УДК 539.372:624.074.4

В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НАЧАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Тонкостенные системы с начальными несовершенствами являются наиболее приемлемой моделью для изучения выпучивания за пределами упругости [1—3].

Рассматривается поведение пластически деформируемых цилиндрических оболочек, имеющих отклонения от первоначальной круговой формы и начальные остаточные напряжения, в случае комбинированного нагружения осевой силой и поперечным давлением при конечных прогибах.

1. Система уравнений равновесия и деформационных соотношений цилиндрических оболочек приводится к виду [4]

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_3}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}=L(W+W^0,\ F)+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+q;$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{2}L(W+2W^0,\ W)-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \qquad (1.1)$$

$$T_1=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\quad T_2=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\quad T_3=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};$$

$$L(f,\ \varphi)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y},$$

где q — поперечная нагрузка, x, y — координаты вдоль образующей и по дуге, T_3—сдвиговое усилие, M_3—крутящий момент, ε_3 — сдвиговая деформация, W^0 — начальный прогиб; остальные обозначения общепринятые.

К системе (1.1) применяется вариант метода последовательных нагружений, который заключается в поэтапном нагружении системы и, в соответствии с этим, поэтапном изменении величины прогиба W и функции напряжений F. Система нелинейных уравнений на каждом этапе нагружения сводится к системе линейных уравнений относительно приращений прогиба ΔW и функции напряжений ΔF. Аналогичный подход применяется для решения некоторых задач деформирования без начальных несовершенств в [5, 6].

Пусть внешние нагрузки получили некоторое приращение ΔT и Δq (T—осевая сжимающая сила).

Во избежание накопления погрешности решения величины ΔT и Δq выбираются такими, чтобы производимое ими приращение прогиба ΔW не превышало величины 0,1H (H—толщина оболочки).

В новом положении равновесия, обозначенном индексом «r», имеем

$$W_r = W + \Delta W; \quad F_r = F + \Delta F; \quad M_{kr} = M_k + \Delta M_k;$$
$$\varepsilon_{kr} = \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.2}$$

Это положение равновесия также описывается системой вида (1.1), где вместо W, F, M_k и ε_k введены соотношения вида (1.2). Вычитая из уравнений новой системы уравнения (1.1), пренебрегая произведениями малых величин ΔW и ΔF, получаем систему, линейную относительно приращений ΔW и ΔF,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Delta M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Delta M_3}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \Delta M_2}{\partial y^2} = L\,(W + W^0,\ \Delta F) + \\ &\qquad + L\,(\Delta W,\ F) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + \Delta q; \\ &\frac{\partial^2 \Delta\varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta\varepsilon_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \Delta\varepsilon_3}{\partial x\,\partial y} = -L\,(W + W^0,\ \Delta W) - \\ &\qquad - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2}. \end{aligned}\right| \tag{1.3}$$

Если разбить внешнюю нагрузку на S этапов, то систему (1.3) можно рассматривать как линейную систему относительно приращений ΔW_i и ΔF_i и на i-этапе нагружения, а величины W и F рассматривать как суммарный прогиб и суммарную функцию напряжений, достигнутые за предыдущие (i—1) этапы нагружения,

$$W = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta W_e; \qquad F = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta F_e.$$

Начальное отклонение от круговой формы W^0 задается в виде ряда [7, 8].

$$W^0\,(x,\ y) = \sum_{m,\ n} X_m\,(x)\left(f^0_{mn} \sin\frac{ny}{R} + u^0_{mn} \cos\frac{ny}{R}\right), \tag{1.4}$$

где f^0_{mn}, u^0_{mn} — амплитудные значения изгибных составляющих начального прогиба; $X_m(x)$—ортогональные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Методы построения рядов вида (1.4), например, по результатам обмера реальных оболочек известны [9]. Решение системы (1.3) на i-этапе нагружения имеет вид

$$\Delta W_i = f^i_0 + \sum_{m,\ n} X_m\,(x)\left(f^i_{mn} \sin\frac{ny}{R} + u^i_{mn} \cos\frac{ny}{R}\right);$$
$$\Delta F_i = \sum_{m,\ n} X_m\,(x)\left(p^i_{mn} \sin\frac{ny}{R} + h^i_{mn} \cos\frac{ny}{R}\right) -$$

$$-\frac{\Delta T_i}{2} y^2 - \frac{\Delta q_i R}{2} x^2.$$

Величина f^i_0 определяется из условия замкнутости оболочки

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0,$$

где v—тангенциальное смещение.

