delta M_k$  через приращения  $\Delta T_k$  и  $\Delta \chi_k$ , а также учитывая, что

$$\Delta T_1 = \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}; \quad \Delta T_2 = \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2}, \quad \Delta T_3 = -\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y};$$

$$\Delta \chi_1 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2}, \quad \Delta \chi_2 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2}, \quad \Delta \chi_3 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y},$$

из системы (2.1) получим

$$\Delta \varepsilon_k = a_{k1} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} + a_{k2} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + a_{k3} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y} + a_{k4} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} +$$

$$+ a_{k5} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} + a_{k6} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y};$$

$$\Delta M_k = b_{k1} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} + b_{k2} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + b_{k3} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y} + b_{k4} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} +$$

$$+ b_{k5} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} + b_{k6} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

$(k = 1, 2, 3).$

Коэффициенты  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  являются жесткостными характеристиками оболочки. Ниже они определены для теории течения с изотропным упрочнением и деформационной теории.

В общем случае, при подстановке (2.2) в (1.3) и разложении  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  в ряды Фурье (на каждом этапе нагружения они являются функциями только координат), решение системы (1.3) методом Бубнова-Галеркина приводит к системе алгебраических линейных уравнений относительно

$$f_{mn}^i, u_{mn}^i, p_{mn}^i, h_{mn}^i.$$

Определяя суммарные значения  $W$ ,  $F$  и жесткостные характеристики в конце  $i$ -го этапа, перейдем к  $(i+1)$  этапу нагружения. Для решения на каждом этапе возможно применять метод переменных параметров упругости [10].

Опуская выкладки, приведем выражения для коэффициентов  $a_{kl}$  и  $b_{kl}$ .

$$\begin{aligned} a_{11} &= (A_{22} A_{33} - A_{32} A_{23}) \Delta^{-1}; & a_{12} &= (A_{13} A_{32} - A_{12} A_{33}) \Delta^{-1}; \\ a_{13} &= (A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22}) \Delta^{-1}; & a_{21} &= (A_{23} A_{31} - A_{21} A_{33}) \Delta^{-1}; \\ a_{22} &= (A_{11} A_{33} - A_{13} A_{31}) \Delta^{-1}; & a_{23} &= (A_{13} A_{21} - A_{11} A_{23}) \Delta^{-1}; \\ a_{31} &= (A_{21} A_{32} - A_{22} A_{31}) \Delta^{-1}; & a_{32} &= (A_{12} A_{31} - A_{11} A_{32}) \Delta^{-1}; \\ a_{33} &= (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}) \Delta^{-1}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

начиная с  $l=4$

$$\begin{aligned} a_{kl} &= A_{1l} a_{k, l-3} + A_{2l} a_{k, l-2} + A_{3l} a_{k, l-1}; \\ b_{kl} &= (B_{k1} a_{1l} + B_{k2} a_{2l} + B_{k3} a_{3l}), \quad (l=1, 2, 3) \end{aligned}$$

начиная с  $l=4$

$$\begin{aligned} b_{kl} &= B_{k1} a_{1l} + B_{k2} a_{2l} + B_{k3} a_{3l} + B_{kl}; \\ \Delta &= \det [A_{ks}], \quad (k, s=1, 2, 3). \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  получены для изотропной теории течения (с учетом сжимаемости в упругой области) и для деформационной теории (с учетом сжимаемости в упругой и пластической областях). Ниже выписаны только коэффициенты по деформационной теории

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{3}{4(1 - \mu_c^2) I_{11}}; & a_{12} = a_{21} &= -\mu_c a_{11}; \\ a_{33} = b_{33} &= -\frac{I_{22}}{I_{12}}; \\ a_{14} = a_{25} &= -b_{11} = -b_{22} = -\frac{I_{21}}{I_{11}}; & b_{14} &= \frac{4}{3} \left( I_{31} - \frac{I_{21}^2}{I_{11}} \right); \\ b_{15} = b_{24} &= \mu_c b_{14}; & b_{36} &= \frac{2}{3} \left( I_{32} - \frac{I_{22}^2}{I_{12}} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$I_{1j} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j dz; \quad I_{2j} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j z dz; \quad I_{3j} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j z^2 dz;$$

$$c_1 = \frac{c_3(1+\omega)}{(1+4\omega)}; \quad c_2 = \frac{c_3(1-2\omega)}{(1+4\omega)}; \quad c_3 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}; \quad \omega = \frac{\sigma_i}{9K\varepsilon_i};$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\sigma_3^2};$$

$$\varepsilon_i = 2/3 \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_1e_2 + \nu(1+\nu)(e_1+e_2)^2 + \frac{3}{4}e_3^2};$$

$$\nu = 1 - \frac{2c_3}{3K(1+4\omega)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)};$$

$$e_1 = \varepsilon_1 - \nu_1 z; \quad e_2 = \varepsilon_2 - \nu_2 z; \quad e_3 = 2(\varepsilon_3 - \nu_3 z) \quad (2.4)$$

$\mu_c$  — коэффициент Пуассона, соответствующий среднему значению интенсивности деформаций. Все остальные  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  равны нулю. Для однородного напряженного состояния коэффициенты  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  получены в [11].

Система уравнений (1.3) после подстановки  $\Delta M_k$ ,  $\Delta \varepsilon_k$  запишется в виде

$$L_1(\Delta F_i) + L_2(\Delta W_i) - L(W + W^0, \Delta F_i) - L(\Delta W_i, F) -$$

$$- \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Delta F_i}{\partial x^2} = \Delta q_i;$$

$$L_3(\Delta F_i) + L_4(\Delta W_i) + L(W + W^0, \Delta W_i) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Delta W_i}{\partial x^2} = 0, \quad (2.11)$$

где

$$L_1(\varphi) = b_{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + b_{21} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + (b_{11} + 2b_{33} + b_{22}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ (b_{13} + 2b_{32}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + (2b_{31} + b_{23}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + 2 \left( \frac{\partial b_{12}}{\partial x} + \frac{\partial b_{32}}{\partial y} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 2 \left( \frac{\partial b_{31}}{\partial x} + \frac{\partial b_{31}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + 2 \left( \frac{\partial b_{11}}{\partial x} + \frac{\partial b_{31}}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial b_{33}}{\partial x} + \frac{\partial b_{23}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial b_{13}}{\partial x} + \frac{\partial b_{32}}{\partial x} + \frac{\partial b_{33}}{\partial y} + \frac{\partial b_{22}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 b_{12}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b_{32}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b_{22}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} +$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 b_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b_{31}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b_{21}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} +$$

$$+ \left( \frac{\partial^2 b_{13}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 b_{33}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 b_{23}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad (2.12)$$

$$L_3(\varphi) = a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + (a_{12} - 2a_{33} + a_{21}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ (a_{23} - 2a_{32}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + (a_{13} - 2a_{31}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + 2 \left( \frac{\partial a_{22}}{\partial x} - \frac{\partial a_{32}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left( \frac{\partial a_{11}}{\partial y} - \frac{\partial a_{31}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + 2 \left( \frac{\partial a_{13}}{\partial y} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x} - \frac{\partial a_{31}}{\partial y} - \frac{\partial a_{33}}{\partial x} \right) \times \\
& \quad \times \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial a_{12}}{\partial y} + \frac{\partial a_{23}}{\partial x} - \frac{\partial a_{32}}{\partial x} - \frac{\partial a_{33}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \\
& \quad + \left( \frac{\partial^2 a_{11}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 a_{31}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\
& \quad + \left( \frac{\partial^2 a_{12}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 a_{32}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\
& \quad + \left( \frac{\partial^2 a_{13}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Оператор  $L_2(\varphi)$  получается из оператора  $L_1(\varphi)$  при замене  $b_{k1}$  на  $b_{k5}$ ,  $b_{k2}$  на  $b_{k4}$ , на  $b_{k3}$  на  $b_{k6}$ , а оператор  $L_4(\varphi)$  получается из  $L_3(\varphi)$  при замене  $a_{k1}$  на  $a_{k5}$ ,  $a_{k2}$  на  $a_{k4}$ ,  $a_{k3}$  на  $a_{k6}$  ( $k=1, 2, 3$ ).

3. Остаточные напряжения, возникающие после пластического деформирования оболочки, учитываются соответствующим изменением коэффициентов  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$ . Рассмотрим, например, вопрос об учете остаточных напряжений, получаемых при изготовлении оболочки из листа.