Суммарный прогиб W и функция напряжений F за предыдущие $(i—1)$ этапы нагружения определяются в виде

$$W = f_0 + \sum_{m,n} X_m(x) \left(f_{mn} \sin \frac{ny}{R} + u_{mn} \cos \frac{ny}{R}\right);$$

$$F = \sum_{m,n} X_m(x) \left(p_{mn} \sin \frac{ny}{R} + h_{mn} \cos \frac{ny}{R}\right) - \frac{T}{2} y^2 - \frac{qR}{2} x^2,$$

$$f_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} f^e_{mn}; \quad u_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} u^e_{mn}; \quad T = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta T_e;$$

$$p_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} p^e_{mn}; \quad h_{mn} = \sum_{e=1}^{i-1} h^e_{mn}; \quad q = \sum_{e=1}^{i-1} \Delta q_e.$$

2. Связь между приращениями внутренних усилий и моментов и приращениями деформаций и кривизн в общем случае имеет вид

$$\Delta T_k = A_{k1} \Delta\varepsilon_1 + A_{k2} \Delta\varepsilon_2 + A_{k3} \Delta\varepsilon_3 - A_{k4} \Delta\varkappa_1 - A_{k5} \Delta\varkappa_2 - A_{k6} \Delta\varkappa_3;$$

$$\Delta M_k = B_{k1} \Delta\varepsilon_1 + B_{k2} \Delta\varepsilon_2 + B_{k3} \Delta\varepsilon_3 - B_{k4} \Delta\varkappa_1 - B_{k5} \Delta\varkappa_2 - B_{k6} \Delta\varkappa_3. \quad (2.1)$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3).$$

Полагаем, что кривизна положительна, если выпуклость обращена в сторону отрицательного направления оси z.

Выражая приращения деформаций $\Delta\varepsilon_k$ и моментов ΔM_k через приращения ΔT_k и $\Delta\varkappa_k$, а также учитывая, что

$$\Delta T_1 = \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2}; \quad \Delta T_2 = \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2}, \quad \Delta T_3 = -\frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y};$$

$$\Delta\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2}, \quad \Delta\varkappa_2 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2}, \quad \Delta\varkappa_3 = -\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y},$$

из системы (2.1) получим

$$\Delta\varepsilon_k = a_{k1} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} + a_{k2} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + a_{k3} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y} + a_{k4} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} +$$

$$+ a_{k5} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} + a_{k6} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y};$$

$$\Delta M_k = b_{k1} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial y^2} + b_{k2} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x^2} + b_{k3} \frac{\partial^2 \Delta F}{\partial x \partial y} + b_{k4} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} +$$

$$+ b_{k5} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} + b_{k6} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y}. \quad (2.2)$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3).$$

Коэффициенты a_{kl}, b_{kl} являются жесткостными характеристиками оболочки. Ниже они определены для теории течения с изотропным упрочнением и деформационной теории.

В общем случае, при подстановке (2.2) в (1.3) и разложении a_{kl}, b_{kl} в ряды Фурье (на каждом этапе нагружения они являются функциями только координат), решение системы (1.3) методом Бубнова-Галеркина приводит к системе алгебраических линейных уравнений относительно

$$f^i_{mn}, \quad u^i_{mn}, \quad p^i_{mn}, \quad h^i_{mn}.$$

Определяя суммарные значения W, F и жесткостные характеристики в конце i-го этапа, перейдем к $(i+1)$ этапу нагружения. Для решения на каждом этапе возможно применять метод переменных параметров упругости [10].

Опуская выкладки, приведем выражения для коэффициентов a_{kl} и b_{kl}.

$$\begin{gathered}
a_{11}=(A_{22}\,A_{33}-A_{32}\,A_{23})\,\Delta^{-1}; \quad a_{12}=(A_{13}A_{32}-A_{12}\,A_{33})\,\Delta^{-1};\\
a_{13}=(A_{12}A_{23}-A_{13}\,A_{22})\,\Delta^{-1}; \quad a_{21}=(A_{23}\,A_{31}-A_{21}\,A_{33})\,\Delta^{-1};\\
a_{22}=(A_{11}\,A_{33}-A_{13}\,A_{31})\,\Delta^{-1}; \quad a_{23}=(A_{13}\,A_{21}-A_{11}\,A_{23})\,\Delta^{-1}; \qquad (2.4)\\
a_{31}=(A_{21}\,A_{32}-A_{22}\,A_{31})\,\Delta^{-1}; \quad a_{32}=(A_{12}\,A_{31}-A_{11}\,A_{32})\,\Delta^{-1};\\
a_{33}=(A_{11}\,A_{22}-A_{12}\,A_{21})\,\Delta^{-1};
\end{gathered}$$

начиная с $l=4$

$$a_{kl}=A_{1l}\,a_{k,\,l-3}+A_{2l}\,a_{k,\,l-2}+A_{3l}\,a_{k,\,l-1};$$

$$b_{kl}=(B_{k1}\,a_{1l}+B_{k2}\,a_{2l}+B_{k3}\,a_{3l}), \qquad (l=1,\ 2,\ 3)$$

начиная с $l=4$

$$b_{kl}=B_{k1}\,a_{1l}+B_{k2}\,a_{2l}+B_{k3}\,a_{3l}+B_{kl};$$

$$\Delta=\det\,[A_{ks}], \qquad (k,\ s=1,\ 2,\ 3).$$

Коэффициенты a_{kl}, b_{kl} получены для изотропной теории течения (с учетом сжимаемости в упругой области) и для деформационной теории (с учетом сжимаемости в упругой и пластической областях). Ниже выписаны только коэффициенты по деформационной теории

$$a_{11}=a_{22}=\frac{3}{4\,(1-\mu_c^2)\,I_{11}}; \quad a_{12}=a_{21}=-\mu_c\,a_{11};$$

$$a_{36}=b_{33}=-\frac{I_{22}}{I_{12}};$$

$$a_{14}=a_{25}=-b_{11}=-b_{22}=-\frac{I_{21}}{I_{11}}; \quad b_{14}=\frac{4}{3}\left(I_{31}-\frac{I_{21}^2}{I_{11}}\right); \qquad (2.3)$$

$$b_{15}=b_{24}=\mu_c\,b_{14}; \quad b_{36}=\frac{2}{3}\left(I_{32}-\frac{I_{22}^2}{I_{12}}\right),$$

где

$$I_{1j}=\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j\,dz;\quad I_{2j}=\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j\,z\,dz;\quad I_{3j}=\int\limits_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_j\,z^2\,dz;$$

$$c_1=\frac{c_3\,(1+\omega)}{(1+4\omega)};\qquad c_2=\frac{c_3\,(1-2\omega)}{(1+4\,\omega)};\qquad c_3=\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i};\qquad \omega=\frac{\sigma_i}{9K\,\varepsilon_i};$$

$$\sigma_i=\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_2^2+3\sigma_3^2};$$

$$\varepsilon_i={}^2/_3\sqrt{e_1^2+e_2^2-e_1e_2+\nu\,(1+\nu)\,(e_1+e_2)^2+\frac{3}{4}\,e_3^2};$$

$$\nu=1-\frac{2c_3}{3K\,(1+4\omega)};\qquad K=\frac{E}{3\,(1-2\mu)};$$

$$e_1=\varepsilon_1-\varkappa_1\,z;\quad e_2=\varepsilon_2-\varkappa_2\,z;\quad e_3=2\,(\varepsilon_3-\varkappa_3\,z)\tag{2.4}$$

μ_c — коэффициент Пуассона, соответствующий среднему значению интенсивности деформаций. Все остальные a_{kl}, b_{kl} равны нулю. Для однородного напряженного состояния коэффициенты a_{kl}, b_{kl} получены в [11].

Система уравнений (1.3) после подстановки ΔM_k, $\Delta\varepsilon_k$ запишется в виде

$$L_1\,(\Delta F_i)+L_2\,(\Delta W_i)-L\,(W+W^0,\ \Delta F_i)-L\,(\Delta W_i,\ F)-$$
$$-\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2\,\Delta F_i}{\partial x^2}=\Delta q_i;$$

$$L_3\,(\Delta F_i)+L_4\,(\Delta W_i)+L\,(W+W^0,\ \Delta W_i)+\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2\Delta W_i}{\partial x^2}=0,\tag{2.11}$$

где

$$L_1\,(\varphi)=b_{12}\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+b_{21}\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+(b_{11}+2b_{33}+b_{22})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+$$
$$+(b_{13}+2b_{32})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\,\partial y}+(2b_{31}+b_{23})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\,\partial y^3}+2\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial x}+\frac{\partial b_{32}}{\partial y}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+2\left(\frac{\partial b_{31}}{\partial x}+\frac{\partial b_{21}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+2\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial x}+\frac{\partial b_{31}}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial b_{33}}{\partial x}+\frac{\partial b_{23}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}+2\left(\frac{\partial b_{13}}{\partial x}+\frac{\partial b_{32}}{\partial x}+\frac{\partial b_{33}}{\partial y}+\frac{\partial b_{22}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 b_{12}}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 b_{32}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 b_{22}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 b_{11}}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 b_{31}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 b_{21}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 b_{13}}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial^2 b_{33}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 b_{23}}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y};\tag{2.12}$$

$$L_3\,(\varphi)=a_{22}\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+a_{11}\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+(a_{12}-2a_{33}+a_{21})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+$$
$$+(a_{23}-2a_{32})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\,\partial y}+(a_{13}-2a_{31})\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial x\,\partial y^3}+2\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial x}-\frac{\partial a_{32}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+$$

$$
+2\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial y}-\frac{\partial a_{31}}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3}+2\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial y}+\frac{\partial a_{23}}{\partial x}-\frac{\partial a_{31}}{\partial y}-\frac{\partial a_{33}}{\partial x}\right)\times
$$

$$
\times\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\,\partial y^2}+2\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial y}+\frac{\partial a_{23}}{\partial x}-\frac{\partial a_{32}}{\partial x}-\frac{\partial a_{33}}{\partial y}\right)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2\,\partial y}+
$$

$$
+\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 a_{31}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+
$$

$$
+\left(\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 a_{32}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+
$$

$$
+\left(\frac{\partial^2 a_{13}}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 a_{33}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}.
$$

Оператор $L_2(\varphi)$ получается из оператора $L_1(\varphi)$ при замене b_{k1} на b_{k5}, b_{k2} на b_{k4}, на b_{k3} на b_{k6}, а оператор $L_4(\varphi)$ получается из $L_3(\varphi)$ при замене a_{k1} на a_{k5}, a_{k2} на a_{k4} a_{k3} на a_{k6} $(k=1,\ 2,\ 3)$.

3. Остаточные напряжения, возникающие после пластического деформирования оболочки, учитываются соответствующим изменением коэффициентов a_{kl}, b_{kl}. Рассмотрим, например, вопрос об учете остаточных напряжений, получаемых при изготовлении оболочки из листа.

Имеется следующее распределение остаточных напряжений, самоуравновешенных в каждом сечении и интенсивности деформаций, соответствующее началу пластического деформирования на участках α, β, γ (применена деформационная теория $\mu_c={}^1/_2$, в (2.10) $c_1=c_2=c_3$):

$$
(\alpha)\ -\frac{H}{2}\leqslant z\leqslant -H_0
$$

$$
\sigma_2^{\alpha}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma_i\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\varkappa z\right)-\frac{4}{3}\,E\,(\varkappa-\varkappa_0)\,z,
$$

$$
\varepsilon_{it}^{\alpha}=2\varepsilon_{it}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,(\varkappa-\varkappa_0)\,z.
$$

$$
(\beta)\ -H_0\leqslant z\leqslant H_0.
$$

$$
\sigma_2^{\beta}=\frac{4}{3}\,E\,\varkappa_0\,z,\qquad \varepsilon_{it}^{\beta}=\varepsilon_{it}+\frac{2}{\sqrt{3}}\,\varkappa_0\,z
$$

$$
(\gamma)\ H_0\leqslant z\leqslant\frac{H}{2}
$$

$$
\sigma_2^{\gamma}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\sigma_i\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\varkappa z\right)-\frac{4}{3}\,E\,(\varkappa-\varkappa_0)\,z,
$$

$$
\varepsilon_{it}^{\gamma}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\,(\varkappa-\varkappa_0)\,z,
$$

где $\varkappa$ — кривизна изгиба оболочки по цилиндрической поверхности, $\varkappa_0$—остаточная кривизна после разгрузки, ε_{it}—интенсивность деформации, соответствующая началу пластических деформаций (до изгиба), $H_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_{it}}{\varkappa}$ —граница упругого ядра по толщине оболочки, $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$—первоначальная зависимость между σ_i и ε_i. Введенная по (3.1) неоднородность напряженного состояния при упругом деформировании не оказывает никакого влияния и учитывается только при пластических деформациях.

Для однородного состояния в предположении постоянства ε_i на толщине подобные построения проведены в [12].

Зависимость между σ_i и ε_i по участкам α, β, γ в процессе изгиба принимает вид

$$\sigma_i^\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} E(\varkappa - \varkappa_0) z + 2\sigma_i\left(\frac{1}{2}\varepsilon_i + \frac{1}{\sqrt{3}}(\varkappa - \varkappa_0) z\right);$$

$$\sigma_i^\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} E \varkappa_0 z + \sigma_i\left[\varepsilon_i - \frac{2}{\sqrt{3}} \varkappa_0 z\right];$$

$$\sigma_i^\gamma = \sigma_i\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \varkappa z\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} E(\varkappa - \varkappa_0) z + \sigma_i\left(\varepsilon_i - \frac{2}{\sqrt{3}} \varkappa_0 z\right).$$

Следовательно, интегралы в (2.4) также разобьются на три части по соответствующим участкам

$$I_{1j} = I_{1j}^\alpha + I_{1j}^\beta + I_{1j}^\gamma; \quad I_{2j} = I_{2j}^\alpha + I_{2j}^\beta + I_{2j}^\gamma; \quad I_{3j} = I_{3j}^\alpha + I_{3j}^\beta + I_{3\gamma}^\gamma.$$

Величины I_{1j}^s, I_{2j}^s, I_{3j}^s определены для различных участков и различных вариантов пересечения зависимостей $\varepsilon_{it}^s(z)$ и $\varepsilon_i(z)$.

В частности, для участка γ, если пересечение указанных зависимостей происходит на этом участке в двух точках, имеем

$$I_{1j}^\gamma = \int_{-\frac{H}{2}}^{H_1} c_s^\gamma \, dz + E(H_2 - H_1) + \int_{H_2}^{-H_0} c_s^\gamma \, dz;$$

$$I_{2j}^\gamma = \int_{-\frac{H}{2}}^{H_1} c_3^\gamma z \, dz + \frac{1}{2} E(H_2^2 - H_1^2) + \int_{H_2}^{-H_0} c_3^\gamma z \, dz;$$

$$I_{3j}^\gamma = \int_{-\frac{H}{2}}^{H_1} c_3^\gamma z^2 \, dz + \frac{1}{3} E(H_2^3 - H_1^3) + \int_{H_2}^{-H_0} c_3^\gamma z^2 \, dz;$$

$$c_3^\gamma = \frac{\sigma_i^\gamma}{\varepsilon_i},$$

где H_1, H_2—координаты точек пересечения зависимостей $\varepsilon_{it}^\gamma(z)$ и $\varepsilon_i(z)$.

На основании сказанного могут быть решены задачи пластического деформирования цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами (начальные прогибы и остаточные напряжения) и построены поверхности равновесного состояния для параметров, характеризующих эти несовершенства, в пространстве действующих нагрузок.

При этом определяются комбинации нагрузок, соответствующие потере несущей способности системы.

4. Рассмотрим шарнирно-опертую оболочку с начальными прогибами при соотношениях деформационной теории.

Ограничимся в разложениях функций W^0, W и F одним членом ряда

$$W^0 = f^0 \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R}; \qquad W = f \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R};$$

$$F = p \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R} - \frac{T}{2} y^2 - \frac{qR}{2} x^2.$$

Функции, характеризующие жесткость оболочки, представим в виде

$$a_{11} = a^1_{11} + (a^2_{11} - a^1_{11}) \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{ny}{R};$$

$$a_{33} = a^1_{33} + (a^2_{33} - a^1_{33}) \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{ny}{R};$$

$$a_{36} = a^2_{36} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R}; \quad b_{11} = b^2_{11} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{ny}{R};$$

$$b_{14} = b^1_{14} + (b^2_{14} - b^1_{14}) \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{ny}{R};$$

$$b_{36} = b^1_{36} + (b^2_{36} - b^1_{36}) \sin^2\frac{\pi x}{L} \sin^2\frac{ny}{R}.$$

Верхние индексы означают, что величины a_{kl} и b_{kl} вычисляются в точках (0.0) и $(L/2,\ \pi R/2n)$ соответственно.

Система (1.3) запишется в виде

$$\left\{\left[(b^2_{14} - b^1_{14})\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} b^1_{14}\right]\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + 2\mu_c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^4\right] + \right.$$
$$+ \left[\frac{1}{3}(b^2_{36} - b^1_{36})\frac{1}{\pi} + b^1_{36}\right]\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 T + \right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n}{R}\right)^2 qR\right]\right\} f + \frac{1}{2R}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 p =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 T + \left(\frac{n}{R}\right)^2 qR\right](f_0 - b^2_{11}); \tag{4.1}$$
$$-\frac{1}{2R}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 f + \left\{\left[(a^2_{11} - a^1_{11})\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} a^1_{11}\right]\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 - 2\mu_c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n}{R}\right)^4\right] - \left[\frac{1}{3}(a^2_{33} - a^1_{33})\frac{1}{\pi} + a^1_{33}\right]\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2\right\} p = 0.$$

Решение системы (4.1) имеет вид

$$f = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2 qR\right](f^0 - b^2_{11})\left\{\left[(b^2_{14} - b^1_{14})\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} b^1_{14}\right] \times \right.$$
$$\times \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + 2\mu_c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^4\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{3}\left(b^2_{36}-b^1_{36}\right)\frac{1}{\pi}+b^1_{36}\right]\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 T+\left(\frac{n}{R}\right)^2 qR\right]+\frac{1}{2R}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 G\Big\}^{-1};$$

$$p=Gf;$$

$$G=\frac{1}{2R}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\Big\{\left[\left(a^2_{11}-a^1_{11}\right)\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}a^1_{11}\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^4-2\mu_c\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2+\left(\frac{n}{R}\right)^4\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{3}\left(a^2_{33}-a^1_{33}\right)\frac{1}{\pi}+a^1_{33}\right]\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{n}{R}\right)^2\Big\}^{-1}.$$

Коэффициенты a_{kl}, b_{kl} определены по (2.3). Проведено построение поверхностей равновесного состояния для оболочки с параметрами $R/L=5$; $R/H=150$; $n=10$ для различных начальных прогибов f°. При этом принята диаграмма $\sigma_i-\varepsilon_i$ с линейным упрочнением (модуль Юнга $E=7\cdot10^3$ кг/мм², модуль упрочнения пластического участка $E_1=2{,}24\cdot10^3$ кг/мм², предел текучести $\sigma_t=17$ кг/мм²).

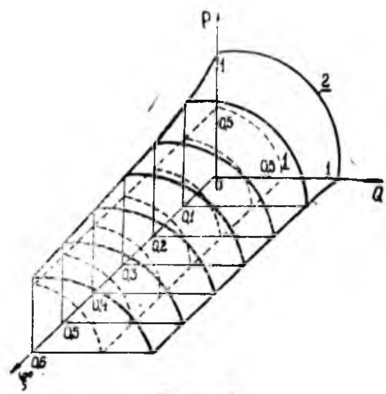

Рис. 1.

Для расчета пластического состояния использован метод переменных параметров упругости. В качестве критерия сходимости использовано условие, что разность амплитудных значений прогибов в η и $\eta+1$ приближениях не должна превышать наперед заданной малой величины $|f_{\eta}-f_{\eta+1}|<0{,}001H$

Исчерпанию несущей способности системы в данном случае соответствует обращение в нуль знаменателя в выражении для f. Соответствующая этому случаю поверхность является предельной.

На рис. 1 построена одна из поверхностей равновесного состояния *1* (штриховая линия) и предельная поверхность *2* (сплошная линия) в осях P, Q, ξ° (где

$$P=T/\sigma_t H;\quad Q=qR/\sigma_t H;\quad \xi^0=f^0/H).$$

Расчет проведен на ЭЦВМ БЭСМ-4. Программа составлена на языке АЛГОЛ-60.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutchinson J. W. On the postbucling behaviour of imperfection-sensitive structures in the plastic range. Journ. of Appl. Mech. Trans. of ASME, ser. E, 1972, v. 39, № 2. (Перевод: Прикладная механика, 1972, № 2, с. 356—364).

2. Onat E., Drucker D. Ine lastic instability and incremental theories of plasticity. Journ. of Aerospace Sci., v. 20, 1953, pp. 181—186 (Перевод: Сб. переводов. «Механика», 1955, № 3, с. 81—89).

3. **Зубчанинов В. Г.** О понятии пластической устойчивости и неустойчивости и некоторые проблемы неупругой устойчивости конструкций.—В сб.: Механика сплошных сред. Тула, 1973, с. 61—72. (Тульский политехнический ин-т).

4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.

5. **Петров В. В.** Исследование конечных прогибов пластин и пологих оболочек методом последовательных нагружений. — В кн.: Теория пластин и оболочек. Киев, изд-во АН СССР, 1962, с. 328—331.

6. **Петров В. В.** К вопросу расчета пластинок и пологих оболочек с учетом физической и геометрической нелинейности. — В сб.: Механика деформируемых сред. Изд-во Саратовского госуниверситета, 1974, вып. 1, с. 123—130.

7. **Сорокин В. В.** Упругопластический изгиб и устойчивость круговой цилиндрической оболочки с начальными неправильностями формы. — «Изв. АН СССР. Механика». 1965, № 3, с. 114—118.

8. **Сорокин В. В.** Приближенный метод исследования больших прогибов и несущей способности упругопластических оболочек. — МТТ, 1966, № 4, с. 81—87.

9. **Рикардс Р. Б., Браунс Я. А.** Исследование форм выпучивания полимерных цилиндрических оболочек при длительном нагружении. — Механика полимеров», 1971, № 2.

10. **Биргер И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности.—ПММ, 1951, т. 15, в. 6, с. 765—770.

11. **Григолюк Э. И.** О выпучивании оболочек за пределом упругости. — «Изв. АН СССР. ОТН», 1957, № 10, с. 3—9.

12. **Евсеева М. П.** Влияние остаточных напряжений на устойчивость замкнутой круговой цилиндрической оболочки под действием всестороннего внешнего давления. — В сб.: Расчет пространственных конструкций, М., Стройиздат, 1967, с. 153—170.

УДК 539—3

О. Д. Горбенко, Т. Д. Семыкина

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предлагается численный метод расчета осесимметричного деформирования вязкопластической оболочки вращения с произвольным видом меридиана на основе вариационного принципа Ильюшина-Прагера [1, 2].

Рассмотрим оболочку, выполненную из материала, свойства которого описываются зависимостью [1]:

$$\sqrt{I'_2} = k + 2\tau_1 \sqrt{\dot{I}'_2},$$

где $I'_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$, $\dot{I}'_2 = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$;