Имеется следующее распределение остаточных напряжений, самоуравновешенных в каждом сечении и интенсивности деформаций, соответствующее началу пластического деформирования на участках  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (применена деформационная теория  $\mu_c = 1/2$ , в (2.10)  $c_1 = c_2 = c_3$ ):

$$(\alpha) -\frac{H}{2} \leq z \leq -H_0$$

$$\sigma_z^\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa z \right) - \frac{4}{3} E (\kappa - \kappa_0) z,$$

$$\varepsilon_{it}^\alpha = 2\varepsilon_{it} - \frac{2}{\sqrt{3}} (\kappa - \kappa_0) z.$$

$$(\beta) -H_0 \leq z \leq H_0.$$

$$\sigma_z^\beta = \frac{4}{3} E \kappa_0 z,$$

$$\varepsilon_{it}^\beta = \varepsilon_{it} + \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa_0 z$$

$$(\gamma) H_0 \leq z \leq \frac{H}{2}$$

$$\sigma_z^\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa z \right) - \frac{4}{3} E (\kappa - \kappa_0) z,$$

$$\varepsilon_{it}^\gamma = -\frac{2}{\sqrt{3}} (\kappa - \kappa_0) z,$$

где  $\kappa$  — кривизна изгиба оболочки по цилиндрической поверхности,  $\kappa_0$  — остаточная кривизна после разгрузки,  $\varepsilon_{it}$  — интенсивность деформации, соответствующая началу пластических де-

формаций (до изгиба),  $H_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_{it}}{\kappa}$  — граница упругого ядра по толщине оболочки,  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$  — первоначальная зависимость между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ . Введенная по (3.1) неоднородность напряженного состояния при упругом деформировании не оказывает никакого влияния и учитывается только при пластических деформациях.

Для однородного состояния в предположении постоянства  $\varepsilon_i$  на толщине подобные построения проведены в [12].

Зависимость между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  по участкам  $\alpha, \beta, \gamma$  в процессе изгиба принимает вид

$$\begin{aligned}\sigma_i^\alpha &= -\frac{2}{\sqrt{3}} E (x - x_0) z + 2\sigma_i \left( \frac{1}{2} \varepsilon_i + \frac{1}{\sqrt{3}} (x - x_0) z \right); \\ \sigma_i^\beta &= \frac{2}{\sqrt{3}} E x_0 z + \sigma_i \left[ \varepsilon_i - \frac{2}{\sqrt{3}} x_0 z \right]; \\ \sigma_i^\gamma &= \sigma_i \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa z \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} E (x - x_0) z + \sigma_i \left( \varepsilon_i - \frac{2}{\sqrt{3}} x_0 z \right).\end{aligned}$$

Следовательно, интегралы в (2.4) также разобьются на три части по соответствующим участкам

$$I_{ij} = I_{ij}^\alpha + I_{ij}^\beta + I_{ij}^\gamma; \quad I_{2j} = I_{2j}^\alpha + I_{2j}^\beta + I_{2j}^\gamma; \quad I_{3j} = I_{3j}^\alpha + I_{3j}^\beta + I_{3j}^\gamma.$$

Величины  $I_{ij}^\alpha, I_{2j}^\alpha, I_{3j}^\alpha$  определены для различных участков и различных вариантов пересечения зависимостей  $\varepsilon_{it}^s(z)$  и  $\varepsilon_i(z)$ .

В частности, для участка  $\gamma$ , если пересечение указанных зависимостей происходит на этом участке в двух точках, имеем

$$\begin{aligned}I_{ij}^\gamma &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H_1}{H}} c_3^\gamma dz + E (H_2 - H_1) + \int_{\frac{H_2}{H}}^{-\frac{H_0}{H_2}} c_3^\gamma dz; \\ I_{2j}^\gamma &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H_1}{H}} c_3^\gamma z dz + \frac{1}{2} E (H_2^2 - H_1^2) + \int_{\frac{H_2}{H}}^{-\frac{H_0}{H_2}} c_3^\gamma z dz; \\ I_{3j}^\gamma &= \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H_1}{H}} c_3^\gamma z^2 dz + \frac{1}{3} E (H_2^3 - H_1^3) + \int_{\frac{H_2}{H}}^{-\frac{H_0}{H_2}} c_3^\gamma z^2 dz; \\ c_3^\gamma &= \frac{\sigma_i^\gamma}{\varepsilon_i},\end{aligned}$$

где  $H_1, H_2$  — координаты точек пересечения зависимостей  $\varepsilon_{it}^s(z)$  и  $\varepsilon_i(z)$ .

На основании сказанного могут быть решены задачи пластического деформирования цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами (начальные прогибы и остаточные напряжения) и построены поверхности равновесного состояния для

параметров, характеризующих эти несовершенства, в пространстве действующих нагрузок.

При этом определяются комбинации нагрузок, соответствующие потере несущей способности системы.

4. Рассмотрим шарнирно-опертую оболочку с начальными прогибами при соотношениях деформационной теории.

Ограничимся в разложениях функций  $W^0$ ,  $W$  и  $F$  одним членом ряда

$$W^0 = f^0 \sin \frac{\pi x^2}{L} \sin \frac{ny}{R}; \quad W = f \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R};$$

$$F = p \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} - \frac{T}{2} y^2 - \frac{qR}{2} x^2.$$

Функции, характеризующие жесткость оболочки, представим в виде

$$a_{11} = a_{11}^1 + (a_{11}^2 - a_{11}^1) \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R};$$

$$a_{33} = a_{33}^1 + (a_{33}^2 - a_{33}^1) \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R};$$

$$a_{36} = a_{36}^2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}; \quad b_{11} = b_{11}^2 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R};$$

$$b_{14} = b_{14}^1 + (b_{14}^2 - b_{14}^1) \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R};$$

$$b_{36} = b_{36}^1 + (b_{36}^2 - b_{36}^1) \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R}.$$

Верхние индексы означают, что величины  $a_{hl}$  и  $b_{hl}$  вычисляются в точках  $(0,0)$  и  $(L/2, \pi R/2n)$  соответственно.

Система (1.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ (b_{14}^2 - b_{14}^1) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} b_{14}^1 \right] \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 + 2\mu_c \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{3} (b_{36}^2 - b_{36}^1) \frac{1}{\pi} + b_{36}^1 \right] \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 T + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{n}{R} \right)^2 qR \right] \right\} f + \frac{1}{2R} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 p = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 T + \left( \frac{n}{R} \right)^2 qR \right] (f^0 - b_{11}^2); \quad (4.1) \\ & - \frac{1}{2R} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 f + \left\{ \left[ (a_{11}^2 - a_{11}^1) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} a_{11}^1 \right] \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 - 2\mu_c \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] - \left[ \frac{1}{3} (a_{33}^2 - a_{33}^1) \frac{1}{\pi} + a_{33}^1 \right] \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right\} p = 0. \end{aligned}$$

Решение системы (4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} f = & \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^2 qR \right] (f^0 - b_{11}^2) \left\{ \left[ (b_{14}^2 - b_{14}^1) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} b_{14}^1 \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 + 2\mu_c \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] + \right. \end{aligned}$$



$$+ \left[ \frac{1}{3} (b_{36}^2 - b_{36}^1) \frac{1}{\pi} + b_{36}^1 \right] \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 T + \left( \frac{n}{R} \right)^2 qR \right] + \frac{1}{2R} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 G \Big]^{-1};$$

$$p = Gf;$$

$$G = \frac{1}{2R} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left\{ \left[ (a_{11}^2 - a_{11}^1) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} a_{11}^1 \right] \times \right.$$

$$\times \left[ \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 - 2\nu_c \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] -$$

$$\left. - \left[ \frac{1}{3} (a_{33}^2 - a_{33}^1) \frac{1}{\pi} + a_{33}^1 \right] \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right\}^{-1}.$$

Коэффициенты  $a_{kl}$ ,  $b_{kl}$  определены по (2.3). Проведено построение поверхностей равновесного состояния для оболочки с параметрами  $R/L=5$ ;  $R/H=150$ ;  $n=10$

для различных начальных прогибов  $f^0$ . При этом принята диаграмма  $\sigma_i - \varepsilon_i$  с линейным упрочнением (модуль Юнга  $E = 7 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>, модуль упрочнения пластического участка  $E_1 = 2,24 \cdot 10^3$  кг/мм<sup>2</sup>, предел текучести  $\sigma_t = 17$  кг/мм<sup>2</sup>).

Для расчета пластического состояния использован метод переменных параметров упругости. В качестве критерия сходимости использовано условие, что разность амплитудных значений прогибов в  $\eta$  и  $\eta+1$  приближениях не должна превышать наперед заданной малой величины  $|f_\eta - f_{\eta+1}| < 0,001H$

Исчерпанию несущей способности системы в данном случае соответствует обращение в нуль знаменателя в выражении для  $f$ . Соответствующая этому случаю поверхность является предельной.

На рис. 1 построена одна из поверхностей равновесного состояния 1 (штриховая линия) и предельная поверхность 2 (сплошная линия) в осях  $P$ ,  $Q$ ,  $\xi^0$  (где

$$P = T/\sigma_t H; \quad Q = qR/\sigma_t H; \quad \xi^0 = f^0/H).$$

Расчет проведен на ЭЦВМ БЭСМ-4. Программа составлена на языке АЛГОЛ-60.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson J. W. On the postbuckling behaviour of imperfection-sensitive structures in the plastic range. Journ. of Appl. Mech. Trans. of ASME, ser. E, 1972, v. 39, № 2. (Перевод: Прикладная механика, 1972, № 2, с. 356—364).

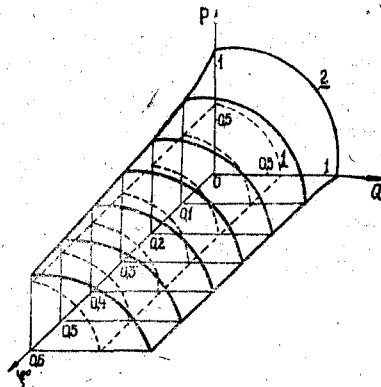


Рис. 1.

2. Onat E., Drucker D. Ine lastic instability and incremental theories of plasticity. Journ. of Aerospace Sci., v. 20, 1953, pp. 181—186 (Перевод: Сб. переводов. «Механика», 1955, № 3, с. 81—89).

3. Зубчанинов В. Г. О понятии пластической устойчивости и неустойчивости и некоторые проблемы неупругой устойчивости конструкций.—В сб.: Механика сплошных сред. Тула, 1973, с. 61—72. (Тульский политехнический ин-т).

4.\* Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.

5. Петров В. В. Исследование конечных прогибов пластин и пологих оболочек методом последовательных нагружений. — В кн.: Теория пластин и оболочек. Киев, изд-во АН СССР, 1962, с. 328—331.

6. Петров В. В. К вопросу расчета пластинок и пологих оболочек с учетом физической и геометрической нелинейности. — В сб.: Механика деформируемых сред. Изд-во Саратовского госуниверситета, 1974, вып. 1, с. 123—130.

7. Сорокин В. В. Упругопластический изгиб и устойчивость круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями формы. — «Изв. АН СССР. Механика». 1965, № 3, с. 114—118.

8. Сорокин В. В. Приближенный метод исследования больших прогибов и несущей способности упругопластических оболочек. — МТТ, 1966, № 4, с. 81—87.

9. Рикардс Р. Б., Браунс Я. А. Исследование форм выпучивания полимерных цилиндрических оболочек при длительном нагружении. — Механика полимеров», 1971, № 2.

10. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности.—ПММ, 1951, т. 15, в. 6; с. 765—770.

11. Григолюк Э. И. О выпучивании оболочек за пределом упругости. — «Изв. АН СССР. ОТН», 1957, № 10, с. 3—9.

12. Евсеева М. П. Влияние остаточных напряжений на устойчивость замкнутой круговой цилиндрической оболочки под действием всестороннего внешнего давления. — В сб.: Расчет пространственных конструкций, М., Стройиздат, 1967, с. 153—170.

УДК 539—3

О. Д. Горбенко, Т. Д. Семькина

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предлагается численный метод расчета осесимметричного деформирования вязкопластической оболочки вращения с произвольным видом меридиана на основе вариационного принципа Ильюшина-Прагера [1, 2].

Рассмотрим оболочку, выполненную из материала, свойства которого описываются зависимостью [1]:

$$\sqrt{I'_2} = \pm k + 2\eta \sqrt{I'_2},$$

где  $I'_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ ,  $I'_2 = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ ;