

К. Ф. Черных

**ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА****ОБЩАЯ ТЕОРИЯ**

Усложнение инженерных конструкций и стремление сделать их предельно экономными, повышение требований к точности расчета, создание конструктивных материалов со все более разнообразными свойствами, расширение возможностей расчета (ЭВМ). — все это стимулирует внимание к разработке нелинейной механики твердого деформируемого тела.

Появилось много книг и необозримое море журнальной литературы, в которой с разных точек зрения рассматриваются вопросы теории. Исследователь, приступающий к систематическому изучению современной теории нелинейной механики твердого деформируемого тела, сталкивается с двумя, зачастую непреодолимыми, трудностями. Первая состоит в отсутствии канонических представлений основных зависимостей и установившейся терминологии. Поэтому сопоставление результатов из разных работ — задача чрезвычайно трудоемкая даже для квалифицированного читателя. Вторая трудность состоит в сложности используемого математического аппарата, незнакомого подчас и механикам университетского толка.

Все это автор прочувствовал на себе. Многолетнее изучение литературы, собственные изыскания и беседы с В. В. Новожиловым сформировали у него определенную точку зрения на предмет, методы и адекватность математического аппарата механики деформируемого тела.

Настоящую статью следует рассматривать как попытку дать краткое систематическое изложение избранных вопросов теории. В разной степени в изложении нашли отражение работы советских ученых Л. И. Седова [1], А. А. Ильюшина [2], А. И. Лурье [3], К. З. Галимова [4] и др. Многие из результатов получены В. В. Новожиловым [5—9], работы которого во многом определили направление развития механики деформируемых тел. В статье (особенно в § 9—12) излагаются и результаты зарубежных исследований (Трусделл [10], Коллеман [11, 12], Хилл

[13, 14] и др.). Естественно, что в статье нашли отражение работы автора [15—18] и некоторые еще неопубликованные результаты.

Объем статьи не позволяет остановиться на многих важных вопросах. Прежде всего — это теория анизотропных функций. Автор надеется изложить этот и некоторые другие вопросы теории, а также приложения в следующей публикации.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

Приведем некоторые основные зависимости тензорного анализа, необходимые в дальнейшем [19]—[21]. Пусть $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ — криволинейные координаты, $R = R(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ — радиус-вектор точки пространства; $\underline{R}_i = \partial R / \partial \Theta^i$ ($i=1, 2, 3$) — векторы ковариантного (основного) координатного базиса, а \underline{R}^j ($j=1, 2, 3$) — векторы контравариантного (взаимного) координатного базиса, связанные между собой соотношениями

$$\underline{R}^j \cdot \underline{R}_i = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & \text{при } i=j. \end{cases} \quad (1.1)$$

При переходе к новой (штрихованной) системе координат $\Theta^{i'} = \Theta^{i'}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$; $\Theta^j = \Theta^j(\Theta^{1'}, \Theta^{2'}, \Theta^{3'})$ координатные векторы пересчитываются по формулам¹:

$$\underline{R}_{i'} = \frac{\partial \Theta^{\alpha}}{\partial \Theta^{i'}} \underline{R}_{\alpha}; \quad \underline{R}^{i'} = \frac{\partial \Theta^{i'}}{\partial \Theta^{\alpha}} \underline{R}^{\alpha}. \quad (1.2)$$

По аналогии с разложением вектора $u = u^{\alpha} R_{\alpha} = u_{\alpha} R^{\alpha}$ тензоры будем представлять в, так называемой, **прямой записи** (в разложениях по координатным полядам)

$$\underline{T} = \underline{T}^{\alpha\beta\gamma\dots} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\beta} \underline{R}_{\gamma} \dots \quad (1.3)$$

Количество индексов у компонент определяет **ранг** тензора; число значений, принимаемых каждым индексом, — **порядок** тензора. Компоненты с верхними индексами называют **контравариантными**, с нижними — **ковариантными**, с теми и другими — **смешанными**. Компоненты тензора при переходе к новой системе координат пересчитываются по формулам:

$$\underline{T}^{i'j'k'\dots} = \underline{T}^{\alpha\beta\gamma\dots} \frac{\partial \Theta^{i'}}{\partial \Theta^{\alpha}} \frac{\partial \Theta^{j'}}{\partial \Theta^{\beta}} \frac{\partial \Theta^{k'}}{\partial \Theta^{\gamma}} \dots \quad (1.4)$$

Тензоры, компоненты которых не меняют своих величин при изменении порядка следования пары индексов, называют **симметричными по данной паре индексов**:

¹ Для сокращения записи здесь и ниже принято следующее правило: в выражениях, содержащих повторяющиеся греческие индексы, производится суммирование по ним от 1 до 3. Суммирование по повторяющимся латинским индексам не производится.

$$U_{\dots}^{ij} = U_{\dots}^{ji}, \quad U_{\dots}^{i..} = U_{\dots}^{.i.}, \quad U_{\dots}^{...} = U_{\dots}^{...}. \quad (1.5)$$

Тензор называют **симметричным**, если сказанное относится к любой паре индексов. В компонентах симметричного тензора точки, показывающие порядок следования индексов, опускаются за ненадобностью.

Кососимметричными по паре индексов называют тензоры, компоненты которых меняют знак при изменении порядка следования выделенной пары индексов:

$$V_{\dots}^{ij} = -V_{\dots}^{ji}; \quad V_{\dots}^{i..} = -V_{\dots}^{.ji}, \quad V_{\dots}^{...} = -V_{\dots}^{...}. \quad (1.6)$$

Тензор можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной частей по данной паре индексов. Например:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (W_{ij} + W_{ji}) + \frac{1}{2} (W_{ij} - W_{ji}). \quad (1.7)$$

Пусть U_{\dots}^{ij} и V_{\dots}^{lm} — компоненты двух тензоров произвольных рангов. Тогда величины

$$W_{\dots lm}^{ij} = U_{\dots}^{ij} V_{\dots}^{lm} \quad (1.8)$$

являются компонентами тензора с рангом, равным сумме рангов тензоров, компоненты которых перемножаются. Полученный тензор называют **тензорным произведением** тензоров.

Пусть U_{am}^{ijk} — компоненты некоторого тензора. Просуммируем компоненты по индексам $i=l=\alpha$ от 1 до 3. Величины $U_{am}^{\alpha jk}$ стали компонентами тензора рангом на две единицы меньше исходного. Повторное суммирование по верхнему и нижнему индексам понизит ранг тензора еще на две единицы. Описанная операция называется **сверткой** тензора. Индексы, по которым проведено суммирование, называют **немыми**, остальные — **свободными**. Свертку можно производить до тех пор, пока остаются разноименные (верхние и нижние) индексы. Свертка по разным парам разноименных индексов приводит к различным тензорам одинакового ранга. Например, $U_{\alpha k}^{i\alpha}$ и $U_{\alpha k}^{i\alpha}$ компоненты разных тензоров первого ранга (векторов).

Свернем произведение тензоров (1.8)

$$W_{\dots m}^{\alpha i \dots} = U_{\dots}^{\alpha i} V_{\dots m} \quad (1.9)$$

Из того, что множители правой части являются компонентами тензоров, следует, что величины слева являются компонентами тензора, ранг которого на две единицы меньше суммы рангов перемножаемых тензоров. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть из того, что W_{\dots} и V_{\dots} компоненты тензоров, не следует, что U_{\dots} — компоненты тензора. Справедливо, однако, следующее *свойство*: если в произведении (1.9) W_{\dots} — компоненты тензора, а V_{\dots} — компоненты выписанного типа **произвольного**

тензора данного ранга, то U_{\dots}^{\dots} — компоненты тензора. Справедливо также *утверждение*: в равенстве

$$\frac{\partial u}{\partial \theta^j} = U_{j^{\alpha}} \underline{R}^{\alpha} = U_j^{\alpha} \underline{R}_{\alpha} \quad (1.10)$$

в силу линейной независимости координатных векторов \underline{R}^j , \underline{R}_i величины U_{jk} и U_j^i являются, соответственно, ковариантными и смешанными компонентами тензора второго ранга.

Со сверткой тензоров связано еще одно *свойство*: пусть $U_{\dots}^{\dots ij \dots}$ и $V_{\dots}^{\dots ij \dots}$ — компоненты, соответственно, симметричного и кососимметричного по выписанной паре индексов тензоров. Можно утверждать, что

$$U_{\dots}^{\dots \alpha \beta \dots} V_{\dots}^{\dots \alpha \beta \dots} = 0. \quad (1.11)$$

Компоненты **метрического** (фундаментального) тензора вводятся равенствами:

$$G_{ij} = \underline{R}_i \cdot \underline{R}_j; \quad G^{ij} = \underline{R}^i \cdot \underline{R}^j; \quad G_j^i = \underline{R}^i \cdot \underline{R}_j = \delta_j^i. \quad (1.12)_1$$

Сам же тензор записывается в виде

$$\underline{G} = G_{\alpha\beta} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta} = G^{\alpha\beta} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\beta} = \underline{R}_{\alpha} \underline{R}^{\alpha} = \underline{R}^{\alpha} \underline{R}_{\alpha}. \quad (1.12)_2$$

Компоненты метрического тензора позволяют связать компоненты с ко- и контравариантными индексами:

$$U_{\dots}^i{}_{\dots} = G^{i\alpha} U_{\dots}^{\alpha}{}_{\dots} = G_{j\beta} U_{\dots}^{i\beta}{}_{\dots} \quad \text{и т. п.} \quad (1.13)$$

Это позволяет производить опускание и поднятие (жонглирование) чужих и свободных индексов. Например:

$$U_{\dots}^i{}_{\dots} = U_{\dots}^i{}_{\dots}$$

$$\text{Из } W_{\dots}^i{}_{\dots} = U_{\dots}^i{}_{\dots} V_{\dots}^{\dots}{}_{\dots} \text{ следует } W_{\dots}^i{}_{\dots} = U_{\dots}^i{}_{\dots} V_{\dots}^{\dots}{}_{\dots} \quad (1.15)$$

Дискриминантный тензор имеет следующие компоненты:

$$\mathcal{E}_{ijk} = \underline{R}_i \cdot (\underline{R}_j \times \underline{R}_k); \quad \mathcal{E}^{ijk} = \underline{R}^i \cdot (\underline{R}^j \times \underline{R}^k), \quad (1.16)$$

связанные с определителем (**дискриминантом**) метрического тензора

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{123} = \mathcal{E}_{321} = \mathcal{E}_{312} = -\mathcal{E}_{213} = -\mathcal{E}_{132} = -\mathcal{E}_{321} = \sqrt{G}; \\ \mathcal{E}^{123} = \mathcal{E}^{321} = \mathcal{E}^{312} = -\mathcal{E}^{213} = -\mathcal{E}^{132} = -\mathcal{E}^{321} = 1/\sqrt{G}; \\ (\mathcal{E}^{ik} = \mathcal{E}_{ik} = \mathcal{E}^{ii} = \mathcal{E}_{ii} = 0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.16) следует:

$$\underline{R}_i \times \underline{R}_j = \partial_{ij\gamma} \underline{R}^\gamma; \quad \underline{R}^i \times \underline{R}^j = \partial^{ij\gamma} \underline{R}_\gamma. \quad (1.19)$$

Знание метрического и дискриминантного тензоров позволяет производить различные метрические операции в криволинейных координатах. Так, квадрат элемента дуги равен

$$ds^2 = G_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (1.20)$$

В частности, для элемента дуги i -ой координатной линии

$$ds_i = \sqrt{G_{ii}} d\theta^i. \quad (1.21)$$

Если $(d\theta^1, d\theta^2, d\theta^3)$ и $(\delta\theta^1, \delta\theta^2, \delta\theta^3)$ — компоненты элементов, касательных к двум пересекающимся кривым, то угол между ними подсчитывается по формуле

$$\cos \chi = \frac{G_{\alpha\beta} d\theta^\alpha \delta\theta^\beta}{\sqrt{G_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta} \sqrt{G_{\alpha\beta} \delta\theta^\alpha \delta\theta^\beta}}. \quad (1.22)$$

В частности, для угла между i -ой и j -ой координатными линиями ($i \neq k \neq j$)

$$\cos \chi^{(k)} = \frac{G_{ij}}{\sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}}}. \quad (1.23)$$

Элемент объема и площадь i -ой координатной площадки равны

$$dV = \sqrt{G} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3; \quad dS_{(i)} = \sqrt{GG^{ii}} \frac{d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3}{d\theta^i}. \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

Рассмотрим тетраэдр (рис. 1) с площадью основания dS_n и единичным вектором нормали к нему — \underline{n} . Справедливы следующие формулы:

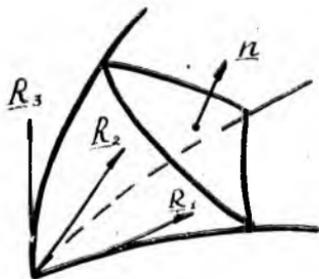


Рис. 1

$$\underline{n} dS_n = \frac{R^\alpha}{\sqrt{G^{\alpha\alpha}}} dS_{(\alpha)}; \quad (1.26)$$

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{G^{ii}}} \frac{dS_{(i)}}{dS_n}. \quad (1.27)$$

Вернемся к прямой записи тензоров (1.3). Пусть, например,

$$\underline{T} = T^{\alpha\gamma} \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta \underline{R}^\gamma; \quad \underline{S} = S^{\mu\nu\rho} \underline{R}^\mu \underline{R}_\nu \underline{R}^\rho.$$

Тензорное произведение тензоров образуется объединением по-
рядков

$$\underline{TS} = T^{\alpha\gamma} S^{\mu\nu\rho} \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta \underline{R}^\gamma \underline{R}^\mu \underline{R}_\nu \underline{R}^\rho. \quad (1.28)$$

При этом важен порядок следования тензоров, так, что $\underline{TS} \neq \underline{ST}$.

При скалярном и векторном произведениях тензоров соответствующие операции производятся над примыкающими векторами обеих поляд. Так (1.19),

$$\begin{aligned} \underline{T} \cdot \underline{S} &= T^{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\rho} R_{\alpha} R_{\beta} (R^{\gamma} \cdot R^{\mu}) R_{\nu} R^{\rho} = \\ &= T^{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\rho} G^{\gamma\mu} R_{\alpha} R_{\beta} R_{\nu} R^{\rho} = T^{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\rho} R_{\alpha} R_{\beta} R_{\nu} R^{\rho}; \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \underline{T} \times \underline{S} &= T^{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\rho} R_{\alpha} R_{\beta} (R^{\gamma} \times R^{\mu}) R_{\nu} R^{\rho} = \\ &= T^{\alpha\beta\gamma} S_{\mu\nu\rho} \Theta^{\gamma\mu} R_{\alpha} R_{\beta} (R_{\rho}) R_{\nu} R^{\rho}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Так же образуются многократные скалярные произведения

$$\begin{aligned} \underline{T} \cdot \underline{S} &= T^{\alpha\beta\mu} S_{\nu\gamma\rho} R_{\alpha} (R_{\beta} \cdot R_{\nu}) R^{\rho} = T^{\alpha\beta\mu} S_{\nu\gamma\rho} R_{\alpha} R^{\rho}; \\ \underline{T} \times \underline{S} &= T^{\alpha\beta\mu} S_{\nu\gamma\rho} (R_{\alpha} \cdot R^{\rho}) = T^{\alpha\beta\mu} S_{\nu\gamma\rho}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

По определению, для тензора второго ранга

$$\underline{U} = U^{\alpha\beta} R_{\alpha} R_{\beta} = U^{\alpha}_{\beta} R_{\alpha} R^{\beta} = \underline{U}^{\alpha}_{\beta} R^{\alpha} R_{\beta} = U^{\alpha\beta} R^{\alpha} R^{\beta} \quad (1.32)_1$$

сопряженным является тензор \underline{T}^* с компонентами

$$U^*_{ij} = U_{ji}; \quad U^{i*} = U^{ji}; \quad U^*_{j^i} = U_i^i; \quad U^{*j^i} = U_j^i. \quad (1.32)_2$$

Для вектора \underline{a} справедливы соотношения

$$(\underline{U} \cdot \underline{V} \cdot \dots \cdot \underline{W})^* = \underline{W}^* \cdot \dots \cdot \underline{V}^* \cdot \underline{U}^*; \quad (1.33)$$

$$\underline{U} \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{U}^*; \quad \underline{U}^* \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{U}. \quad (1.34)$$

Для симметричного и кососимметричного тензоров, соответственно,

$$\underline{U}^* = \underline{U} \quad \text{и} \quad \underline{V}^* = -\underline{V}. \quad (1.35)$$

В механике сплошных сред широко используется ковариантное дифференцирование. Ковариантную производную будем обозначать символом ∇_i . Для компоненты тензора произвольного ранга (1.3)

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{j^k} \dots = & \partial T^{j^k} \dots / \partial \Theta^i + G^i_{\alpha} T^{\alpha k} \dots + \\ & + G^i_{\alpha} T^{j^{\alpha}} \dots - G^{\alpha}_{li} T^{j^k} \dots \pm \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь

$$G^i_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{j\alpha}}{\partial \Theta^i} + \frac{\partial G_{i\alpha}}{\partial \Theta^j} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial \Theta^{\alpha}} \right) G^{\alpha l} = \quad (1.37)$$

символы Христовеля 2-го рода. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \nabla_i R_j &= 0; \quad \nabla_i R^j = 0; \\ \nabla_k G_{ij} &= 0; \quad \nabla_k G^j_i = \nabla_k \delta^j_i = 0; \quad \nabla_k G^{ij} = 0; \\ \nabla_k \Theta_{ijh} &= 0; \quad \nabla_k \Theta^{ijh} = 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

показывающие, что при ковариантном дифференцировании координатные векторы, компоненты метрического и дискриминантного тензоров можно рассматривать как постоянные величины. В трехмерном евклидовом пространстве можно менять порядок ковариантного дифференцирования

$$\nabla_k \nabla_j U^{i..l..m..} = \nabla_j \nabla_k U^{i..l..m..}$$

В тензорном анализе широко используется вектор «набла»

$$\underline{\nabla} = \underline{R}^\alpha \nabla_\alpha,$$

с помощью которого можно придать компактный вид различным дифференциальным и интегральным операциям. С учетом того, что ковариантная производная инварианта равна его частной производной,

$$\begin{aligned} \underline{\text{grad}} \varphi &\equiv \underline{\nabla} \varphi = (\nabla_\alpha \varphi) \underline{R}^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta^\alpha} \underline{R}^\alpha; \\ \underline{\text{grad}} \underline{u} &\equiv \underline{\nabla} \underline{u} = (\nabla_\alpha u_\beta) \underline{R}^\alpha \underline{R}^\beta; \\ \underline{\text{grad}} \underline{T} &\equiv \underline{\nabla} \underline{T} = (\nabla_\mu T^{\alpha.. \beta.. \gamma.. \delta..}) \underline{R}^\mu \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta \underline{R}_\gamma \underline{R}_\delta \dots; \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\text{div} \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \nabla_\alpha u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial (\sqrt{G} u^\alpha)}{\partial \theta^\alpha};$$

$$\text{div} \underline{T} \equiv \underline{\nabla} \cdot \underline{T} = (\nabla_\alpha T^{\alpha.. \beta.. \gamma.. \delta..}) \underline{R}_\beta \underline{R}_\gamma \dots \quad (1.42)$$

$$\underline{\text{rot}} \underline{u} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{u} = \mathfrak{E}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha u_\beta \underline{R}_\gamma = 1/2 \mathfrak{E}^{\alpha\beta\gamma} \omega_{\beta\alpha} \underline{R}_\gamma$$

$$\left(\omega_{ij} = \nabla_j u_i - \nabla_i u_j = \frac{\partial u_i}{\partial \theta^j} - \frac{\partial u_j}{\partial \theta^i} \right); \quad (1.43)$$

$$\underline{\text{rot}} \underline{T} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{T} = \mathfrak{E}^{\alpha\gamma\delta} (\nabla_\alpha T_{\gamma.. \delta.. \beta..}) \underline{R}_\gamma \underline{R}_\delta \underline{R}_\beta \dots$$

Пусть V — некоторый объем, ограниченный поверхностью S с единичным вектором нормали \underline{n} . Имеет место формула Гаусса — Остроградского для тензоров, векторов и скаляров:

$$\begin{aligned} \int_V \underline{\text{grad}} \underline{T} dV &\equiv \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{T} dV = \int_S \underline{n} \underline{T} dS_n; \\ \int_V \text{div} \underline{T} dV &\equiv \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{T} dV = \int_S \underline{n} \cdot \underline{T} dS_n; \\ \int_V \underline{\text{rot}} \underline{T} dV &\equiv \int_V \underline{\nabla} \times \underline{T} dV = \int_S \underline{n} \times \underline{T} dS_n; \\ \int_V \underline{\text{grad}} \underline{u} dV &\equiv \int_V \underline{\nabla} \underline{u} dV = \int_S \underline{n} \underline{u} dS_n; \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} \underline{u} dV &\equiv \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dV = \int_V \nabla_\alpha u^\alpha dS_n = \int_V \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial (\sqrt{G} u^\alpha)}{\partial \theta^\alpha} dV = \\ &= \int_S \underline{n} \cdot \underline{u} dS_n = \int_S n_\alpha u^\alpha dS_n; \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$\int_v \operatorname{rot} \underline{u} dV \equiv \int_v \underline{\nabla} \times \underline{u} dV = \int_s \underline{n} \times \underline{u} dS_n;$$

$$\int_v \operatorname{grad} \varphi dV \equiv \int_v \underline{\Delta} \varphi dV = \int_s \varphi \underline{n} dS_n. \quad (1.46)$$

Пусть \underline{t} — некоторый единичный вектор. Производная в направлении \underline{t} подсчитывается по формулам:

$$\frac{d\varphi}{ds_t} = \underline{t} \cdot \underline{\Delta} \varphi; \quad \frac{du}{ds_t} = \underline{t} \cdot \underline{\nabla} u; \quad \frac{dT}{ds_t} = \underline{t} \cdot \underline{\nabla} T.$$

В механике деформируемых тел часто используют ортогональные координаты, в которых

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 0; \quad G^{12} = G^{23} = G^{13} = 0;$$

$$G^{11} = 1/G_{11}, \quad G^{22} = 1/G_{22}; \quad G^{33} = 1/G_{33};$$

$$G = G_{11} G_{22} G_{33};$$

$$G_{ii}^i = \frac{1}{1G_{ii}^i} \frac{\partial G_{ii}}{\partial \Theta^i}; \quad G_{ij}^i = \frac{1}{2G_{ii}} \frac{\partial G_{,i}}{\partial \Theta^j}; \quad G_{ji}^i = -\frac{1}{2G_{ii}} \frac{\partial C_{jj}}{\partial \Theta^i};$$

$$G_{jk}^i = 0. \quad (i \neq j \neq k \neq i)$$

Вводятся орты

$$\underline{e}_i = \underline{R}^i \sqrt{G_{ii}} = \underline{R}_{,i} \sqrt{G_{ii}}.$$

Компоненты тензоров (векторов) во введенном ортонормированном базисе называют физическими компонентами и заключают в круглые скобки. Так, для тензора второго ранга

$$\underline{U} = U_{(\alpha\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta;$$

$$U_{(ij)} = U_{ij} \sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}} = U_i^i \sqrt{G_{jj}} \sqrt{G_{ii}} =$$

$$= U^i_j \sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}} = U^{ij} \sqrt{G_{ii}} \sqrt{G_{jj}}.$$

В частности,

$$G_{(11)} = G_{(22)} = G_{(33)} = 1; \quad G_{(12)} = G_{(23)} = G_{(13)} = 0;$$

$$\mathfrak{A}_{(123)} = \mathfrak{A}_{(231)} = \mathfrak{A}_{(312)} = -\mathfrak{A}_{(321)} = -\mathfrak{A}_{(213)} = -\mathfrak{A}_{(132)} = -1;$$

$$\mathfrak{A}_{(iik)} = \mathfrak{A}_{(iii)} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Приведем формулы пересчета физических компонент при переходе от старого ортонормированного базиса — \underline{e}_i к новому — $\underline{e}_{i'}$. Пусть

$$\underline{e}_{j'} = \underline{e}_i l_{ij'}, \quad (1.52)$$

где l_{ij} — косинус угла между i -м старым и j -м новым ортами. Тогда

$$u_{(i')} = u_{(i)} l_{ii}; \quad T_{(i'j', k')} = T_{(\alpha\beta\gamma)} l_{\alpha i} l_{\beta j} \dots l_{\gamma k}. \quad (1.53)$$

§ 2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ТЕНЗОРА ВТОРОГО РАНГА

Кратко изложим теорию полиномиальных функций тензора второго ранга (функции от матриц) [22], [1]. Наиболее употребительными для тензора второго ранга являются **главные инварианты**

$$I_T = T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3};$$

$$II_T = \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.3} \end{vmatrix};$$

$$III_T = \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

и, так называемые, **моменты** (1-го, 2-го и 3-го порядков)

$$I_T = T^{\alpha}_{. \alpha}; \quad II_T = T^{\alpha}_{. \beta} T^{\beta}_{. \alpha}; \quad III_T = T^{\alpha}_{. \beta} T^{\beta}_{. \gamma} T^{\gamma}_{. \alpha}, \quad (2.2)$$

связанные между собой соотношениями:

$$I_T = I_T; \quad II_T = I_T^2 - 2III_T; \quad III_T = I_T^3 - 3I_T II_T + 3III_T. \quad (2.3)$$

В зависимости

$$\underline{T} \cdot \underline{a} = \underline{t} \underline{a} \quad (2.4)$$

\underline{a} — **главный (собственный) вектор**, число \underline{t} — **главное значение** (характеристическое или собственное число) тензора. Главные значения являются корнями **характеристического уравнения**

$$t^3 - I_T t^2 + II_T t - III_T = 0. \quad (2.5)$$

В силу вещественности инвариантов, один корень всегда вещественен, а два других либо вещественны, либо комплексно сопряжены. Сопряженный тензор \underline{T}^* имеет те же главные значения, а значит, и инварианты.

В случае трех вещественных главных значений, главные векторы взаимно ортогональны. Нормируя их, приходим к ортонормированному **главному векторному базису**: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$. В нем тензор имеет **каноническое (простейшее) представление**

$$\underline{T} = t_{(1)} \underline{e}_1 \underline{e}_1 + t_{(2)} \underline{e}_2 \underline{e}_2 + t_{(3)} \underline{e}_3 \underline{e}_3 \quad (2.6)$$

$t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}$ — вещественны).

Рассматриваемый случай соответствует **симметричному** тензору. Если $t_{(2)} = t_{(1)}$ имеем дело с **тензором вращения** (с осью \underline{e}_3).

При $t_{(1)} = t_{(2)} = t_{(3)}$ **тензор шаровой**.

Кососимметричному тензору \underline{K} соответствуют

$$\underline{K} = \omega (\underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1); \quad (2.7)$$

$$k_{(1)} = i\omega; \quad k_{(2)} = -i\omega; \quad k_{(3)} = 0.$$

Ортогональным называют тензор, обладающий свойством

$$\underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^* = \underline{G}. \quad (2.8)$$

Для него

$$\underline{Q} = \cos \omega (\underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2) + \sin \omega (\underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1) + \underline{e}_3 \underline{e}_3;$$

$$q_{(1)} = e^{i\omega}, \quad q_{(2)} = e^{-i\omega}; \quad q_{(3)} = \pm 1. \quad (2.9)$$

При этом (+) соответствует ортогональному тензору **первого рода** (поворот вокруг оси \underline{e}_3 на угол ω), а (-) — ортогональному тензору **второго рода** (тот же поворот, но с отражением в плоскости $\underline{e}_1 \underline{e}_2$).

Для невырожденного тензора \underline{T} (то есть для тензора с $\underline{T} = III_T \neq 0$) можно ввести **обратный** тензор \underline{T}^{-1} , такой, что

$$\underline{T} \cdot \underline{T}^{-1} = \underline{T}^{-1} \cdot \underline{T} = \underline{G}. \quad (2.10)$$

Справедливо **правило цепочки**

$$(\underline{T} \cdot \underline{S} \cdot \dots \cdot \underline{U})^{-1} = \underline{U}^{-1} \cdot \dots \cdot \underline{S}^{-1} \cdot \underline{T}^{-1}. \quad (2.11)$$

Условие ортогональности тензора можно теперь записать и так: $\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^*$.

Тензор второго ранга удовлетворяет **тождеству Гамильтона-Кэли**:

$$\underline{T}^3 - I_T \underline{T}^2 + II_T \underline{T} - III_T \underline{G} = 0, \quad (2.12)$$

позволяющее ему редуцировать (сводить) полином от тензора произвольного порядка к полиному второго порядка. Это в свою очередь позволяет произвольной скалярной функции $f(t)$ поставить в соответствие так называемую полиномиальную функцию тензора \underline{T}

$$\begin{aligned} f(\underline{T}) &= \frac{(\underline{T} - t_{(2)} \underline{G}) \cdot (\underline{T} - t_{(3)} \underline{G})}{(t_{(1)} - t_{(2)}) (t_{(1)} - t_{(3)})} f(t_{(1)}) + \\ &+ \frac{(\underline{T} - t_{(3)} \underline{G}) \cdot (\underline{T} - t_{(1)} \underline{G})}{(t_{(2)} - t_{(3)}) (t_{(2)} - t_{(1)})} f(t_{(2)}) + \\ &+ \frac{(\underline{T} - t_{(1)} \underline{G}) \cdot (\underline{T} - t_{(2)} \underline{G})}{(t_{(3)} - t_{(1)}) (t_{(3)} - t_{(2)})} f(t_{(3)}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

С помощью этой формулы устанавливается, в частности, связь между ортогональным (2.9) и кососимметричным (2.7) тензорами:

$$\underline{Q} = e^{\underline{K}} = \underline{G} \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{K} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{K}^2. \quad (2.14)$$

Произвольный (невырожденный) вещественный тензор может быть представлен в виде следующих **полярных разложений**:

$$\underline{T} = \underline{Q} \cdot \underline{\hat{\Lambda}} = \underline{\hat{\Lambda}} \cdot \underline{Q} \quad (\underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^* = \underline{G}), \quad (2.15)$$

где

$$\underline{\hat{\Lambda}} = \sqrt{\underline{T}^* \cdot \underline{T}} = \underline{\hat{\Lambda}}^*; \quad \underline{\Lambda} = \sqrt{\underline{T} \cdot \underline{T}^*} = \underline{\Lambda}^* -$$

положительно-определенные (то есть с положительными главными значениями) симметричные тензоры, связанные соотношением

$$\underline{\Lambda} = \underline{Q} \cdot \underline{\hat{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^*. \quad (2.16)$$

Введем в рассмотрение ортогональный тензор поворота $L = l_{23} \underline{e}_2 \underline{e}_3$ с компонентами

$$l_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_{j'}, \quad (2.17)$$

где $\underline{e}_i, \underline{e}_{j'}$ — компоненты старого и нового ортонормированных базисов. Положим.

$$L = \| l_{ij} \|; \quad K = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix},$$

где $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3$ — вектор поворота координатного базиса, $\omega = |\underline{\omega}|$. Переходя от тензорных равенств (2.14) к соответствующим матричным, получаем ($\underline{Q} = \underline{L}$)

$$L \equiv \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = \cos \omega \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{\sin \omega}{\omega} \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 \omega_2 & \omega_1 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_2 & \omega_2^2 & \omega_2 \omega_3 \\ \omega_1 \omega_3 & \omega_2 \omega_3 & \omega_3^2 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Отсюда следуют полезные соотношения:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= 1/2 (l_{11} + l_{22} + l_{33} - 1); \\ \lambda_1 &\equiv \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{l_{32} - l_{23}}{2 \sin \omega}; \quad \lambda_2 \equiv \frac{\omega_2}{\omega} = \frac{l_{13} - l_{31}}{2 \sin \omega}; \\ \lambda_3 &\equiv \frac{\omega_3}{\omega} = \frac{l_{21} - l_{12}}{2 \sin \omega}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

При использовании углов Эйлера (рис. 2)

$$L = \| l_{ij} \| = \quad (2.20)$$

$$\begin{vmatrix} -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

Обратному повороту отвечает замена

$$L \rightarrow L^{-1} = L^*, \text{ то есть } \alpha \rightarrow -\beta, \gamma \rightarrow -\gamma, \beta \rightarrow -\alpha. \quad (2.21)$$

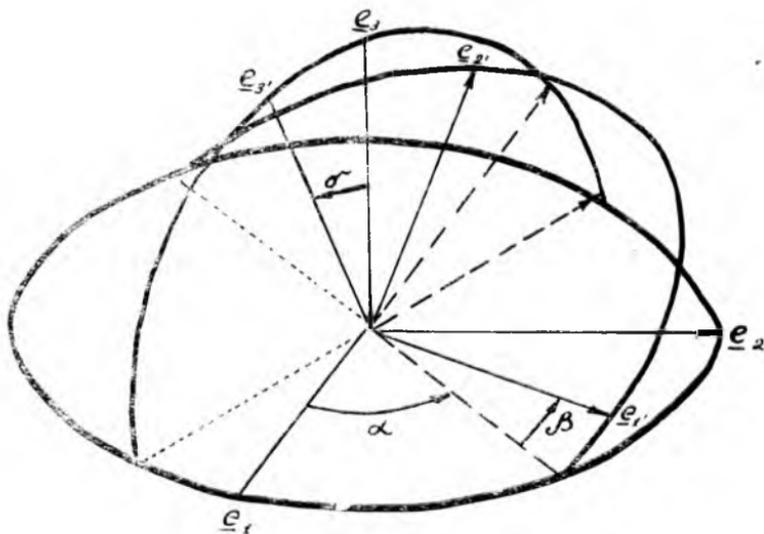


Рис 2

Справедливы также формулы (\underline{a} — произвольный вектор)

$$\begin{aligned} \underline{L} \cdot \underline{a} &= \cos \omega \cdot \underline{a} + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{a} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\underline{\omega} \cdot \underline{a}) \underline{\omega} = \\ &= \underline{a} + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{a} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{a}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Рассмотрим преобразование отражения в плоскости с единичной нормалью \underline{m} . Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \underline{e}_i' &= \underline{L} \cdot \underline{e}_i = (\delta_{i3} - 2m_i m_3) \underline{e}_3; \\ \underline{L} &= (\delta_{\alpha\beta} - 2m_\alpha m_\beta) \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta = \underline{L}^*; \\ \underline{L} \cdot \underline{a} &= \underline{a} - 2(\underline{m} \cdot \underline{a}) \underline{m}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Формулы (2.22), (2.23) преобразуют вектор a в вектор $b = L \cdot a$ одного и того же пространства.

С другой стороны, рассматривая L как преобразование изменения пространственной системы отсчета, то есть перехода от одного пространства к другому. В этом случае $a' = L \cdot a$ — один и тот же вектор, но в другой системе отсчета (в другом пространстве).

§ 3. СИММЕТРИЧНЫЙ ТЕНЗОР ВТОРОГО РАНГА. ЕГО ИНВАРИАНТЫ. ТЕНЗОРНЫЕ БАЗИСЫ. РЕГУЛЯРНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ И ГРАДИЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ КРИВЫЕ

Симметричный тензор второго ранга A в своих главных осях имеет (2.6) следующее каноническое представление:

$$A = a_{(1)} \underline{e}_1 \underline{e}_1 + a_{(2)} \underline{e}_2 \underline{e}_2 + a_{(3)} \underline{e}_3 \underline{e}_3. \quad (3.1)$$

При этом главные значения связаны с инвариантами тензора зависимостями (2.1)

$$I_A = a_{(1)} + a_{(2)} + a_{(3)}; \quad II_A = a_{(1)} a_{(2)} + a_{(2)} a_{(3)} + a_{(3)} a_{(1)};$$

$$III_A = a_{(1)} a_{(2)} a_{(3)};$$

$$\bar{I}_A = a_{(1)}^2 + a_{(2)}^2 + a_{(3)}^2; \quad \bar{II}_A = a_{(1)}^2 a_{(2)}^2 + a_{(2)}^2 a_{(3)}^2 + a_{(3)}^2 a_{(1)}^2;$$

$$\bar{III}_A = I_A^3 - 3I_A II_A + 3III_A. \quad (3.2)$$

Принято разбивать симметричный тензор на два слагаемых: шаровая часть и девиатор

$$1/3 I_A \underline{G} \quad D_A = (a_{(2)} - 1/3 I_A \delta_{22}) \underline{e}_2 \underline{e}_2. \quad (3.3)$$

Отсюда и из (3.2) следует:

$$I_{D_A} = 0; \quad II_{D_A} = II_A - 1/3 (I_A)^2;$$

$$III_{D_A} = III_A - 1/3 I_A II_A + 2/27 (I_A)^3. \quad (3.4)$$

Главные значения тензора можно представить и так:

$$a_{(1)} = I_A/3 - \vartheta_A \cos \psi_A / \sqrt{6} - \vartheta_A \sin \psi_A / \sqrt{2};$$

$$a_{(2)} = I_A/3 - \vartheta_A \cos \psi_A / \sqrt{6} + \vartheta_A \sin \psi_A / \sqrt{2}; \quad (3.5)$$

$$a_{(3)} = I_A/3 + 2\vartheta_A \cos \psi_A / \sqrt{6},$$

где

$$\vartheta_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(a_{(1)} - a_{(2)})^2 + (a_{(2)} - a_{(3)})^2 + (a_{(3)} - a_{(1)})^2}, \quad (3.6)$$

интенсивность, ψ_A — угол вида тензора A . Согласно (3.2),

$$\Pi_A = 1/3 I_A^2 - 1/2 \theta_A^2;$$

$$\Pi_A = 1/27 I_A^3 - 1/6 I_A \theta_A^2 + (1/3 \sqrt{6}) \theta_A^3 \cos 3 \psi_A; \quad (3.7)$$

$$\Pi_{D_A} = -1/2 \theta_A^2; \quad \Pi_{D_A} = (1/3 \sqrt{6}) \theta_A^3 \cos 3 \psi_A. \quad (3.7)$$

Исходя из ортонормированного векторного базиса

$$\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \quad (\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}), \quad (3.8)$$

построим **первый тензорный базис**

$$\underline{H}_1 = \underline{e}_1 \underline{e}_1; \quad \underline{H}_4 = (\underline{e}_1 \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \underline{e}_1) / \sqrt{2};$$

$$\underline{H}_2 = \underline{e}_2 \underline{e}_2; \quad \underline{H}_5 = (\underline{e}_2 \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \underline{e}_2) / \sqrt{2}; \quad (3.9)$$

$$\underline{H}_3 = \underline{e}_3 \underline{e}_3; \quad \underline{H}_6 = (\underline{e}_3 \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \underline{e}_3) / \sqrt{2}$$

и **второй тензорный базис**

$$\underline{G}_1 = (\underline{H}_1 + \underline{H}_2 + \underline{H}_3) / \sqrt{3}; \quad \underline{G}_4 = \underline{H}_4,$$

$$\underline{G}_2 = (2\underline{H}_3 - \underline{H}_1 - \underline{H}_2) / \sqrt{6}; \quad \underline{G}_5 = \underline{H}_5; \quad (3.10)$$

$$\underline{G}_3 = (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) / \sqrt{2}; \quad \underline{G}_6 = \underline{H}_6.$$

С помощью (3.8) нетрудно убедиться в ортонормированности введенных базисов

$$\underline{H}_i : \underline{H}_j = \underline{G}_i : \underline{G}_j = \delta_{ij}. \quad (3.11)$$

Введем **композицию** симметричных тензоров A и B

$$\underline{A} \circ \underline{B} = 1/2 (\underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{B} \cdot \underline{A}), \quad (3.12)$$

сопоставляющую двум симметричным тензорам третий. Имеет место таблица композиций компонент введенных тензорных базисов

$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_1 = \underline{H}_1;$	$\underline{H}_2 \circ \underline{H}_2 = \underline{H}_2;$	$\underline{H}_3 \circ \underline{H}_3 = \underline{H}_3;$
$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_2 = 0;$	$\underline{H}_2 \circ \underline{H}_3 = 0;$	$\underline{H}_3 \circ \underline{H}_4 = 0;$
$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_3 = 0;$	$\underline{H}_2 \circ \underline{H}_4 = 1/2 \underline{H}_4;$	$\underline{H}_3 \circ \underline{H}_5 = 1/2 \underline{H}_5;$
$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_4 = 1/2 \underline{H}_4;$	$\underline{H}_2 \circ \underline{H}_5 = 1/2 \underline{H}_5;$	$\underline{H}_3 \circ \underline{H}_6 = 1/2 \underline{H}_6;$
$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_5 = 0;$	$\underline{H}_2 \circ \underline{H}_6 = 0;$
$\underline{H}_1 \circ \underline{H}_6 = 1/2 \underline{H}_6;$	$\underline{H}_4 \circ \underline{H}_4 = 1/2 (\underline{H}_1 + \underline{H}_3);$
.	$\underline{H}_5 \circ \underline{H}_5 = 1/2 (\underline{H}_2 + \underline{H}_3);$	$\underline{H}_4 \circ \underline{H}_5 = (\sqrt{2}/4) \underline{H}_6;$
$\underline{H}_6 \circ \underline{H}_6 = 1/2 (\underline{H}_1 + \underline{H}_2);$	$\underline{H}_5 \circ \underline{H}_6 = (\sqrt{2}/4) \underline{H}_4;$	$\underline{H}_4 \circ \underline{H}_6 = (\sqrt{2}/4) \underline{H}_5.$

$$(3.13)$$

В разложениях тензора по первому базису

$$\underline{A} = A_\gamma \underline{H}_\gamma \quad (\gamma = 1, \dots, 6);$$

$$A_1 = A_{(11)}; \quad A_2 = A_{(22)}; \quad A_3 = A_{(33)}; \quad (3.17)$$

$$A_4 = \sqrt{2} A_{(12)}; \quad A_5 = \sqrt{2} A_{(23)}; \quad A_6 = \sqrt{2} A_{(13)}$$

а в разложениях по второму базису

$$\underline{A} = A_\gamma \underline{H}_\gamma \quad (\gamma = 1, \dots, 6)$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (A_{(11)} + A_{(22)} + A_{(33)}); \quad A_4 = \sqrt{2} A_{(12)}; \quad (3.18)$$

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2A_{(33)} - A_{(11)} - A_{(22)}); \quad A_5 = \sqrt{2} A_{(23)};$$

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{(22)} - A_{(11)}); \quad A_6 = \sqrt{2} A_{(13)}.$$

Если (3.8) главный векторный базис тензора \underline{A} , то из (3.1), (3.5), (3.9) и (3.10) следуют канонические представления тензора

$$\boxed{\underline{A} = a_{(1)} \underline{H}_1 + a_{(2)} \underline{H}_2 + a_{(3)} \underline{H}_3 =} \\ = (I_A / \sqrt{3}) \underline{G}_1 + \vartheta_A \cos \psi_A \underline{G}_2 + \vartheta_A \sin \psi_A \underline{G}_3 \quad (3.19)$$

Пусть \underline{B} — тензор, соосный с \underline{A} (то есть имеющий с ним общие главные направления), тогда

$$\underline{B} = b_{(1)} \underline{H}_1 + b_{(2)} \underline{H}_2 + b_{(3)} \underline{H}_3. \quad (3.20)$$

Дополняя выражение (3.19) следующими двумя (3.13):

$$\underline{A}^2 = a_{(1)}^2 \underline{H}_1 + a_{(2)}^2 \underline{H}_2 + a_{(3)}^2 \underline{H}_3; \quad \underline{G} = \underline{H}_1 + \underline{H}_2 + \underline{H}_3,$$

получаем из выписанной системы

$$\underline{H}_i = \frac{(A - a_{(j)}) \underline{G} (A - a_{(k)}) \underline{G}}{(a_{(i)} - a_{(j)}) (a_{(i)} - a_{(k)})} \quad (i \neq j \neq k \neq i). \quad (3.21)$$

Подставляя эти выражения в (3.20), получаем

$$\underline{B} = \bar{x}_0 \underline{G} + \bar{x}_1 \underline{A} + \bar{x}_2 \underline{A}^2, \quad (3.22)_1$$

где \bar{x}_i — величины, зависящие от инвариантов тензоров \underline{A} и \underline{B} . Для того, чтобы тензор \underline{B} был полиномиальной функцией тензора \underline{A} , \bar{x}_i следует считать определенными функциями инвариантов только тензора \underline{A} . Компонентной и инвариантной записями (3.22) являются следующие выражения:

$$B_j^i = \bar{x}_0 \delta_j^i + \bar{x}_1 A_j^i + \bar{x}_2 A_j^\alpha A_\alpha^i \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (3.22)_2$$

$$b_{(i)} = \bar{x}_0 + \bar{x}_1 a_{(i)} + \bar{x}_2 a_{(i)}^2 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.22)_3$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда коэффициенты $\bar{\kappa}_i = \kappa_i(a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)})$ — симметричные функции своих аргументов. При этом, согласно (3.22), перестановка

$$a_{(i)} \leftrightarrow a_{(j)} \text{ влечет } b_{(i)} \leftrightarrow b_{(j)}, \quad (3.23)_1$$

а $b_{(k)}$ ($i \neq k \neq j$) сохраняет свою величину. В частности,

$$a_{(i)} = a_{(j)} \text{ влечет } b_{(i)} = b_{(j)}. \quad (3.23)_2$$

Функции, определяемые соотношениями (3.22), в которых κ_i — симметричны по $a_{(k)}$ будем называть **регулярными полиномиальными**. Можно показать, что из условия (3.23)₁ следует симметричность $\bar{\kappa}_i$. Поэтому можно рассматривать (3.23)₁ как **условие регулярности** тензорной полиномиальной функции рассматриваемого вида.

Для невырожденного тензора $\underline{A} / |\underline{A}| = \text{III}_A \neq 0$ из (2.12) $\underline{A}^2 = \text{I}_A \underline{A} - \text{II}_A \underline{G} + \text{III}_A \underline{A}^{-1}$ и, стало быть, разложение (3.22) можно заменить следующими:

$$\underline{B} = \kappa_0 \underline{G} + \kappa_1 \underline{A} + \kappa_{-1} \underline{A}^{-1}; \quad (3.24)$$

$$b_{(i)} = \kappa_0 + \kappa_1 a_{(i)} + \kappa_{-1} a_{(i)}^{-1}.$$

Очевидно и отсюда следуют условия регулярности (3.23).

Пусть $\Phi(A_{ij}^i)$ — некоторый инвариант тензора \underline{A} . Градиентом инварианта Φ по тензору \underline{A} будем называть тензор

$$\frac{d\Phi}{d\underline{A}} = \frac{\partial\Phi}{\partial A_{ij}^i} \underline{R}^i \underline{R}_j. \quad (3.25)$$

В главных осях тензора \underline{A} $A_{ij}^i = \delta_j^i a_{(i)}$ и

$$\frac{d\Phi}{d\underline{A}} = \frac{\partial\Phi}{\partial a_{(1)}} \underline{H}_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{(2)}} \underline{H}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial a_{(3)}} \underline{H}_3. \quad (3.26)$$

Пологая здесь последовательно $\Phi = a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}$, приходим к градиентальной связи между компонентами первого тензорного базиса и инвариантами

$$\underline{H}_1 = \frac{da_{(1)}}{d\underline{A}}, \quad \underline{H}_2 = \frac{da_{(2)}}{d\underline{A}}, \quad \underline{H}_3 = \frac{da_{(3)}}{d\underline{A}}. \quad (3.27)$$

Отсюда и из (3.5), (3.10) следует:

$$\underline{G}_1 = \frac{d|\underline{A}|/\sqrt{3}}{d\underline{A}}; \quad \underline{G}_2 = \frac{d\psi_A \cos \psi_A}{d\underline{A}}; \quad \underline{G}_3 = \frac{d\psi_A \sin \psi_A}{d\underline{A}}. \quad (3.28)$$

Последние две зависимости и (3.19) приводят к любопытным градиентальным представлениям тензора через собственные инварианты

$$\underline{A} = \frac{d \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} I_A^2 + \mathfrak{I}_A^2 \right)}{d\underline{A}} = \frac{d \frac{1}{2} (a_{(1)}^2 + 2^2 + a_{(3)}^2)}{d\underline{A}}. \quad (3.29)$$

Приведем полезные зависимости, следующие из (3.2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_A}{\partial a_{(i)}} = 1; \quad \frac{\partial \Pi_A}{\partial a_{(i)}} = I_A - a_{(i)}; \quad \frac{\partial \Pi \Pi_A}{\partial a_{(i)}} = \Pi \Pi_A / a_{(i)}; \\ \frac{\partial \bar{I}_A}{\partial a_{(i)}} = 1; \quad \frac{\partial \bar{\Pi}_A}{\partial a_{(i)}} = 2a_{(i)}; \quad \frac{\partial \bar{\Pi} \bar{\Pi}_A}{\partial a_{(i)}} = 3a_{(i)}^2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Вернемся к функциональной зависимости между инвариантами (3.22), определяющей тензорную функцию $\underline{B} = \underline{B}(\underline{A})$. Если ввести пространство инвариантов, в котором первый из векторов

$$\underline{a} (a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}); \quad \underline{b} (b_{(1)}, b_{(2)}, b_{(3)}) \quad (3.31)$$

является радиусом-вектором, то (3.22)₃ можно представить в виде вектора-функции

$$\underline{b} = \underline{b}(\underline{a}) \quad (b_{(i)} = b_{(i)}(a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)})). \quad (3.32)$$

Известно [23], [24], что в общем случае вектор-функция может быть представлена в виде

$$\underline{b} = \frac{d\varphi_1}{d\underline{a}} + \varphi_2 \frac{d\underline{\varphi}_3}{d\underline{a}}, \quad (3.33)$$

где $\frac{d\varphi_i}{d\underline{a}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{(1)}}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{(2)}}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_{(3)}} \right)$ — градиент функции φ по вектору.

Векторное равенство можно записать и так:

$$b_{(i)} = \frac{d\varphi_1}{da_{(i)}} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_{(i)}}. \quad (3.34)$$

При этом выполнение условия регулярности (3.23) обеспечивается симметричностью функций $\varphi_i = \varphi_i(a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)})$. Подставляя выражение (3.34) в (3.20) и используя (3.27), получаем

$$\underline{B} = \frac{d\varphi_1}{d\underline{A}} + \varphi_2 \frac{d\underline{\varphi}_3}{d\underline{A}} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{(1)}} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_{(2)}} \right) \underline{H}_\alpha. \quad (3.35)$$

Таким образом, регулярная полиномиальная функция симметричного тензора второго ранга представима в виде суммы градиентальной и квазиградиентальной функций.

Пользуясь же формулами (3.19), (3.21), (3.30) и считая $\varphi_i = \varphi_i(I_A, \Pi_A, \Pi \Pi_A)$ или $\varphi_i = \varphi_i(\bar{I}_A, \bar{\Pi}_A, \bar{\Pi} \bar{\Pi}_A)$, можно получить два часто используемых представления

$$\underline{B} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{I}_A} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{I}_A} \right) \underline{G} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\Pi}_A} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\Pi}_A} \right) \underline{A} + 3 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\Pi}_A} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\Pi}_A} \right) \underline{A}^2 \quad (3.36)$$

$$\underline{B} = \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{I}_A} + I_A \frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\Pi}_A} + \varphi_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{I}_A} + I_A \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\Pi}_A} \right) \right\} \underline{G} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\Pi}_A} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\Pi}_A} \right) \underline{A} + III_A \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\Pi}_A} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \bar{\Pi}_A} \right) \underline{A}^{-1} \quad (3.37)$$

Пусть $\underline{e}_i(t)$ — зависящий от времени ортонормированный векторный базис и t_0 — некоторый фиксированный момент времени. Согласно (1.52),

$$\underline{e}_j(t) = \underline{e}_\alpha(t_0) l_{\alpha j}(t), \quad (3.38)$$

где $l_{ij}(t)$ — косинусы углов поворота, подсчитываемые по углам поворота $\omega_K(t)$ при помощи формул (2.18). Введем в рассмотренные величины

$$\underline{e}_i = \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{d\underline{e}_i(t)}{dt} \right\}; \quad \omega_j = \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \frac{d\omega_j(t)}{dt} \right\}, \quad (3.39)$$

являющиеся **мгновенными скоростями** изменения компонент векторного базиса и поворотов. При этом речь идет о повороте относительно неподвижных осей, вдоль которых в рассматриваемый момент времени $t=t_0$ направлены орты вращающегося базиса (3.38). Дифференцируя по времени выражения (3.38) и полагая в них $t=t_0$ ($\omega_K(t_0)=0$), получаем

$$\underline{e}_1 = \omega_2 \underline{e}_2 - \omega_3 \underline{e}_3; \quad \underline{e}_2 = \omega_1 \underline{e}_3 - \omega_3 \underline{e}_1; \quad \underline{e}_3 = \omega_1 \underline{e}_1 - \omega_2 \underline{e}_2. \quad (3.40)_1$$

Отсюда и из (3.9), (3.10)

$$\underline{H}_j = \underline{H}_\alpha m_{\alpha j}, \quad (3.41)$$

где m_{ij} — компоненты следующей кососимметричной матрицы:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \omega_1 & 0 & \sqrt{2} \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \omega_1 & -\sqrt{2} \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \omega_2 & -\sqrt{2} \omega_1 \\ \sqrt{2} \omega_3 & -\sqrt{2} \omega_3 & 0 & 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ 0 & \sqrt{2} \omega_1 & -\sqrt{2} \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\sqrt{2} \omega_2 & 0 & \sqrt{2} \omega_1 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{array} \quad (3.41)_2$$

$$\underline{G}_j = \underline{G}_\alpha m_{\alpha j}, \quad (3.42)_1$$

где m_{ij} — компоненты следующей кососимметричной матрицы:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \omega_1 & \sqrt{3} \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega_1 & \omega_1 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 2\omega_1 & 0 & -\omega_1 & \omega_1 \\ 0 & \sqrt{3} \omega_1 & -\omega_1 & \omega_2 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & -\sqrt{3} \omega_1 & -\omega_2 & -\omega_1 & \omega_2 & 0. \end{array} \quad (3.42)_2$$

Тензор $\underline{A}(t) = A_\gamma(t) \underline{H}_\gamma(t)$, следуя В. В. Новожилову [9], будем называть **симметричной тензорной кривой**. Дифференцируя его, получаем с учетом (3.36)

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot &= [A_1 + \sqrt{2}(A_6 \omega_2 - A_4 \omega_1)] \underline{H}_1 + \\ &+ [A_2 + \sqrt{2}(A_4 \omega_3 - A_5 \omega_1)] \underline{H}_2 + \\ &+ [A_3 + \sqrt{2}(A_5 \omega_1 - A_6 \omega_2)] \underline{H}_3 + \\ &+ [A_4 + \sqrt{2}(A_1 - A_2) \omega_2 + A_5 \omega_2 - A_6 \omega_1] \underline{H}_4 + \\ &+ [A_5 + \sqrt{2}(A_2 - A_3) \omega_1 + A_6 \omega_1 - A_4 \omega_2] \underline{H}_5 + \\ &+ [A_6 + \sqrt{2}(A_3 - A_1) \omega_2 + A_4 \omega_1 - A_5 \omega_3] \underline{H}_6. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В случае, если ортонормированный векторный базис является главным для симметричной тензорной кривой $\underline{A}(t)$, приведенное выражение упрощается:

$$\underline{A} \cdot = a_{(1)} \underline{H}_1 + a_{(2)} \underline{H}_2 + a_{(3)} \underline{H}_3 + \sqrt{2} \{ (a_{(1)} - a_{(2)}) \omega_1 \underline{H}_4 + (a_{(2)} - a_{(3)}) \omega_1 \underline{H}_5 + (a_{(3)} - a_{(1)}) \omega_2 \underline{H}_6 \}. \quad (3.44)$$

§ 4. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ. МАТЕРИАЛЬНЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КООРДИНАТЫ. ГРАДИЕНТ ДВИЖЕНИЯ

В некоторой пространственной системе отсчета введем криволинейные координаты — $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ и закон движения произвольной материальной точки тела

$$\Theta^i = \Theta^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.1)$$

указывающий, в какой точке пространства в данный момент времени t будет находиться рассматриваемая материальная точка тела. Величины $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, называемые **материальными коорди-**

татами, выделяют (индивидуализируют) материальные точки тела. Проще всего положить

$$\Theta^i = \Theta^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t_0), \quad (4.2)$$

то есть различать материальные точки по их координатам в рассматриваемом пространстве в некоторый фиксированный момент времени t_0 . Однако при рассмотрении специальных теоретических вопросов такое соглашение не всегда удобно. Поэтому в дальнейшем, если нет специальной оговорки, в качестве материальных координат точки будем принимать ее пространственные координаты в некотором **другом** (также трехмерном евклидовом) пространстве, которое будем именовать **отсчетным пространством**. Положение же тела в отсчетном пространстве назовем его **отсчетной конфигурацией**. Аналогично, положение тела в пространстве (в котором рассматривается движение) будем называть его **текущей конфигурацией**.

В сказанном существенно, что введены два независимых пространства. При этом движение (поворот) одного из них никак не влияет на другое. Пусть, например, ракета собрана на Земле. В качестве отсчетной конфигурации ракеты можно принять ее положение на монтажной (земной) площадке. При этом в качестве материальных можно принять декартовы координаты точки в системе отсчета, связанной с монтажной площадкой. Текущую же координату удобно, например, связать с Марсом при облете последнего.

Способ описания движения среды, основанный на задании закона движения (4.1), называют **материальным** (лагранжевым). При этом, как бы следят за движением определенных материальных точек. Часто материальные координаты называют лагранжевыми.

Пространственным (эйлеровым) называют другой способ описания, основанный на задании в рассматриваемой части пространства поля скоростей движения материальных точек

$$\underline{v} = \underline{v}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t).$$

При этом, как бы следят за определенными точками пространства, через которые в разные моменты времени проходят разные материальные точки. Пространственные координаты часто называют эйлеровыми.

Систему уравнений (4.1) можно заменить векторным уравнением движения

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \underline{R}[\overset{\circ}{\Theta}^1(\overset{\circ}{\Theta}^1, \overset{\circ}{\Theta}^2, \overset{\circ}{\Theta}^3; t), \overset{\circ}{\Theta}^2(\overset{\circ}{\Theta}^1, \overset{\circ}{\Theta}^2, \overset{\circ}{\Theta}^3; t), \overset{\circ}{\Theta}^3(\dots)] \equiv \\ &\equiv \underline{R}(\overset{\circ}{\Theta}^1, \overset{\circ}{\Theta}^2, \overset{\circ}{\Theta}^3; t) = \underline{R}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

задающим радиус-вектор движущейся материальной точки. Диф-

ференцирование выписанного тождества по материальным координатам, приводит к равенствам

$$\underline{\dot{R}}_i = \frac{\partial \underline{\dot{R}}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta^2}{\partial \theta^i} = \underline{R}_\alpha \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^i}, \quad (4.4)$$

связывающим **пространственные**

$$\begin{array}{c} \underline{R}_1, \quad \underline{R}_2, \quad \underline{R}_3 \\ \underline{R}^1, \quad \underline{R}^2, \quad \underline{R}^3 \end{array} \left(\begin{array}{l} \underline{R}_i = \partial \underline{R} / \partial \theta^i \\ \underline{R}_i \cdot \underline{R}^j = \delta_i^j \end{array} \right) \quad (4.5)$$

и **материальные**

$$\begin{array}{c} \underline{R}_1, \quad \underline{R}_2, \quad \underline{R}_3 \\ \underline{R}^1, \quad \underline{R}^2, \quad \underline{R}^3 \end{array} \left(\begin{array}{l} \underline{R}_i = \partial \underline{R} / \partial \theta^i \\ \underline{R}^j \cdot \underline{R}_i = \delta_i^j \end{array} \right) \quad (4.6)$$

координатные базисы. Все введенные базисы относятся к точке пространства, занимаемой в данный момент времени t рассматриваемой материальной точкой.

С помощью очевидных тождеств

$$\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^j} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^j} = \delta_i^j$$

(4.4) — (4.6) устанавливаются следующие связи между введенными координатными векторными базисами:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{R}_i = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^i} \underline{R}_\alpha; \quad \underline{R}^j = \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^\alpha} \underline{R}^\alpha; \\ \underline{R}_j = \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^j} \underline{R}_\alpha; \quad \underline{R}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^\alpha} \underline{R}^\alpha. \end{array}} \quad (4.7)$$

В отсчетной конфигурации положение материальной точки зададим радиусом-вектором

$$\underline{R} = \underline{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3), \quad (4.8)$$

которому соответствуют **отсчетные координатные векторные базисы**

$$\begin{array}{c} \underline{R}_1, \quad \underline{R}_2, \quad \underline{R}_3 \\ \underline{R}^1, \quad \underline{R}^2, \quad \underline{R}^3 \end{array} \left(\begin{array}{l} \underline{R}_i = \partial \underline{R} / \partial \theta^i \\ \underline{R}^j \cdot \underline{R}_i = \delta_i^j \end{array} \right). \quad (4.9)$$

Напомним, что в общем случае базисы (4.6) и (4.9) независимы. В случае, если принято соглашение (4.2),

$$\begin{aligned} \underline{\overset{\circ}{R}} &= \underline{\overset{\circ}{R}}(\hat{\Theta}^1, \hat{\Theta}^2, \hat{\Theta}^3; t_0); \quad \underline{\overset{\circ}{R}}_i = \underline{\overset{\circ}{R}}_i(\hat{\Theta}^1, \hat{\Theta}^2, \hat{\Theta}^3; t_0); \\ \underline{\overset{\circ}{R}}^j &= \underline{\overset{\circ}{R}}^j(\hat{\Theta}^1, \hat{\Theta}^2, \hat{\Theta}^3; t_0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

С учетом правила скалярного умножения диад (1.30) и их сопряжения (1.32) введем в рассмотрение тензоры

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{\overset{\circ}{R}}_3 \underline{\overset{\circ}{R}}^3; \quad \underline{F}^* = \underline{\overset{\circ}{R}}^T \underline{\overset{\circ}{R}}_T; \\ \underline{F}^{-1} &= \underline{\overset{\circ}{R}}^T \underline{\overset{\circ}{R}}_T; \quad \underline{F}^{-1*} = \underline{F}^{*-1} = \underline{R}^3 \underline{\overset{\circ}{R}}_3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Первый из них называют **градиентом движения**. С помощью правил скалярного умножения (1.30) проверяется справедливость формул:

$$\begin{aligned} \underline{\overset{\circ}{R}}_i &= \underline{F} \cdot \underline{\overset{\circ}{R}}_i - \underline{\overset{\circ}{R}}_i \cdot \underline{F}^*; \quad \underline{\overset{\circ}{R}}_i = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{R}_i = \underline{R}_i \cdot \underline{F}^{-1*}, \\ \underline{\overset{\circ}{R}}^j &= \underline{F}^{-1*} \cdot \underline{\overset{\circ}{R}}^j = \underline{\overset{\circ}{R}}^j \cdot \underline{F}^{-1}; \quad \underline{\overset{\circ}{R}}^j = \underline{F}^* \cdot \underline{R}^j = \underline{R}^j \cdot \underline{F}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Рассмотрим **материальную частицу**, понимая под ней малую окрестность материальной точки $\hat{\Theta}_i$ — ее центра. Положение произвольной точки материальной частицы относительно ее центра задается вектором

$$d\underline{\overset{\circ}{R}} = \underline{\overset{\circ}{R}}_3 d\hat{\Theta}^3 \quad (4.13)$$

в отсчетной и (4.3)

$$d\underline{R} = \underline{R}_T d\hat{\Theta}^T = \underline{\overset{\circ}{R}}_3 d\hat{\Theta}^3 = d\underline{\overset{\circ}{R}} \quad (4.14)$$

текущей конфигурациях. Из приведенных зависимостей и (4.12) вытекает зависимости

$$d\underline{\overset{\circ}{R}} = \underline{F} \cdot d\underline{\overset{\circ}{R}} \quad (4.15)$$

из коей следует, что \underline{F} определяет изменение во время движения локального (относительно центра) положения точки материальной частицы. Поэтому \underline{F} иногда называют локальным градиентом движения.

Введем векторы-градиенты («наблы»)

$$\underline{\overset{\circ}{\nabla}} = \underline{\overset{\circ}{R}}^T \underline{\overset{\circ}{\nabla}}_T; \quad \underline{\nabla} = \underline{R}^T \nabla_T; \quad \underline{\nabla} = \underline{R}^T \nabla_T \quad (4.16)$$

$$(\underline{\nabla} = \underline{\nabla}; \quad \underline{\nabla} = \underline{F}^{-1*} \cdot \underline{\overset{\circ}{\nabla}}),$$

компонентами которых являются ковариантные производные, подсчитанные, соответственно, в отсчетном, текущем материаль-

ном и пространственном базисах. С учетом того, что применительно к инварианту ковариантная производная превращается в обычную частную производную, выводятся соотношения

$$(\overset{\circ}{\nabla} \underline{\tilde{R}})^* = \underline{F}; \quad (\underline{\nabla} \overset{\circ}{\tilde{R}})^* = \underline{F}^{-1}; \quad (4.17)$$

$$\underline{\overset{\circ}{\nabla}} \underline{\overset{\circ}{R}} = \underline{\nabla} \underline{\tilde{R}} = \underline{\nabla} \underline{R} = \underline{G},$$

первое из которых поясняет смысл тензора \underline{F} .

При соглашении (4.2) введем вектор смещения материальной точки

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{R} - \overset{\circ}{\underline{R}} = \overset{\circ}{u}^{\alpha} \overset{\circ}{\underline{R}}_{\alpha} = \overset{\circ}{u}_{\alpha} \overset{\circ}{\underline{R}}^{\alpha} = \\ &= u^{\alpha} \underline{\tilde{R}}_{\alpha} = u_{\alpha} \underline{R}^{\alpha} = u^{\alpha} \underline{R}_{\alpha} = u_{\alpha} \underline{R}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ковариантное дифференцирование этих зависимостей дает, с учетом (1.38),

$$\underline{R}_i = (\delta_i^{\alpha} + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{u}^{\alpha}) \overset{\circ}{\underline{R}}_{\alpha}; \quad \underline{R}^i = (\delta_i^{\alpha} - \nabla_i u^{\alpha}) \underline{R}_{\alpha}. \quad (4.19)$$

Отсюда и из (4.11) следует еще выражение для \underline{F} :

$$\underline{F} = \underline{G} + (\overset{\circ}{\nabla} \underline{u})^*; \quad \underline{F}^{-1} = \underline{G} - (\nabla \underline{u})^* = \underline{G} - (\nabla \underline{u})^*, \quad (4.20)$$

устанавливающее связь градиента движения с тензорами дисторсии: $\overset{\circ}{\nabla} \underline{u}$ и $\underline{\nabla} \underline{u} = \underline{\nabla} \underline{u}$.

Несколько затяннувшееся всестороннее рассмотрение градиента движения \underline{F} оправдывается той фундаментальной ролью, которую он играет в аналитической теории движения (и деформации) деформируемого тела.

§ 5. МЕРЫ ДЕФОРМАЦИИ.

ДВА ВИДА РАЗБИЕНИЯ ГРАДИЕНТА ДВИЖЕНИЯ. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР ПОВОРОТА

Введем в рассмотрение тензоры:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\varepsilon}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\underline{R}}^{\alpha} \overset{\circ}{\underline{R}}^{\beta}; & \underline{\underline{\varepsilon}}_{ij} &= \underline{\varepsilon}_{ij} = 1/2 (\underline{\tilde{G}}_{ij} - \underline{\tilde{G}}_{ij}); \\ \underline{\underline{\theta}} &= \underline{\theta}_{\alpha\beta} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta}; & \underline{\underline{\theta}}^{ij} &= \underline{\theta}^{ij} = 1/2 (\underline{\tilde{G}}^{ij} - \underline{\tilde{G}}^{ij}); \\ \underline{\underline{\theta}} &= \underline{\theta}^{\alpha\beta} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\beta}; & \underline{\underline{\varepsilon}}^{ij} &= \underline{\varepsilon}^{ij} = 1/2 (\underline{\tilde{G}}^{ij} - \underline{\tilde{G}}^{ij}), \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\varepsilon}^{\alpha\beta} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\beta}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$G_{ij} = \widehat{R}_i \cdot \widehat{R}_j; \quad \widehat{G}^{ij} = \widehat{R}^i \cdot \widehat{R}^j; \quad \mathring{G}_{ij} = \mathring{R}_i \cdot \mathring{R}_j; \quad \mathring{G}^{ij} = \mathring{R}^i \cdot \mathring{R}^j \quad (5.2)$$

компоненты метрического тензора в текущей и отсчетной конфигурациях. Обозначим через

$$ds = |d\widehat{R}|; \quad d\mathring{s} = |d\mathring{R}| \quad (5.3)$$

длины расстояний от произвольной точки частицы до ее центра в текущей и отсчетной конфигурациях. Согласно (4.13), (4.14),

$$ds^2 = \widehat{G}_{\alpha\beta} d\widehat{\Theta}^\alpha d\widehat{\Theta}^\beta; \quad d\mathring{s}^2 = \mathring{G}_{\alpha\beta} d\mathring{\Theta}^\alpha d\mathring{\Theta}^\beta \quad (5.4)$$

и (5.1)

$$1/2 [ds^2 - d\mathring{s}^2] = \varepsilon_{\alpha\beta} d\widehat{\Theta}^\alpha d\mathring{\Theta}^\beta = \Theta_{\alpha\beta} d\widehat{\Theta}^\alpha d\mathring{\Theta}^\beta. \quad (5.5)$$

Деформацией называют относительное изменение расстояний между точками материальной частицы. Из (5.5) усматривается, что задание значений тензоров ε и Θ в центре частицы полностью определяет деформацию последней. Поэтому их (как и $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\Theta}$) называют тензорами деформации. Ниже будет дана классификация тензоров деформации и названы основные из них. Будем называть $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\varepsilon}$ — тензорами деформации Грина, а $\underline{\Theta}$, $\underline{\Theta}$ — тензорами деформации Альманси.

С помощью соотношений (4.11) устанавливаются следующие связи тензоров деформации (5.1) с градиентом движения:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \underline{F} - \underline{G}); & \underline{\Theta} &= \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1*}); \\ \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\underline{F} \cdot \underline{F}^* - \underline{G}); & \underline{\Theta} &= \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{F}^{-1*} \cdot \underline{F}^{-1}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Градиенту движения \underline{F} соответствует (2.15) **полярное разбиеие:**

$$\underline{F} = \underline{Q} \cdot \underline{\Lambda}, \quad (5.7)$$

где

$$\underline{\Lambda} = \sqrt{\underline{F}^* \cdot \underline{F}} = \underline{\Lambda}^*, \quad \underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^* = \underline{G}.$$

Здесь $\underline{\Lambda}$ — симметричный положительно-определенный тензор, а \underline{Q} — ортогональный тензор. Для выяснения геометрического смысла последнего рассмотрим специальный вид движения, при котором $\underline{F} \equiv \underline{Q}$.

Тогда по (4.15) $d\mathring{R} = \underline{Q} \cdot d\mathring{R} = d\mathring{R} \cdot \underline{Q}^*$ и, согласно (5.3),

$$ds^2 = d\mathring{R} \cdot d\mathring{R} = d\mathring{R} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{Q}) \cdot d\mathring{R} = d\mathring{R} \cdot d\mathring{R} = d\mathring{s}^2.$$

Таким образом, рассматриваемый случай отвечает локальному движению без деформации, то есть чистому повороту и тогда \underline{Q} — тензор поворота материальной частицы. Согласно (5.7) и (1.33), (2.11),

$$\underline{F}^* = \underline{\overset{\circ}{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^*; \quad \underline{F}^{-1} = \underline{\overset{\circ}{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}; \quad \underline{F}^{-1*} = \underline{F}^{*-1} = \underline{Q} \cdot \underline{\overset{\circ}{\Lambda}}^{-1}. \quad (5.8)$$

Отсюда и из (5.6)

$$\underline{\overset{\circ}{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\overset{\circ}{\Lambda}}^2 - \underline{G}), \quad \underline{\overset{\circ}{\Theta}} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{\overset{\circ}{\Lambda}}^2). \quad (5.9)$$

Аналогично (2.16) введем функцию

$$\underline{\hat{\Lambda}} = \underline{Q} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{Q}^* \quad (\underline{Q} \cdot \underline{\hat{\Lambda}} = \underline{\Lambda} \cdot \underline{Q}). \quad (5.10)$$

С ее помощью находим

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{\hat{\Lambda}} \cdot \underline{Q}; \quad \underline{F}^* = \underline{Q}^* \cdot \underline{\hat{\Lambda}}; \quad \underline{F}^{-1} = \underline{Q}^* \cdot \underline{\hat{\Lambda}}^{-1}; \\ \underline{F}^{-1*} &= \underline{F}^{*-1} = \underline{\hat{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

и

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\hat{\Lambda}}^2 - \underline{G}); \quad \underline{\hat{\Theta}} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{\hat{\Lambda}}^2). \quad (5.12)$$

Из (5.10) следует:

$$\underline{\hat{\Lambda}}^2 = \underline{Q} \cdot \underline{\overset{\circ}{\Lambda}} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\overset{\circ}{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^* = \underline{Q} \cdot \underline{\overset{\circ}{\Lambda}}^2 \cdot \underline{Q}^*.$$

Так как все полиномиальные функции тензора второго ранга являются тензорными полиномами второй степени (2.13), то из (5.10) следует, что любая пара полиномиальных функций $\hat{f}(\underline{\Lambda})$

и $f(\underline{\Lambda})$ связана зависимостью

$$\boxed{\hat{f}(\underline{\Lambda}) = \underline{Q} \cdot f(\underline{\overset{\circ}{\Lambda}}) \cdot \underline{Q}^*}, \quad (5.13)$$

которую подтверждает сопоставление соотношений (5.9) и (5.12).

Из последних, в частности, следует, что $\underline{\hat{\Lambda}}$ и $\underline{\Lambda}$ — тензоры деформации. Назовем их **тензорами относительных удлинений**.

В качестве меры деформации можно, в принципе, принять любую из функций двух семейств $\hat{f}(\underline{\hat{\Lambda}})$ и $f(\underline{\Lambda})$, связанных равенством (5.13).

Выявим структуру тензора поворота \underline{Q} . Прежде всего, по (2.22)

$$\begin{aligned} \underline{Q} \cdot \underline{\overset{\circ}{R}}_m &= \cos \omega \underline{\overset{\circ}{R}}_m + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{\overset{\circ}{R}}_m + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\underline{\omega} \cdot \underline{\overset{\circ}{R}}_m) \underline{\omega} = \\ &= \underline{\overset{\circ}{R}}_m + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{\overset{\circ}{R}}_m + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\overset{\circ}{R}}_m). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Тензорно умножая эти выражения справа на $\underline{\overset{\circ}{R}}^m$ и суммируя по $m = \alpha$, приходим с учетом (1.12) к соотношениям:

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \cos \omega \underline{G} + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{G} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \underline{\omega} = \\ &= \underline{G} + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{G} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{G}); \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}^{-1} = \underline{Q}^* &= \cos \omega \underline{G} - \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{G} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \underline{\omega} = \\ &= \underline{G} - \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{G} + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{G}). \end{aligned}$$

Согласно (1.29) и (1.30), имеем

$$\underline{\omega} \times \underline{\overset{\circ}{R}}_m = \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{2m\gamma} \overset{\circ}{\omega}^\alpha \underline{\overset{\circ}{R}}^\gamma; \quad \underline{\omega} \cdot \underline{\overset{\circ}{R}}_m = \overset{\circ}{\omega}_m = \overset{\circ}{G}_{m\alpha} \overset{\circ}{\omega}^\alpha. \quad (5.16)$$

Из (5.14) можно также получить

$$\begin{aligned} \underline{Q} &= \overset{\circ}{Q}_{\delta\gamma} \overset{\circ}{R}^\delta \underline{\overset{\circ}{R}}^\gamma = \overset{\circ}{Q}_{\delta\gamma} \overset{\circ}{R}^\delta \underline{\overset{\circ}{R}}^\gamma = \overset{\circ}{Q}_{\delta\gamma} \overset{\circ}{R}^\delta \underline{\overset{\circ}{R}}^\gamma; \\ \underline{Q}^* &= \overset{\circ}{Q}_{\mu\nu} \overset{\circ}{R}^\nu \underline{\overset{\circ}{R}}^\mu = \overset{\circ}{Q}_{\mu\nu} \overset{\circ}{R}^\nu \underline{\overset{\circ}{R}}^\mu = \overset{\circ}{Q}_{\mu\nu} \overset{\circ}{R}^\nu \underline{\overset{\circ}{R}}^\mu, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Q}_{lm} &= \cos \omega \overset{\circ}{G}_{lm} + \frac{\sin \omega}{\omega} \overset{\circ}{\mathcal{A}}_{ml\alpha} \overset{\circ}{\omega}^\alpha + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \overset{\circ}{\omega}_l \overset{\circ}{\omega}_m; \\ \overset{\circ}{Q}_i{}^m &= \cos \omega \delta_i^m + \frac{\sin \omega}{\omega} \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mathcal{A}}^{m\beta\alpha} \overset{\circ}{\omega}_\alpha + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \overset{\circ}{\omega}^m \overset{\circ}{m}_i; \\ \overset{\circ}{Q}^m{}_l &= \cos \omega \delta_l^m - \frac{\sin \omega}{\omega} \overset{\circ}{G}_{l\beta} \overset{\circ}{\mathcal{A}}^{m\beta\alpha} \overset{\circ}{\omega}_\alpha + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \overset{\circ}{\omega}^m \overset{\circ}{\omega}_l. \end{aligned}$$

Из приведенных выражений усматриваются условия ортогональности компонент тензора \underline{Q}

$$\overset{\circ}{Q}_i{}^\nu \overset{\circ}{Q}^j{}_\nu = \overset{\circ}{Q}^\nu{}_i \overset{\circ}{Q}_\nu{}^j = \delta_i^j \quad (5.18)$$

и следующие полезные зависимости между компонентами тензора \underline{Q} и вектора углов поворота $\underline{\omega}$:

$$1 + 2 \cos \omega = \overset{\circ}{Q}_\alpha{}^\alpha = \overset{\circ}{Q}^\alpha{}_\alpha; \quad \frac{\sin \omega}{\omega} \overset{\circ}{\omega}^j = \frac{1}{4} \overset{\circ}{\mathcal{A}}^{i\mu\nu} (\overset{\circ}{Q}_{\nu\mu} - \overset{\circ}{Q}_{\mu\nu});$$

$$\overset{\circ}{Q}^{\nu}{}_\nu \overset{\circ}{\omega}_\nu = \overset{\circ}{\omega}_m; \quad \overset{\circ}{Q}^m{}_\nu \overset{\circ}{\omega}^\nu = \overset{\circ}{\omega}^m. \quad (5.19)$$

Отметим, что в соотношениях (5.14) — (5.19) можно снять зна

чок °, либо заменить его на ^, то есть использовать компоненты в пространственном либо текущем материальном базисах.

В отсчетной конфигурации введем ортогональные координаты с ортонормированным базисом

$$\underline{e}_i = \underline{R}_i \sqrt{G_{ii}} = \underline{R}^i \sqrt{\hat{G}_{ii}} \quad (5.20)$$

и, как и в (5.14), также ортонормированный базис

$$\begin{aligned} \underline{e}_i &= \underline{Q} \cdot \underline{e}_i = \underline{R}_i \cdot \underline{Q}^* = \\ &= \cos \omega \underline{e}_i + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{e}_i + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} (\underline{\omega} \cdot \underline{e}_i) \underline{\omega} = \\ &= \underline{e}_i + \frac{\sin \omega}{\omega} \underline{\omega} \times \underline{e}_i + \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{e}_i), \end{aligned} \quad (5.21)$$

полученный из первого поворотом, определяемым вектором поворота материальной частицы $\underline{\omega}$. Если тензоры $\underline{\Lambda}$ и $\underline{\Lambda}^{-1}$ представить разложениями в базисе (5.20)

$$\underline{\Lambda} = \Lambda_{(\alpha\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta; \quad \underline{\Lambda}^{-1} = (\Lambda^{-1})_{(\alpha\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta, \quad (5.22)$$

то по (5.20), (5.21)

$$\begin{aligned} \underline{R}_i &= \underline{e}_i \sqrt{G_{ii}}; \quad \underline{R}^j = \underline{e}_j \sqrt{\hat{G}_{jj}}; \\ \underline{R}_i &= \underline{e}_\alpha \Lambda_{(\alpha i)} \sqrt{G_{ii}}; \quad \underline{R}^j = \underline{e}_\alpha (\Lambda^{-1})_{(\alpha j)} \sqrt{\hat{G}_{jj}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Вернемся к зависимости (5.13) и предположим, что базис (5.20) является главным для тензора $\underline{\hat{\Lambda}}$, а, значит, и для $f(\underline{\hat{\Lambda}})$. Тогда по (2.13) и (3.21)

$$f(\underline{\hat{\Lambda}}) = f(\lambda_{(1)}) \underline{e}_1 \underline{e}_1 + f(\lambda_{(2)}) \underline{e}_2 \underline{e}_2 + f(\lambda_{(3)}) \underline{e}_3 \underline{e}_3 \quad (5.24)$$

и, с учетом (5.13), (5.21),

$$f(\underline{\Lambda}) = f(\lambda_{(1)}) \underline{e}_1 \underline{e}_1 + f(\lambda_{(2)}) \underline{e}_2 \underline{e}_2 + f(\lambda_{(3)}) \underline{e}_3 \underline{e}_3. \quad (5.25)$$

Сопоставление (5.25) с (5.24) показывает, что тензоры из каждой сопряженной пары (5.13) имеют общие главные значения и главные оси, повернутые друг относительно друга на углы, определяемые $\underline{\omega}$. В частности, это относится и к сопряженной паре

$\underline{\Lambda} - \underline{\hat{\Lambda}}$.

В главных осях тензора $\underline{\hat{\Lambda}}$ $\hat{\Lambda}_{(ij)} = \lambda_{(i)} \delta_{ij}$ и по (5.23)

$$\frac{d\hat{s}_i}{d\hat{s}_i} = \frac{|\hat{R}_i d\hat{\Theta}^i|}{|\hat{R}_i d\hat{\Theta}^i|} = \lambda_{(i)},$$

где (5.3) ds_i и \hat{ds}_i — длины элемента i -го главного направления в текущей и отсчетной конфигурациях. Из полученного соотношения видно, что главные значения тензора $\hat{\underline{\Lambda}}$ ($\hat{\underline{\Lambda}}$) отождествляются с относительным удлинением вследствие деформации элемента главного направления.

Помимо полярных разбиений (5.7)—(5.8), (5.11) градиент движения и обратный ему тензор можно разложить и так:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{G} + \underline{\hat{E}} + \underline{\hat{\Omega}} & (\underline{\hat{E}}^* &= \underline{\hat{E}}, \underline{\hat{\Omega}}^* &= -\underline{\hat{\Omega}}); \\ \underline{F}^{-1} &= \underline{G} - \underline{\hat{E}} - \underline{\hat{\Omega}} & (\underline{\hat{E}}^* &= \underline{\hat{E}}, \underline{\hat{\Omega}}^* &= -\underline{\hat{\Omega}}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

то есть выделить из них единичный (метрический) тензор, а остатки разбить на симметричную и кососимметричную части. Отсюда и из (4.17) следует:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}} &= \frac{1}{2} (\underline{F} + \underline{F}^*) - \underline{G} = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})^* + \underline{\nabla} \underline{u}], \\ \underline{\hat{\Omega}} &= \frac{1}{2} (\underline{F} - \underline{F}^*) = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})^* - \underline{\nabla} \underline{u}], \\ \underline{\hat{E}} &= \underline{G} - \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} + \underline{F}^{-1*}) = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})^* + \underline{\nabla} \underline{u}], \\ \underline{\hat{\Omega}} &= \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1*} - \underline{F}^{-1}) = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})^* - \underline{\nabla} \underline{u}] = \frac{1}{2} [(\underline{\nabla} \underline{u})^* - \underline{\nabla} \underline{u}] \end{aligned} \quad (5.27)$$

или в компонентном виде:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{E}} &= \underline{\hat{E}}_{\alpha\beta} \underline{\hat{R}}^\alpha \underline{\hat{R}}^\beta; & \underline{\hat{E}}_{ij} &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{\hat{u}}_i + \underline{\nabla}_i \underline{\hat{u}}_j); \\ \underline{\hat{\Omega}} &= \underline{\hat{\Omega}}_{\alpha\beta} \underline{\hat{R}}^\alpha \underline{\hat{R}}^\beta; & \underline{\hat{\Omega}}_{ij} &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{\hat{u}}_i - \underline{\nabla}_i \underline{\hat{u}}_j); \\ \underline{E} &= \underline{E}_{\alpha\beta} \underline{R}^\alpha \underline{R}^\beta; & E_{ij} &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{u}_i + \underline{\nabla}_i \underline{u}_j); \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\underline{\hat{\Omega}} = \underline{\hat{\Omega}}_{\alpha\beta} \underline{\hat{R}}^\alpha \underline{\hat{R}}^\beta; \quad \hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{\hat{u}}_i - \underline{\nabla}_i \underline{\hat{u}}_j) = \frac{1}{2} (\partial \underline{\hat{u}}_i / \partial \hat{\Theta}^j - \partial \underline{\hat{u}}_j / \partial \hat{\Theta}^i);$$

$$\underline{\hat{\Omega}} = \underline{\hat{\Omega}}_{\alpha\beta} \underline{\hat{R}}^\alpha \underline{\hat{R}}^\beta; \quad \hat{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{\hat{u}}_i - \underline{\nabla}_i \underline{\hat{u}}_j) = \frac{1}{2} (\partial \underline{\hat{u}}_i / \partial \hat{\Theta}^j - \partial \underline{\hat{u}}_j / \partial \hat{\Theta}^i);$$

$$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_{\alpha\beta} \underline{R}^\alpha \underline{R}^\beta; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_j \underline{u}_i - \underline{\nabla}_i \underline{u}_j) = \frac{1}{2} (\partial \underline{u}_i / \partial \Theta^j - \partial \underline{u}_j / \partial \Theta^i).$$

Отсюда и из (5.26), (5.6) вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \underline{\hat{E}} + \frac{1}{2} (\underline{\hat{E}} - \underline{\hat{\Omega}}) \cdot (\underline{\hat{E}} + \underline{\hat{\Omega}}) = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} (\underline{\nabla}_\alpha \underline{\hat{u}}_\beta + \underline{\nabla}_\beta \underline{\hat{u}}_\alpha) + \frac{1}{2} \underline{G}^{\delta\gamma} (\underline{\nabla}_\alpha \underline{\hat{u}}_\delta) (\underline{\nabla}_\beta \underline{\hat{u}}_\gamma) \right\} \underline{\hat{R}}^\alpha \underline{\hat{R}}^\beta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\varepsilon}} &= \hat{\underline{E}} + \frac{1}{2} (\hat{\underline{E}} + \hat{\underline{\Omega}}) \cdot (\hat{\underline{E}} - \hat{\underline{\Omega}}) = \\
&= \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \hat{u}_{\beta} + \nabla_{\beta} \hat{u}_{\alpha}) + \frac{1}{2} G^{\delta\gamma} (\nabla_{\delta} \hat{u}_{\alpha}) (\nabla_{\gamma} \hat{u}_{\beta}) \right\} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta}; \\
\hat{\underline{\Theta}} &= \hat{\underline{E}} - \frac{1}{2} (\hat{\underline{E}} + \hat{\underline{\Omega}}) \cdot (\hat{\underline{E}} - \hat{\underline{\Omega}}) = \\
&= \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \hat{u}_{\beta} + \nabla_{\beta} \hat{u}_{\alpha}) - \frac{1}{2} G^{\delta\gamma} (\nabla_{\delta} \hat{u}_{\alpha}) (\nabla_{\gamma} \hat{u}_{\beta}) \right\} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta}; \quad (5.29) \\
\hat{\underline{\Theta}} &= \hat{\underline{E}} - \frac{1}{2} (\hat{\underline{E}} - \hat{\underline{\Omega}}) \cdot (\hat{\underline{E}} + \hat{\underline{\Omega}}) = \\
&= \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} \hat{u}_{\beta} + \nabla_{\beta} \hat{u}_{\alpha}) - \frac{1}{2} G^{\delta\gamma} (\nabla_{\alpha} \hat{u}_{\delta}) (\nabla_{\beta} \hat{u}_{\gamma}) \right\} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta}.
\end{aligned}$$

Из выписанных соотношений видно, что тензоры $\hat{\underline{E}}$, $\hat{\underline{E}}$ уместно назвать линейризованными тензорами деформации. Тензоры $\hat{\underline{\Omega}}$, $\hat{\underline{\Omega}}$, как можно показать, являются линейризованными тензорами поворота. Рассмотренное разбиение легко связывается с полярным. Так, по (5.27), (5.7) — (5.8), (5.11) получаем важные формулы, которые связывают линейризованные тензоры $\hat{\underline{E}}$, $\hat{\underline{E}}$, $\hat{\underline{\Omega}}$, $\hat{\underline{\Omega}}$, линейно выражающиеся через смещения, с тензорами $\hat{\underline{\Lambda}}$, $\hat{\underline{\Lambda}}^{-1}$, \underline{Q} , имеющими ясный геометрический смысл

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{E}} &= \frac{1}{2} (\underline{Q} \cdot \hat{\underline{\Lambda}} + \hat{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^*) - \underline{G}; \quad \hat{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{Q} \cdot \hat{\underline{\Lambda}} - \hat{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{Q}^*) \\
\hat{\underline{E}} &= \underline{G} - \frac{1}{2} (\underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{\Lambda}}^{-1} + \hat{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}); \quad \hat{\underline{\Omega}} = -\frac{1}{2} (\underline{Q}^* \cdot \hat{\underline{\Lambda}}^{-1} - \hat{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}); \\
\hat{\underline{E}} &= \underline{G} - \frac{1}{2} (\hat{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}^* + \underline{Q} \cdot \hat{\underline{\Lambda}}^{-1}); \quad \hat{\underline{\Omega}} = -\frac{1}{2} (\hat{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{Q}^* - \underline{Q} \cdot \hat{\underline{\Lambda}}^{-1}).
\end{aligned} \quad (5.30)$$

§ 6. ОСНОВНЫЕ ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ. СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ И ДЕФОРМАЦИОННЫХ ВЕЛИЧИН

Кратко обсудим основные инвариантные величины, связанные с деформацией. Прежде всего, по (1.24) получим первое из следующих выражений для изменения в процессе деформации элемента объема:

$$\tau = d\hat{V}/d\hat{V} = \sqrt{\hat{G}/\hat{G}}; \quad \tau = \lambda_{(1)} \lambda_{(2)} \lambda_{(3)} = \text{III}_{\hat{\underline{\Lambda}}}, \quad \tau = |\underline{F}|. \quad (6.1)$$

Второе следует из указанного выше геометрического смысла в-

личии $\lambda_{(t)}$. А к третьему приводят (см. (5.7) — (5.8) преобразования

$$III_{\lambda}^2 = |\hat{\underline{\Lambda}}|^2 = |\underline{\Lambda}^2| = |\underline{F}^* \cdot \underline{F}| = |\underline{F}|^2.$$

Далее, согласно (1.25), (1.26).

$$\begin{aligned} \underline{\hat{n}} dS_n &= \frac{\underline{\hat{R}}^{\tau}}{\sqrt{\hat{G}^{\alpha\alpha}}} dS_{(n)} = \frac{R^{\tau}}{\sqrt{G^{\alpha\alpha}}} \sqrt{\frac{\hat{G}G^{\alpha\alpha}}{\hat{G}\hat{G}^{\alpha\alpha}}} dS_{(n)} = \\ &= \sqrt{\frac{G}{\hat{G}}} \underline{\hat{n}}_{\tau} d\hat{S}_n R^{\tau} \end{aligned}$$

или, с учетом (6.1).

$$(d\hat{S}_n/dS_n) \underline{\hat{n}} = \tau \underline{\hat{n}}_{\tau} \underline{\hat{R}}^{\tau}. \quad (6.2)_1$$

В приведенных равенствах

$$\underline{\hat{n}} = \underline{\hat{n}}_{\tau} \underline{\hat{R}}^{\tau}, \quad \underline{\hat{n}} = \underline{\hat{n}}_{\tau} \underline{\hat{R}}^{\tau} \quad (6.3)$$

единичные векторы нормалей к материальной поверхности в текущей (деформированной) и отсчетной (недеформированной) конфигурациях.

Скалярное умножение равенства (6.2)₁ самого на себя дает

$$(d\hat{S}_n/dS_n)^2 = \tau^2 G^{\alpha\beta} \underline{\hat{n}}_{\alpha} \underline{\hat{n}}_{\beta}.$$

Отсюда, с учетом (5.1), получаем

$$d\hat{S}_n/dS_n = \tau \sqrt{G^{\alpha\beta} \underline{\hat{n}}_{\alpha} \underline{\hat{n}}_{\beta}} = \tau \sqrt{(G^{\alpha\beta} - 2\Theta^{\alpha\beta}) \underline{\hat{n}}_{\alpha} \underline{\hat{n}}_{\beta}} \quad (6.2)_2$$

Тогда по (6.2)₁ и (6.3)

$$\underline{\hat{n}}_i = \frac{d\hat{S}_n}{dS_n} \frac{\underline{\hat{n}}_i}{\tau} = \frac{\underline{\hat{n}}_i}{\sqrt{(G^{\alpha\beta} - 2\Theta^{\alpha\beta}) \underline{\hat{n}}_{\alpha} \underline{\hat{n}}_{\beta}}}. \quad (6.2)_3$$

Наконец, с помощью соотношения (4.12) и (6.2)₁ следует наиболее часто употребляемая зависимость (теорема Нансона)

$$\boxed{\underline{\hat{n}} d\hat{S}_n = \tau \underline{\hat{n}} \cdot \underline{F}^{-1} dS_n}. \quad (6.2)_4$$

Формулы (6.2) связывают значения площадей элементарных площадок и единичных векторов нормалей к ним, до и после деформации.

Пусть \hat{V} — объем, ограниченный материальной поверхностью S в текущей конфигурации, а \hat{V} и \hat{S} — те же величины в

отсчетной. По (6.2)₄ и формуле Гаусса-Остроградского (1.44) для произвольного тензора T :

$$\int_{\hat{S}} \underline{n} \cdot \underline{T} dS_n = \int_S \underline{n} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau T}) dS_n = \int_{\hat{V}} \underline{\nabla} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau T}) dV. \quad (6.4)$$

Для произвольной же величины W по (6.1):

$$\int_{\hat{V}} W dV = \int_{\hat{V}} (\underline{\tau} W) d\hat{V}. \quad (6.5)$$

В механике деформируемых тел часто требуется подсчитать скорость изменения той или иной величины. Это можно сделать, зная закон движения материальных точек (4.2). Прежде всего, поскольку в любой момент времени t через данную точку пространства может проходить лишь одна материальная точка, закон движения обратим однозначно:

$$\Theta^j = \Theta^j(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t) \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6.6)$$

Подсчитаем скорость движения материальной частицы. Прежде всего, по (4.3), (4.5), (4.7)

$$\underline{v} = \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial \Theta^\alpha} \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial t} \underline{R}_\alpha = \frac{\partial \Theta^\beta}{\partial \Theta^\alpha} \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial t} \underline{R}_\beta. \quad (6.7)$$

Продифференцируем выражения (6.6) по времени с учетом независимости материальных координат от времени

$$\frac{d\Theta^j}{dt} = 0 = \frac{\partial \Theta^j}{\partial \Theta^\alpha} \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Theta^j}{\partial t}.$$

Отсюда и из (6.7)

$$\underline{v} = \hat{v}^\alpha \underline{R}_\alpha; \quad v^j = - \frac{\partial \Theta^j(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t)}{\partial t} \Big|_{\Theta^i = \Theta^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t)} \quad (6.8)$$

(Вертикальная черта в последующем означает, что в выражении после дифференцирования по t , пространственные координаты заменены их выражениями (4.2) через материальные).

Теперь, с учетом (6.7), (4.3) и (1.38),

$$\underline{R}_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \underline{R}}{\partial \Theta^i} \right) = \frac{\partial}{\partial \Theta^i} \left(\frac{\partial \underline{R}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \Theta^i} = \underline{R}_\gamma \nabla_\gamma v^i,$$

то есть

$$\underline{R}_i = \underline{R}_\gamma \nabla_\gamma v^i; \quad \underline{R}^j = - \underline{R}_\gamma \nabla_\gamma v^j \quad (6.9)$$

Второе следует из первого дифференцированием тождества $\underline{R}_i \cdot \underline{R}^j = \delta_i^j$. Если ввести в рассмотрение тензор — **градиент скоростей**

$$\underline{\nabla} \underline{v} = \underline{R}^\alpha \underline{\hat{R}}_\gamma \underline{\nabla}_\alpha \underline{\hat{v}}^\gamma, \quad (6.10)$$

то (6.9) можно записать и так:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{R}}_i &= \underline{R}_i \cdot \underline{\nabla} \underline{v} = (\underline{\nabla} \underline{v})^* \cdot \underline{R}_i; \\ \underline{R}^j \cdot &= -(\underline{\nabla} \underline{v}) \cdot \underline{\hat{R}}^j = -\underline{R}^j \cdot (\underline{\nabla} \underline{v})^*. \end{aligned} \quad (6.9)_1$$

Имея закон дифференцирования координатных векторов, нетрудно для произвольного тензора

$$\underline{T} = \underline{T}^\alpha \dots \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta \underline{R}^\gamma \dots \quad (6.11)_1$$

получить

$$\underline{\hat{T}} = (\underline{\hat{T}})^\alpha \dots \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta \underline{R}^\gamma \dots, \quad (6.11)_2$$

где

$$\begin{aligned} (\underline{\hat{T}})^\alpha \dots &= \frac{\partial T^{\alpha \dots}}{\partial t} + (\nabla_\gamma \underline{v}^\gamma) T^{\alpha \dots} + \\ &+ (\nabla_\gamma \underline{v}^j) T^{\alpha \dots} - (\nabla_k \underline{v}^i) T^{\alpha \dots} = \dots \end{aligned}$$

Далее из (6.10) и (4.11) получаем, с учетом независимости отсчетных базисов от времени,

$$\underline{F}^* = (\underline{\nabla} \underline{v})^* \cdot \underline{F}; \quad \underline{F}^* \cdot = \underline{F}^* \cdot = \underline{F}^* \cdot (\underline{\nabla} \underline{v});$$

$$\underline{F}^{-1} \cdot = -\underline{F}^{-1} \cdot (\underline{\nabla} \underline{v})^*; \quad \underline{F}^{-1*} = \underline{F}^{*-1} = -(\underline{\nabla} \underline{v}) \cdot \underline{F}^{-1*}. \quad (6.12)$$

Отсюда и из (5.6) следует:

$$\begin{aligned} \underline{\hat{C}} \cdot &= (\underline{\Lambda}^2) \cdot = 2\underline{\Theta} \cdot = (\underline{F}^* \cdot \underline{F}) \cdot = \underline{F}^* \cdot [\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^*] \cdot \underline{F}; \\ (\underline{\hat{C}}^{-1}) \cdot &= (\underline{\Lambda}^{-2}) \cdot = 2\underline{\Theta} \cdot = (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1*}) \cdot = \\ &= -\underline{F}^{-1} \cdot [\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^*] \cdot \underline{F}^{-1*}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $\underline{\hat{C}}$ и $\underline{\hat{C}} = \underline{Q} \cdot \underline{C} \cdot \underline{Q}^*$ — **тензоры деформации Коши**.

Выразим векторы скоростей и ускорений материальной точки через смещения. Прежде всего по (4.18) $(\underline{\hat{R}}_i = \underline{\hat{R}}^j = 0)$

$$\underline{v} = \underline{R}_\alpha \underline{u}^\alpha = \underline{v}^\alpha \underline{R}_\alpha = \underline{v}_\alpha \underline{R}^\alpha; \quad \underline{v}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}; \quad \underline{v}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t};$$

$$\underline{\omega} = \underline{R}^{\cdot\cdot} = \underline{u}^{\cdot\cdot} = \omega^2 \underline{R}_2 = \omega_2 \underline{R}^2; \quad \omega^i = \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}; \quad \omega_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (6.14)$$

При пространственном описании движения для тензора произвольного ранга (1.3) [1]

$$\underline{T}^{\cdot} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{T}, \quad (6.15)$$

где

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \frac{\partial T^{i_1 \dots i_n}}{\partial t} \underline{R}_{i_1} \underline{R}_{i_2} \dots \underline{R}_{i_n}.$$

Для скаляра $h = h(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t)$

$$\underline{h}^{\cdot} = \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} h \quad (\underline{\nabla} h = \underline{\text{grad}} h). \quad (6.16)$$

В выражениях (6.14), (6.15) первые слагаемые правых частей связаны с нестационарностью полей и называются **локальными** скоростями. Вторые — обуславливаются движением ($\underline{v} \neq 0$) материальных точек в неоднородном ($\underline{\nabla} T \neq 0$, $\underline{\nabla} h \neq 0$) поле и называются **конвективными** (переносными) скоростями.

§ 7. ВЕКТОР НАПРЯЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПАРЫ ТЕНЗОРОВ

Из деформированного тела мысленно выделим часть V , ограниченную материальной поверхностью S . Закон сохранения количества движения выделенного объема записывается в виде

$$\int_V \underline{f} \rho dV + \int_S \underline{\sigma}_{(n)} dS_n = \int_V \underline{v}^{\wedge} \rho dV. \quad (7.1)$$

Здесь ρ — плотность материала в деформированной (текущей) конфигурации, $\rho dV = dm$ масса элемента объема, \underline{f} — вектор массовой силы. Вектор

$$\underline{\sigma}_{(n)} = \underline{\sigma}_{(n)}(\underline{R}, \underline{n}) \quad (7.2)$$

представляет собой действующую на выделенный объем через площадку $d\hat{S}_n$ поверхностную силу в расчете на единицу деформированной поверхности. Его называют **вектором напряжения**. Представляя возникающие в теле при деформации внутренние силы, он, как подчеркивает запись (7.2), зависит от положения площадки и ее ориентации, определяемой единичным вектором внешней нормали — \underline{n} . Согласно третьему закону Ньютона,

$$\underline{\sigma}(-\hat{n}) = -\underline{\sigma}(\hat{n}). \quad (7.3)$$

Наконец, интеграл в правой части (7.1) — количество движения.

Применим равенство (7.1) к элементарному тетраэдру (рис. 1). Поскольку по (1.24), (1.25)

$$dV = \sqrt{G} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3; \quad dS_{(i)} = \sqrt{G} G^{ii} \frac{d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3}{d\theta^i}.$$

Объемными интегралами, как малыми более высокого порядка, можно пренебречь. В результате приходим к равенству

$$\underline{\sigma}(n) \frac{1}{2} dS_n + \underline{\sigma}(-n) \frac{1}{2} dS_{(n)} = 0.$$

Используя (7.3) и (1.27), получаем

$$\underline{\sigma}(n) = n_\alpha \underline{\sigma}_{(\alpha)} \sqrt{G^{\alpha\alpha}}. \quad (7.4)$$

В выписанном равенстве левая часть — инвариант, n_i — ковариантные компоненты вектора. Поэтому, согласно свойству (стр. 11), следует, что величины

$$\underline{\sigma}_{(i)} \sqrt{G^{ii}} = \sum^{\hat{i}j} \underline{R}_{\hat{j}} \quad (7.5)$$

являются ковариантными компонентами тензора первого ранга, а $\sum^{\hat{i}j}$ — контравариантными компонентами тензора второго ранга

$$\underline{\Sigma} = \sum^{\alpha\beta} \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta = \sum^{\alpha\beta} \underline{R}_\alpha \underline{R}^\beta = \sum^{\alpha\beta} \underline{R}^\alpha \underline{R}^\beta, \quad (7.6)$$

называемого **тензором напряжений Коши** (тензором истинных напряжений). С его помощью, согласно (7.5), выражение (7.4) записывается так:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\sigma}_{(n)} &= \hat{n}_\alpha \sum^{\alpha\beta} \hat{R}_\beta = \hat{n} \cdot \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma} \cdot \hat{n} \\ \sigma_{(n)}^i &= n_\alpha \sum^{\alpha i} \end{aligned}} \quad (7.7)$$

Здесь и в (7.6) нами использована симметричность $\underline{\Sigma}$, которая аналогично следует из закона сохранения момента количества движения.

Согласно (7.7) и (6.2)₄ поверхностный интеграл в (7.1) можно записать в виде

$$\int_s \underline{\sigma}_{(n)} dS_n = \int_s \hat{n} \cdot \underline{\Sigma} d\hat{S}_n = \int_s \hat{n} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{\Sigma}) dS_n. \quad (7.8)$$

Если ввести вектор

$$\underline{\sigma}_{(n)} = \frac{dS_n}{dS_n} \underline{\sigma}_{(n)}, \quad (7.9)$$

представляющий собой вектор напряжения в расчете на единицу площади недеформированной (отсчетной) материальной поверхности, то

$$\int_s \underline{\sigma}_{(n)} dS_n = \int_s \underline{\sigma}_{(n)} dS_n.$$

Сопоставление последнего соотношения с (7.8) дает

$$\underline{\sigma}_{(n)} = \underline{n} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma}) \quad (7.10)$$

Тензор

$$\underline{\tau} \underline{\Sigma} \quad (7.11)$$

называют тензором напряжения Кирхгофа, а

$$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \quad (7.12)$$

номинальным тензором напряжения. (Сопряженный к номинальному тензор $\underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}$ называют первым (несимметричным) тензором Пиала). С помощью зависимостей (7.6), (7.10), (7.12) и (4.19) получаем

$$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} = \underline{\tau} \underline{\Sigma}^{\alpha\beta} (\delta_{\beta}^{\gamma} + \nabla_{\beta} u^{\gamma}) \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\gamma}; \quad (7.13)$$

$$\underline{\sigma}_{(n)} = n_{\alpha} \underline{\tau} \underline{\Sigma}^{\alpha\beta} (\delta_{\beta}^{\gamma} + \nabla_{\beta} u^{\gamma}) \underline{R}_{\gamma}. \quad (7.14)$$

В пространственном базисе

$$\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}^{\alpha\beta} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}_{\beta} = \underline{\Sigma}_{\alpha}^{\alpha} \underline{R}_{\alpha} \underline{R}^{\beta} = \underline{\Sigma}_{\alpha\beta} \underline{R}^{\alpha} \underline{R}^{\beta}; \quad (7.15)$$

$$\underline{\sigma}_{(n)} = n_{\alpha} \underline{\Sigma}^{\alpha\beta} \underline{R}_{\beta} = n_{\alpha} \underline{\Sigma}_{\beta}^{\alpha} \underline{R}^{\beta} = n^{\alpha} \underline{\Sigma}_{\alpha}^{\beta} \underline{R}_{\beta} = n^{\alpha} \underline{\Sigma}_{\alpha\beta} \underline{R}^{\beta}. \quad (7.16)$$

Получим уравнения движения материальной частицы. Прежде всего, по (7.7) и формулам Гаусса-Остроградского (1.44)

$$\int_s \underline{\sigma}_{(n)} dS_n = \int_s \underline{n} \cdot \underline{\Sigma} dS_n = \int_v \underline{\nabla} \cdot \underline{\Sigma} dV.$$

Подставляя преобразованное выражение в (7.1), приходим, в силу произвольности объема, к уравнению движения

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\Sigma} + \rho (\underline{f} - \underline{\omega}) = 0; \quad \underline{\nabla}_{\gamma} \underline{\Sigma}^{\gamma j} + \rho (f^j - \omega^j) = 0 \quad (7.17)$$

Массу элемента материального объема до деформации и после деформации можно, согласно (1.24), записать так:

$$dm = \hat{\rho} dV = \rho \sqrt{G} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3;$$

$$dm = \overset{\circ}{\rho} dV = \overset{\circ}{\rho} \sqrt{G} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3.$$

По определению материальных координат масса материального элементарного объема в процессе деформации не меняется, то есть $dm = \overset{\circ}{dm}$ и по (6.1)

$$\boxed{\hat{\rho} \tau = \overset{\circ}{\rho}} \quad (7.18)$$

Полученное выражение является локальной записью закона сохранения массы.

С учетом (7.18), (7.8) и (1.44) равенство (7.1) записывается так:

$$\int_v \{ \nabla \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma}) + \rho (\underline{f} - \underline{\omega}) \} dV = 0.$$

Отсюда и следует **вторая форма записи уравнения движения**

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma}) + \rho (\underline{f} - \underline{\omega}) &= 0; \\ \nabla_i \{ \tau \Sigma^{0i} (\delta_j^i + \nabla_j^i u^j) \} + \rho \left(\dot{f}^j - \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \right) &= 0. \end{aligned}} \quad (7.19)$$

Наконец, в пространственном базисе имеем **третью форму записи уравнения движения**

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\Sigma} + \hat{\rho} (\underline{f} - \underline{\omega}) &= 0; \\ \nabla_i \Sigma^{ij} + \hat{\rho} (\dot{f}^j - \dot{\omega}^j) &= 0. \end{aligned}} \quad (7.20)$$

Подсчитаем элементарную работу напряжений. Прежде всего, имеет место соотношение

$$\int_v \delta W \hat{\rho} dV = \int_s \underline{\sigma}_{(n)} \cdot (\underline{v} dt) dS_n + \int_v (\underline{f} - \underline{\omega}) \cdot (\underline{v} dt) dV, \quad (7.21)$$

представляющее собой баланс следующих элементарных работ: напряжений— δW ; массовых сил— $\underline{f} \cdot (\underline{v} dt)$; сил инерции— $(-\underline{\omega} \cdot \underline{v} dt)$ и удельной работы поверхностных сил— $\underline{\sigma}_{(n)} \cdot (\underline{v} dt)$. При помощи уравнения движения (7.17) и формулы Гаусса—Остроградского находим

$$\int_{\hat{v}} (\underline{f} - \underline{\omega}) \cdot (\underline{v} dt) dV = - \int_{\hat{v}} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\Sigma}) \cdot (\underline{v} dt) dV =$$

$$= - \int_s \underline{n} \cdot \underline{\Sigma} \cdot (\underline{v} dt) dS_n + \int_{\hat{v}} \underline{\Sigma} : (\underline{\nabla} \underline{v})^* dt dV.$$

Подставляя полученное выражение в (7.21), получаем, с учетом (7.7),

$$\int_{\hat{v}} \delta W \rho dV = \int_{\hat{v}} \underline{\Sigma} : (\underline{\nabla} \underline{v})^* dt dV$$

или, в силу произвольности объема,

$$\rho \delta W / dt = \underline{\Sigma} : (\underline{\nabla} \underline{v})^*.$$

Это равенство можно записать и так:

$$\rho \delta W / dt = \underline{\Sigma} : \frac{1}{2} [\underline{\Delta} \underline{v} + (\underline{\Delta} \underline{v})^*], \quad (7.22)$$

поскольку от предыдущего оно отличается на свертку симметричного тензора $\underline{\Sigma}$ с кососимметричным $\frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{v})^* - \underline{\nabla} \underline{v}]$, равную нулю согласно свойству (с. 12).

Обозначение $\delta W / dt$ сознательно введено вместо, казалось бы, естественного — dW / dt . Но последнее обозначало бы, что существует функция состояния W , каковой, вообще говоря, работа напряжений не является; δW следует просто рассматривать как элементарное приращение работы за время dt .

Для свертки тензоров второго ранга удобно использовать обозначения

$$\text{tr} \{ \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \dots \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} \} = A^{\alpha}_{\beta} B^{\beta}_{\gamma} \dots C^{\gamma}_{\delta} D^{\delta}_{\alpha}. \quad (7.23)$$

Легко проверяется, что

$$\text{tr} \{ \underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \dots \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} \} =$$

$$= \text{tr} \{ \underline{B} \cdot \dots \cdot \underline{D} \cdot \underline{A} \} = \text{tr} \{ \underline{D} \cdot \underline{A} \cdot \dots \cdot \underline{C} \}, \quad (7.24)$$

то есть под знаком $\text{tr} \{ \dots \}$ допустима циклическая перестановка.

Из (7.18), (7.22), (7.23), (6.9) следует

$$\rho \delta W / dt = \tau \rho \delta W / dt = \text{tr} \left\{ \tau \underline{\Sigma} \cdot \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^*] \right\} =$$

$$= \text{tr} \{ (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1}) \cdot \underline{\varepsilon} \} = \text{tr} \{ (\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}) \cdot \underline{\Theta} \}. \quad (7.25)$$

Используя же полярное представление (5.7), (5.8), получаем, с учетом (7.24),

$$\rho \delta W / dt = \text{tr} \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \cdot (\underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\Lambda}^{-1}) \}. \quad (7.26)$$

Но по (5.6)

$$\underline{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda}^* + \underline{\Lambda}^* \cdot \underline{\Lambda});$$

$$\underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon}^* \cdot \underline{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}^* \cdot \underline{\Lambda}^{-1} + \underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{\Lambda}^*).$$

Если ввести в рассмотрение тензор \underline{T} , определяемый равенством

$$\underline{T}^* = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}^* \cdot \underline{\Lambda}^{-1} + \underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{\Lambda}^*), \quad (7.27)$$

то выражение (7.26) запишется так:

$$\rho \delta W/dt = \text{tr} \{ (\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{T}^* \}. \quad (7.28)$$

Наконец, из (7.25), (7.26) можно получить

$$\rho \delta W/dt = \text{tr} \left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}) \cdot \underline{\Lambda}^* \right\}. \quad (7.29)$$

Аналогично выводится еще одно равенство

$$\rho \delta W/dt = \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}) \cdot \underline{\Lambda}^{-1} \right\} \quad (7.30)$$

Теперь выражениям (7.25), (7.28), (7.30) можно придать унифицированный вид

$$\rho \delta W/dt = \underline{\underline{\Sigma}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^* = \text{tr} \{ \underline{\underline{\Sigma}}^* \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^* \}, \quad (7.31)$$

если под парами энергетических величин (энергетическое напряжение ($\underline{\underline{\Sigma}}$) — энергетическая деформация ($\underline{\underline{\varepsilon}}$)) понимать следующие пять пар величин

	$\underline{\underline{\Sigma}}$	$\underline{\underline{\varepsilon}}$
I	$\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}$	$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}^2 - \underline{G})$ или $\frac{1}{2} \underline{C} = \frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2$
II	$\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}$	$\underline{\Theta} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-2})$ или $-\frac{1}{2} \underline{C}^{-1} = -\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^{-2}$
III	$\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}$	\underline{T}
IV	$\frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*})$	$\underline{\Lambda} - \underline{G}$ или $\underline{\Lambda}$
V	$\frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F})$	$\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-1}$ или $-\underline{\Lambda}^{-1}$

(7.32)

Отметим, что тензор $\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}$ называют **вторым** (симметричным) тензором **Пиала**, а $\frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*})$ — **симметричным тензором Био**. Тензоры \underline{C} и $\underline{C} = \underline{Q} \cdot \underline{C} \cdot \underline{Q}^*$ именуют **тензорами деформации Коши**.

Рассмотрение вопроса о парах энергетических тензоров проведено в работах В. В. Новожилова и Р. Хилла [6], [13]. Последний получил первые четыре пары путем, изложенным выше, и назвал их сопряженными величинами.

Согласно (5.6), $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \underline{F} + \underline{F} \cdot \underline{F}^*)$. Подставляя это выражение в (7.25), приходим после аналогичных преобразований с учетом того, что $\text{tr}\{\underline{A}^*\} = \text{tr}\{\underline{A}\}$ к шестой паре величин (энергетических тензоров)

	$\underline{\Sigma}$	$\underline{\varepsilon}$
VI	$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma}$	\underline{F}

(7.33)

Таким образом, шестую пару энергетических тензоров составляют тензор номинальных напряжений и градиент движения. В отличие от первых пяти пар тензоры шестой пары зависят не только от деформации, но и от поворота материальной частицы.

При рассмотрении анизотропных тел удобно использовать связанную с главными направлениями анизотропии [8] ортогональную систему координат с ортонормированными базисами (5.22), (5.23). В них

$$\underline{\tau} \underline{\Sigma} = \tau \sum_{(\gamma\delta)} \underline{e}_\gamma \underline{e}_\delta = \underline{Q} \cdot (\tau \sum_{(\gamma\delta)} \underline{e}_\gamma \underline{e}_\delta) \cdot \underline{Q}^*. \quad (7.34)$$

Используя далее формулы (5.7), (5.8) и разложения (5.22), получаем

$$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} = \tau (\Lambda^{-1})_{(\alpha\gamma)} \sum_{(\gamma\delta)} (\Lambda^{-1})_{(\delta\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta;$$

$$\underline{F}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} = \tau \Lambda_{(\alpha\gamma)} \sum_{(\gamma\delta)} \Lambda_{(\delta\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta;$$

$$\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} = \tau \sum_{(\alpha\beta)} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta;$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \tau \left\{ (\Lambda^{-1})_{(\alpha\gamma)} \sum_{(\gamma\delta)} + \sum_{(\alpha\gamma)} (\Lambda^{-1})_{(\gamma\delta)} \right\} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\delta; \\ & \frac{1}{2} \left\{ \underline{F}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \tau \{ \Lambda_{(\alpha\gamma)} \underline{\Sigma}_{(\gamma\beta)} + \underline{\Sigma}_{(\alpha\gamma)} \dot{\Lambda}_{(\gamma\beta)} \} \underline{e}_\alpha \underline{e}_\beta. \quad (7.35)$$

Из приведенных формул видно, что энергетические тензоры напряжений не меняются при повороте материальной частицы. В § 13 будет отмечено и другое их достоинство — связь с объективными скоростями изменения напряжений.

Из приведенных формул, а также из (7.32) и (3.17) определяются разложения энергетических тензоров:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}_\gamma \underline{H}_\gamma, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_\mu \underline{H}_\mu \quad (\gamma, \mu = 1, \dots, 6). \quad (7.36)$$

Отсюда, и из независимости \underline{H}_i от t , находим, с учетом (7.31) и (3.11),

$$\boxed{\rho \delta W/dt = \underline{\underline{\Sigma}}_\gamma \underline{\underline{\varepsilon}}_\gamma} \quad (7.37)$$

Рассмотрим очень важный для приложений случай **соосности** тензоров $\underline{\underline{\Lambda}}$ и $(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q})$ (он, в частности, имеет место для изотропных квазиупругих и упругих материалов). Поскольку соосные тензоры переставимы в скалярном произведении, для первого столбца (7.32) имеем, с учетом (5.7), (5.8) и (5.10),

	$\underline{\underline{\Sigma}}$	$\underline{Q} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}^*$
I	$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-2}$	$\tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-2}$
II	$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^2$	$\tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^2$
III	$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q})$	$\tau \underline{\underline{\Sigma}}$
IV	$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$	$\tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}$
V	$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}}$	$\tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}$

(7.38)

В совместных главных осях тензоров $(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q})$ и $\lambda (\tau \underline{\underline{\Sigma}} \text{ и } \underline{\underline{\Lambda}})$, согласно (5.24), (5.25),

$$\underline{\underline{\Lambda}}^2 = \lambda_{(1)}^2 \underline{H}_1 + \lambda_{(2)}^2 \underline{H}_2 + \lambda_{(3)}^2 \underline{H}_3; \quad \underline{\underline{\Lambda}}^2 = \lambda_{(1)}^2 \underline{\underline{\Lambda}}_1 + \lambda_{(2)}^2 \underline{\underline{\Lambda}}_2 + \lambda_{(3)}^2 \underline{\underline{\Lambda}}_3;$$

$$(\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-2} = \tau (\sigma_{(1)} \lambda_{(1)}^{-2} \underline{H}_1 + \sigma_{(2)} \lambda_{(2)}^{-2} \underline{H}_2 + \sigma_{(3)} \lambda_{(3)}^{-2} \underline{H}_3);$$

$$\tau \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-2} = \tau (\sigma_{(1)} \lambda_{(1)}^{-2} \underline{\underline{\Lambda}}_1 + \sigma_{(2)} \lambda_{(2)}^{-2} \underline{\underline{\Lambda}}_2 + \sigma_{(3)} \lambda_{(3)}^{-2} \underline{\underline{\Lambda}}_3).$$

Дифференцируя первые два выражения по времени, находим, с учетом (3.44),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2\right)^{\circ} &= \lambda_{(1)} \lambda_{(1)} \underline{\hat{H}}_1 + \lambda_{(2)} \lambda_{(2)} \underline{\hat{H}}_2 + \lambda_{(3)} \lambda_{(3)} \underline{\hat{H}}_3 + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (\lambda_{(1)}^2 - \lambda_{(2)}^2) \omega_3 \underline{\hat{H}}_4 + (\lambda_{(2)}^2 - \lambda_{(3)}^2) \omega_1 \underline{\hat{H}}_5 + (\lambda_{(3)}^2 - \lambda_{(1)}^2) \omega_2 \underline{\hat{H}}_6 \right\}, \\ \left(\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2\right)^{\circ} &= \lambda_{(1)} \lambda_{(1)} \underline{\hat{H}}_1 + \lambda_{(2)} \lambda_{(2)} \underline{\hat{H}}_2 + \lambda_{(3)} \lambda_{(3)} \underline{\hat{H}}_3 + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (\lambda_{(2)}^2 - \lambda_{(2)}^2) \omega_3 \underline{\hat{H}}_4 + (\lambda_{(2)}^2 - \lambda_{(3)}^2) \omega_1 \underline{\hat{H}}_5 + (\lambda_{(3)}^2 - \lambda_{(1)}^2) \omega_2 \underline{\hat{H}}_6 \right\}. \end{aligned}$$

С помощью полученных выражений подсчитываем, с учетом (7.7) и (3.11), удельную мощность напряжений для первой пары

$$\begin{aligned} \rho \delta W/dt &= [(\underline{Q} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}^*) \cdot \underline{\Lambda}^{-2}] : \left(\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2\right)^{\circ} = [\tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{\Lambda}^{-2}] : \left(\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2\right)^{\circ} = \\ &= \tau \{ \sigma_{(1)} \lambda_{(1)}^{-1} \lambda_{(1)} + \sigma_{(2)} \lambda_{(2)}^{-1} \lambda_{(2)} + \sigma_{(3)} \lambda_{(3)}^{-1} \lambda_{(3)} \}. \end{aligned}$$

Этот же результат получаем для других энергетических пар. Итак, для **соосных** энергетических тензоров

$$\begin{aligned} \rho \delta W/dt &= \underline{\underline{\Sigma}}^{\circ} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{\circ} = (\underline{Q} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{Q}^*) : (\underline{Q} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{Q}^*) = \\ &= \tau \sigma_{(a)} \lambda_{(a)}^{-1} \lambda_{(a)} = \tau \sigma_{(a)} (\ln \lambda_{(a)}). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Отсюда и из (7.38) и (7.32) устанавливается, что для третьей энергетической пары тензоры T и $\underline{Q} \cdot \underline{T} \cdot \underline{Q}^*$ можно заменить на

$\ln \underline{\Lambda}$ и $\ln \underline{\Lambda}$. А тогда

	$\underline{\underline{\varepsilon}}^{\circ}$	$\underline{Q} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{Q}^*$
I	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}^2 - \underline{G})$ или $\frac{1}{2} \underline{C} = \frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2$	$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}^2 - \underline{G})$ или $\frac{1}{2} \underline{C} = \frac{1}{2} \underline{\Lambda}^2$
II	$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-2})$ или $-\frac{1}{2} \underline{C}^{-1} = -\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^{-2}$	$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{1}{2} (\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-2})$ или $-\frac{1}{2} \underline{C}^{-1} = -\frac{1}{2} \underline{\Lambda}^{-2}$
III	$\ln \underline{\Lambda}$	$\ln \underline{\Lambda}$
IV	$\underline{\Lambda} - \underline{G}$ или $\underline{\Lambda}$	$\underline{\Lambda} - \underline{G}$ или $\underline{\Lambda}$
V	$\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-1}$ или $-\underline{\Lambda}^{-1}$	$\underline{G} - \underline{\Lambda}^{-1}$ или $-\underline{\Lambda}^{-1}$

(7.40)

Пять пар энергетических величин (7.38—(7.40) входят в более широкий класс пар энергетических тензоров

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Sigma} &= (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot [\underline{\Lambda} \cdot f'(\underline{\Lambda})]^{-1}; & \underline{\varepsilon} &= f(\underline{\Lambda}); \\ \underline{Q} \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}^* &= \underline{\tau} \cdot \underline{\Sigma} \cdot [\underline{\Lambda} \cdot f'(\underline{\Lambda})]^{-1}; & \underline{Q} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{Q}^* &= f(\underline{\Lambda}). \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

§ 8. ПЕРВОЕ И ВТОРОЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ. ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Будем рассматривать деформируемое тело, как термодинамическую систему. В термодинамике различают **экстенсивные** и **интенсивные** величины. Первые зависят от масс частей тела и при объединении их равны сумме частичных величин. Вторые — от них не зависят и в каждой точке тела имеют вполне определенные значения. Примеры интенсивных величин — плотность, напряжения, температура и т. п.

Отмеченное свойство интенсивных величин позволяет каждой такой величине, Z , сопоставить ее плотность z .

$$Z = \int_{\hat{v}} \hat{z} \rho \hat{dV}. \quad (8.1)$$

Поскольку элемент массы $dm = \rho dV$ не зависит от времени,

$$Z = \int_{\hat{v}} \hat{z} \rho \hat{dV}. \quad (8.2)$$

Полную энергию тела E удобно разбить на три слагаемых

$$E = E_K + E_{\Pi} + U, \quad (8.3)$$

где

$$E_K = \int_{\hat{v}} \hat{e}_K \rho \hat{dV}, \quad E_{\Pi} = \int_{\hat{v}} \hat{e}_{\Pi} \rho \hat{dV}, \quad U = \int_{\hat{v}} \hat{u} \rho \hat{dV} \quad (8.4)$$

кинетическая потенциальная и внутренняя энергии. При этом последняя представляет собой вклад теплового движения и близкойдействующих молекулярных сил. Равенство (8.3) можно рассматривать и как макроопределение внутренней энергии.

Скорость изменения кинетической энергии, согласно (8.1), (8.2), равна $(e_K = \frac{1}{2} v^2)$

$$\dot{E}_K = \int_{\hat{v}} \dot{\hat{e}}_K \rho \hat{dV} = \int_{\hat{v}} \dot{v} \cdot v \rho \hat{dV}. \quad (8.5)$$

С помощью уравнения движения (7.17) и очевидного тождества

$$(\hat{\nabla} \cdot \hat{\Sigma}) \cdot \underline{v} = \hat{\nabla} \cdot (\hat{\Sigma} \cdot \underline{v}) - \hat{\Sigma} : (\hat{\nabla} \underline{v})^*$$

получаем баланс плотности кинетической энергии

$$\rho \dot{e}_k = \hat{\nabla} \cdot (\hat{\Sigma} \cdot \underline{v}) - \hat{\Sigma} : (\hat{\nabla} \underline{v})^* + \rho \underline{f} \cdot \underline{v}. \quad (8.6)$$

При рассмотрении внешних сил ограничимся случаем потенциалов, не зависящих (в пространственном эйлеровом описании) от времени

$$\underline{f} = -\hat{\nabla} e_n; \quad \frac{\partial e_n}{\partial t} = 0. \quad (8.7)$$

Согласно (8.1), (8.2),

$$E_n = \int_{\hat{V}} e_n \hat{\rho} d\hat{V}$$

и по (6.15), (8.7)

$$\dot{e}_n = \frac{\partial e_n}{\partial t} + \underline{v} \cdot \hat{\nabla} e_n = -\underline{f} \cdot \underline{v} \quad (8.8)$$

приходим к балансу плотности потенциальной энергии

$$\hat{\rho}_n \dot{e}_n = -\hat{\rho} \underline{f} \cdot \underline{v}. \quad (8.9)$$

Закон сохранения (полной) энергии записывается в виде

$$\dot{E} = \int_{\hat{V}} \dot{e} \hat{\rho} d\hat{V} = - \int_S \underline{I}_e \cdot \underline{n} dS_n + \int_{\hat{V}} \dot{e}_v \hat{\rho} d\hat{V}. \quad (8.10)$$

Здесь \underline{e} —плотность полной энергии, \underline{I}_e —плотность ее потока через поверхность, \dot{e}_v —плотность радиационного потока энергии. Преобразуя с помощью формул Гаусса—Остроградского (1.44) поверхностный интеграл, приходим к **закону сохранения (плотности) энергии**

$$\hat{\rho} \dot{e} = -\hat{\nabla} \cdot \underline{I}_e + \hat{\rho} \dot{e}_v. \quad (8.11)$$

Из соотношений (8.3), (8.5), (8.9) и (8.11) следует **баланс плотности внутренней энергии**

$$\hat{\rho} \dot{u} = -\hat{\nabla} \cdot \underline{q} + \hat{\rho} \dot{e}_v + \hat{\Sigma} : (\hat{\nabla} \underline{v})^*, \quad (8.12)$$

здесь

$$\underline{q} = \underline{I}_e - (-\hat{\Sigma} \cdot \underline{v}) - \quad (8.13)$$

мощность потока энергии, за вычетом ее деформационной части. Полученное выражение и является, по существу, **первым началом термодинамики**.

Фундаментальным для термодинамики является понятие **обратимых и необратимых** процессов. При этом критерием является характер поведения величины s , называемой **энтропией** и являющейся, как и v , термодинамическим потенциалом (функцией состояния). Пусть

$$s' = s'_{(e)} + s'_{(i)}, \quad (8.14)$$

где $s'_{(e)}$ — скорость обмена энтропией с окружающей средой, а $s'_{(i)}$ — скорость порождения энтропии в теле. Тогда

$$s'_{(i)} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \end{cases} \text{ при } \begin{cases} \text{необратимых} \\ \text{обратимых} \end{cases} \text{ процессах.} \quad (8.15)$$

Введем соответствующие плотности

$$\begin{aligned} s' &= \int_v s' \rho dV; & s'_{(i)} &= \int_v s'_{(i)} \rho dV; \\ s'_{(e)} &= - \int_s \underline{I}_s \cdot \underline{n} dS_n + \int_v s'_v \rho dV. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Здесь \underline{I}_s — плотность потока энтропии через поверхность, $s'_{(i)}$ — плотность радиационного потока энтропии. Применяя к формулам (8.14) — (8.16) формулу Гаусса — Остроградского, получаем баланс плотности энтропии

$$\rho s' = - \underline{\nabla} \cdot \underline{I}_s + \rho s'_v + \rho s'_{(i)}. \quad (8.17)$$

Из (8.15), (8.16) следует, что

$$s'_{(i)} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \end{cases} \text{ при } \begin{cases} \text{необратимых} \\ \text{обратимых} \end{cases} \text{ процессах.} \quad (8.18)$$

Соотношения (8.17), (8.18) наряду с констатацией существования функции состояния — энтропии и составляют содержание **второго начала термодинамики**.

В случае, если взаимодействие с внешней средой сводится лишь к обмену механической энергией и теплом (что и будем считать в дальнейшем) имеют место соотношения:

$$\underline{I}_s = \underline{q}/T; \quad s'_v = e'_v/T, \quad (8.19)$$

где T — абсолютная температура. Отсюда и из (8.12), (8.17), (8.18) следует:

$$\rho s'_{(i)} = \rho (s' - u/T) + [\tau \underline{\Sigma} : (\underline{\nabla} v)^*]/T - \tau q \cdot \underline{\nabla} T/T^2. \quad (8.20)$$

Подобно тому, как были введены энергетические пары напряжение — деформация (7.32), введем **энергетические пары: тепловой поток — градиент температуры**

	\underline{q}	$\underline{\nabla} T$	
	$(\underline{\tau} \underline{q})$	$\underline{\nabla} T$	
I	$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{q}$	$\underline{F}^* \cdot \underline{\nabla} T$	(8.21)
II	$\underline{F}^* \cdot \underline{\tau} \underline{q}$	$\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\nabla} T$	
III	$\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{q}$	$\underline{Q}^* \cdot \underline{\nabla} T$	

Используя введенные обозначения, а также соотношения (§ 7) $\underline{\tau} \underline{\Sigma} : (\underline{\nabla} V) = \underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}$, запишем неравенство (8.20, (8.18) в виде

$$(\rho s_{(i)} \equiv) \quad \rho (s' - u'/T + \underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}'/T - \underline{q} \cdot \underline{\nabla} T/T^2) \geq 0 \quad (8.22)$$

Для другой функции состояния — **свободной энергии** $\psi = u - Ts$ — полученное неравенство переписывается так:

$$(-T s_{(i)} \equiv) \quad \psi' + sT' - \underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon}'/\rho + \underline{q} \cdot \underline{\nabla} T/\rho T \leq 0 \quad (8.23)$$

Соотношения (8.22), (8.23) являются разными формами записи **основного неравенства термодинамики**. Напомним, что знак равенства в них имеет место при обратимых процессах.

§ 9. ПРИНЦИПЫ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И МАТЕРИАЛЬНОЙ ОБЪЕКТИВНОСТИ. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Протекающий во времени термомеханический процесс описывается восемью функциями $\underline{\Theta}, \underline{\tau} : \underline{R}, \underline{\Sigma}, \underline{f}, u, s, T, \underline{q}, \underline{e}_v$.

Две из них, а именно \underline{f} и \underline{e}_v , определяются через остальные шесть зависимостями (7.17) и (8.12). Кроме того, u можно заметить на ψ . Таким образом, можно считать, что термомеханический процесс описывается заданием шести величин

$$\underline{R}, \underline{\Sigma}, \psi, s, T, \underline{q}. \quad (9.1)$$

Материал в механике деформируемых тел задается **определяющими уравнениями** (constitutive equation), налагающими связи на величины (9.1). Действуя в духе Колемана [11, 12], примем определяющие уравнения в виде

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(\tilde{\Theta}^1, \tilde{\Theta}^2, \tilde{\Theta}^3; t) &= \underline{\Sigma}_t \{ \underline{R}(\tilde{\Theta}^1, \tilde{\Theta}^2, \tilde{\Theta}^3; \tau), T(\tilde{\Theta}^1, \tilde{\Theta}^2, \tilde{\Theta}^3; \tau); \\ q(\dots) &= \underline{q}_t \{ \underline{R}(\dots), T(\dots); \\ s(\dots) &= \underline{s}_t \{ \underline{R}(\dots), T(\dots); \\ \psi(\dots) &= \underline{\psi}_t \{ \underline{R}(\dots), T(\dots). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Здесь $\underline{R}(\dots)$ — радиус-вектор произвольной точки $(\tilde{\Theta}^i)$ материальной частицы с центром $\tilde{\Theta}^1$, $\underline{\Sigma}_t$ — тензорно- \underline{q}_t — векторно- \underline{s}_t и $\underline{\psi}_t$ скалярнозначные функционалы своих аргументов, зависящих от $\tilde{\Theta}^i$, τ . Величины же $\tilde{\Theta}^i, t$ рассматриваются как параметры.

Равенства (9.2) являются математической записью принципа термодинамической определенности: значения тензора напряжения, вектора теплового потока, плотности энтропии и свободной (либо внутренней) энергии в материальной точке $\tilde{\Theta}^i$ в рассматриваемый момент времени t определяются историей ($\tau \leq t$) движения и температуры всей частицы $(\tilde{\Theta}^i)$, центром которой является рассматриваемая точка.

В сформулированном принципе учитывается «близкодействие» определяющих процесс межмолекулярных сил и общий принцип причинности естественных процессов [10].

При рассмотрении физических процессов важно, собственно, не абсолютное положение участвующих в процессе объектов, а их взаимное расположение, не абсолютное время тех или иных событий, а временные интервалы между ними. Поэтому особую роль играют изменения пространственно-временной системы отсчета, сохраняющие расстояния между точками и временные интервалы.

Указанные преобразования имеют вид

$$\underline{R}' = \underline{C}(\tau) + \underline{L}(\tau)^* \cdot \underline{R}, \quad \tau' = \tau - a, \quad (9.3)$$

где $\underline{C}(\tau)$ — вектор смещения начала отсчета, $\underline{L}(\tau)$ — ортогональный тензор поворота пространства (см. конец § 2), a — (постоянный) сдвиг времени. Из (9.3) следует для вектора \underline{u}

$$\underline{u}' = \underline{L} \cdot \underline{u} \quad (9.4)$$

и тензора (с учетом его диадного представления) второго ранга

$$\underline{T}' = \underline{L} \cdot \underline{T}_\kappa \cdot \underline{L}^*. \quad (9.5)$$

Сформулируем принцип материальной объективности: определяющие уравнения (9.2) инвариантны относительно изменения системы отсчета (9.3) (или, как говорят физики, не зависят от положения наблюдателя).

Из этого физически почти очевидного утверждения следует [10], что, например, первое из определяющих уравнений (9.2) должно иметь вид

$$\underline{\Sigma}(t) = \overline{\Sigma}_{\tau < t} \{ \underline{\Delta R}(\tau), T(\tau) \}, \quad (9.6)_1$$

причем функционал должен при любом ортогональном тензоре второго ранга $L(\tau)$ удовлетворять тождеству

$$\overline{\Sigma}_{\tau < t} \{ L(\tau) \cdot \underline{\Delta R}(\tau), T(\tau) \} = L(t) \cdot \overline{\Sigma}_{\tau < t} \{ \underline{\Delta R}(\tau), T(\tau) \} \cdot L^*(t). \quad (9.6)_2$$

Здесь $\underline{\Delta R}(\tau) = \underline{R}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau) - \underline{R}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau)$ — вектор, соединяющий центр материальной частицы с произвольной ее точкой. Опущенный по сравнению с (9.2) нижний индекс t у функционала означает, что последний не зависит явно от t .

В силу малости частицы вектор $\underline{\Delta R}(\tau)$ можно заменить на $d\underline{R}(\tau) = \underline{F}(\tau) \cdot d\underline{R}$ (4.15). Вектор $d\underline{R} = \underline{R}_x d\Theta^x$ постоянен во все время движения. Поэтому, коль скоро замена $\underline{\Delta R}$ на $d\underline{R}$ произведена, аргументом функционала следует считать историю градиента движения $\underline{F}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau)$. По той же причине можно положить $T(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau) \simeq T(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau) + \underline{\Delta T}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau) \cdot d\underline{R}$, а в качестве аргументов функционалов считать $T(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau)$ и $\underline{\nabla}T(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; \tau)$. По-видимому, разумно [11] несколько сузить класс рассматриваемых материалов, заменив последний аргумент на $\underline{\nabla}T(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3; t)$, то есть учитывать не историю градиента температуры, а лишь его значение в рассматриваемый момент времени t .

Сказанное приводит к следующим определяющим уравнениям (Θ^i в аргументах для краткости опускаем)

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}(t) &= \overline{\Sigma}_{\tau < t} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla}T(t) \}; \\ \underline{q}(t) &= \overline{q}_{\tau < t} \{ \cdot \cdot \cdot \}; \\ \underline{s}(t) &= \overline{s}_{\tau < t} \{ \cdot \cdot \cdot \}; \\ \underline{\psi}(t) &= \overline{\psi}_{\tau < t} \{ \cdot \cdot \cdot \}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

При этом выписанные функционалы для любого ортогонального тензора $\underline{L}(\tau)$ должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{\tau < t}} \{ \underline{L}(\tau) \cdot \underline{F}(\tau), T(\tau), \underline{\nabla} T(t) \} &= \\ &= \underline{L}(t) \cdot \overline{\sum_{\tau < t}} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} \cdot \underline{L}^*(t); \\ \overline{\underline{q}} \{ . . . \} &= \underline{L}(t) \cdot \overline{\underline{q}} \{ . . . \}; \\ \overline{\underline{s}} \{ . . . \} &= \overline{\underline{s}} \{ . . . \}, \quad \overline{\underline{\psi}} \{ . . . \} = \overline{\underline{\psi}} \{ . . . \}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Отметим, что проделанная замена аргументов при всей своей естественности не является самоочевидной. Более того, используются материалы (модели), в которых рассматриваются градиенты и более высоких порядков. В отличие от них материалы, для описания которых используются только градиенты первого порядка \underline{F} и $\underline{\nabla} T$, называют **простыми материалами**. Все дальнейшее относится только к ним.

Используем для дальнейшего преобразования уравнений (9.7) полярное разбиение \underline{F} (5.7), (5.8). Равенства (9.8) должны выполняться и при ортогональном тензоре $\underline{Q}^*(\tau)$, то есть (9.7)

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{\tau < t}} \{ \underline{\Lambda}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} &= \underline{Q}^*(t) \overline{\sum_{\tau < t}} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} \cdot \underline{Q}(t); \\ \overline{\underline{q}} \{ . . . \} &= \underline{Q}^*(t) \cdot \overline{\underline{q}} \{ . . . \}; \\ \overline{\underline{s}} \{ . . . \} &= \overline{\underline{s}} \{ . . . \}; \\ \overline{\underline{\psi}} \{ . . . \} &= \overline{\underline{\psi}} \{ . . . \}. \end{aligned}$$

Заменяя здесь функционалы правых частей их выражениями из (9.7), находим, что определяющие уравнения необходимо должны иметь следующую структуру:

$$\begin{aligned} \underline{Q}^*(t) \cdot \underline{\sum}(t) \cdot \underline{Q}(t) &= \overline{\sum_{\tau < t}} \{ \underline{\Lambda}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \}; \\ \underline{Q}^*(t) \cdot \underline{q}(t) &= \overline{\underline{q}} \{ . . . \}; \\ s(t) &= \overline{\underline{s}} \{ . . . \}; \\ \underline{\psi}(t) &= \overline{\underline{\psi}} \{ . . . \}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Далее, согласно (5.7), (5.8) и (4.16),

$$\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} = \tau (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}),$$

$$\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} = \tau \cdot \underline{\Lambda} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\Lambda}; \quad \tau = |\underline{\Lambda}|;$$

$$\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} = \tau \underline{\Lambda}^{-1} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\Lambda}^{-1};$$

$$\frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}) = \frac{1}{2} \tau \{ \underline{\Lambda}^{-1} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) + (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\Lambda}^{-1} \};$$

$$\frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}) = \frac{1}{2} \tau \{ \underline{\Lambda} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) + (\underline{Q}^* \cdot \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\Lambda} \}; \quad (9.10)$$

$$\underline{Q}^* \cdot \tau \underline{q} = \tau (\underline{Q}^* \cdot \underline{q}); \quad \underline{Q}^* \cdot \underline{\Delta} T = \underline{\Delta}^{-1} \cdot \underline{\nabla} T;$$

$$\underline{F}^* \cdot \tau \underline{q} = \tau \underline{\Lambda} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{q}); \quad \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\nabla} T = \underline{\Delta}^{-2} \cdot \underline{\nabla} T;$$

$$\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{q} = \tau \underline{\Lambda}^{-1} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{q}); \quad \underline{F}^* \cdot \underline{\nabla} T = \underline{\nabla} T.$$

Сопоставляя приведенные выражения с (7.39) и (8.21), видим, что энергетические величины отличаются от входящих в (9.9) лишь множителями, зависящими от $\underline{\Lambda}$. Но функционалы зависят от этого тензора произвольным образом. Поэтому определяющим уравнениям можно придать следующую форму:

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} (t) &= \underline{\Sigma} \{ \underline{\varepsilon} (\tau), T (\tau); \underline{\nabla} T (t) \}; \\ \underline{q} (t) &= \underline{q} \{ \underline{\varepsilon} (\tau), T (\tau); \underline{\nabla} T (t) \}; \\ s (t) &= \underline{s} \{ \underline{\varepsilon} (\tau), T (\tau); \underline{\nabla} T (t) \}; \\ \underline{\psi} (t) &= \underline{\psi} \{ \underline{\varepsilon} (\tau), T (\tau); \underline{\nabla} T (t) \}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Отметим, что выписанные соотношения справедливы и для шестой пары энергетических тензоров (7.33). В этом нетрудно убедиться, умножая скалярно (9.7) слева на $\tau \underline{F}^{-1} = \underline{F} \underline{F}^{-1}$ (6.1) и включая этот множитель в произвольный по \underline{F} функционал.

**§ 10. ИЗМЕНЕНИЕ ОТСЧЕТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ.
АНИЗОТРОПИЯ МАТЕРИАЛА**

Наряду со введенной в § 4, рассмотрим некоторую другую отсчетную конфигурацию \underline{R}' , связанную с первой функциональной связью

$$\underline{\dot{R}}' = \underline{\lambda}(\underline{R}). \quad (10.1)$$

Эта вектор-функция в общем случае не является линейным ортогональным преобразованием типа (9.3). Действительно, рассматриваемые две отсчетные конфигурации определяются положением тела в различные моменты времени, а, значит, отражают происшедшую за это время в теле деформацию. Из (10.1) следует линейная связь между дифференциалами радиусов-векторов

$$d\underline{\dot{R}}' = \underline{P} \cdot d\underline{\dot{R}}, \quad (10.2)$$

где

$$\underline{P} = d\underline{\lambda}/d\underline{R} — \quad (10.3)$$

тензор второго ранга, градиент вектора $\underline{\lambda}$.

Выписывая равенство (4.15) для обеих конфигураций и приравнивая их, получаем

$$(d\underline{R} = \underline{F} \cdot d\underline{R}) \quad \underline{F}'(\tau) \cdot d\underline{R}' = \underline{F}(\tau) \cdot d\underline{R}.$$

Отсюда и из (10.2) следует $\underline{F}'(\tau) \cdot \underline{P} = \underline{F}(\tau)$, то есть

$$\underline{F}'(\tau) = \underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}^{-1} \quad \text{или} \quad \underline{P} = \underline{F}'^{-1}(\tau) \cdot \underline{F}(\tau). \quad (10.4)$$

Выписанные соотношения связывают градиенты движения в обеих отсчетных конфигурациях и **градиент изменения отсчетной конфигурации** \underline{P} .

Соотношение (10.1) позволяет сохранить при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой одни и те же материальные координаты Θ^j . При этом из (10.2) следует:

$$\underline{\dot{R}}'_i = \underline{P} \cdot \underline{R}_i; \quad \underline{\dot{R}}'^j = \underline{R}'^j \cdot \underline{P}^{-1}. \quad (10.5)$$

Пусть \underline{k} и \underline{k}' — две локальные отсчетные конфигурации материальной частицы. Тогда, например, для функционала (9.7) справедливо соотношение

$$\sum_{\tau < t} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} = \sum_{\tau < t} \{ \underline{F}'(\tau), T(\tau); \underline{\dot{\nabla}}' T(t) \}, \quad (10.6)$$

где, согласно (10.4), (10.5) и (4.16),

$$\underline{F}'(\tau) = \underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}^{-1}; \quad \underline{\nabla}' T = \underline{\nabla} T \cdot \underline{P}^{-1}. \quad (10.7)$$

Зависимость (10.6) является записью физически очевидного требования: при переходе к новой системе отсчета необходимо соответствующим образом пересчитывать связанные с выбором системы отсчета аргументы функционалов. При помощи (10.7) перепишем соотношения (10.6) так:

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau < t} \underline{\kappa} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} = \\ & = \sum_{\tau < t} \underline{\kappa}' \{ \underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}^{-1}, T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \cdot \underline{P}^{-1} \}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Может случиться, что у материальной частицы имеются две локальные отсчетные конфигурации $\underline{\kappa}$ и $\underline{\kappa}'$ такие, что в них материал неразличим по своим термомеханическим свойствам. Применительно к функционалу (9.7) это означает, что

$$\rho_{\underline{\kappa}'} = \rho_{\underline{\kappa}}; \quad (10.9)$$

$$\sum_{\tau < t} \underline{\kappa}' \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} = \sum_{\tau < t} \underline{\kappa} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \}, \quad (10.10)$$

то есть в обеих конфигурациях равны плотности и совпадают функционалы определяющих уравнений.

Из первого условия следует (6.1), (7.18)

$$\text{III}_P = 1, \quad (10.11)$$

то есть градиенту изменения отсчетной конфигурации \underline{P} отвечает единичный третий главный инвариант. Такие тензоры называют **унимодулярными**.

Из (10.6) и (10.10) следует равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau < t} \underline{\kappa}' \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} = \\ & = \sum_{\tau < t} \underline{\kappa}' \{ \underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}^{-1}, T(\tau); \underline{\nabla} T \cdot \underline{P}^{-1} \}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

которое должно выполняться при всевозможных $\underline{F}(\tau), T(\tau), \underline{\nabla} T(t), (\tau \leq t)$.

Очевидно, что и обратно, любой унимодулярный тензор \underline{H} , удовлетворяющий при всевозможных $\underline{F}(\tau), T(\tau), \underline{\nabla} T(t), (\tau \leq t)$ равенству

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau < t} \underline{\kappa} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} = \\ & = \sum_{\tau < t} \underline{\kappa} \{ \underline{F}(\tau) \cdot \underline{H}, T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \cdot \underline{H} \}, \end{aligned} \quad (10.13)$$

сопоставляет отсчетной конфигурации \underline{k} другую \underline{k}^H , такую, что в обеих конфигурациях описываемые этими уравнениями термомеханические свойства неразличимы. Согласно (10.12), (10.10) и (10.4)—это конфигурация, определяемая преобразованием $d\underline{R}^H = \underline{H} \cdot d\underline{R}$. Множество унимолярных тензоров, удовлетворяющих равенству (10.13) и аналогичным равенствам для других функционалов из (9.7) при всевозможных $\underline{F}(\tau)$, $T(\tau)$, $\underline{\nabla} T(t)$ ($\tau \leq t$), образуют **группу анизотропии**. Группа анизотропии (ее состав зависит, вообще говоря, от выбора локальной отсчетной конфигурации. Действительно, применяя равенство (10.8) к обеим частям (10.13), получаем

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k}' \{ \underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}^{-1}, \dots \} = \overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k}' \{ \underline{F}(\tau) \cdot \underline{H} \cdot \underline{P}^{-1}, \dots \}.$$

В силу упомянутой произвольности $\underline{F}(\tau)$ его можно заменить на произвольное $\underline{F}(\tau) \cdot \underline{P}$. В результате приходим к равенству

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k}' \{ \underline{F}(\tau), \dots \} = \overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k}' \{ \underline{F}(\tau) \cdot (\underline{P} \cdot \underline{H} \cdot \underline{P}^{-1}), \dots \},$$

сопоставление которого с (10.8) показывает, что каждому тензору $\underline{H} \in \underline{g}_k \equiv \underline{g}$ отвечает тензор $\underline{P} \cdot \underline{H} \cdot \underline{P}^{-1} \in \underline{g}_{k'} \equiv \underline{g}'$, что символически запишем так:

$$\underline{g}' = \underline{P} \underline{g} \underline{P}^{-1}. \quad (10.14)$$

Наиболее интересно множество ортогональных тензоров (элементов) группы анизотропии. Для него справедливо утверждение: **ортогональный тензор \underline{L} принадлежит группе анизотропии \underline{g} , если и только если равенства**

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \{ \underline{L} \cdot \underline{F}(\tau) \cdot \underline{L}^*, T(\tau); \underline{L} \cdot \underline{\nabla} T(t) \} = \underline{L} \overline{\sum}_{\tau < t} \{ \underline{F}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \} \cdot \underline{L}^*;$$

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \} = \underline{L} \overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \};$$

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \} = \overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \};$$

$$\overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \} = \overline{\sum}_{\tau < t} \{ \dots \}$$

выполняются при всевозможных $\underline{F}(\tau)$, $T(\tau)$, $\underline{\nabla} T(t)$ ($\tau \leq t$). (10.15)

Докажем, например, первое из них. Для этого заменим в (10.13) $\underline{F}(\tau)$ на $\underline{L} \cdot \underline{F}(\tau)$ и \underline{H} на \underline{L}^* . Тогда

$$\begin{aligned} & \overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k} \{ \underline{L} \cdot \underline{F}(\tau), T(\tau), \underline{\nabla} T(t) \} = \\ & = \overline{\sum}_{\tau < t} \underline{k} \{ \underline{L} \cdot \underline{F}(\tau) \cdot \underline{L}^*, T(\tau); \underline{\nabla} T(t) \cdot \underline{L}^* \}. \end{aligned}$$

Заменяя функционал в левой части его выражением по (9.8), приходим к требуемому равенству (значок $\bar{\cdot}$ опущен, так как локальная отсчетная конфигурация может быть выбрана произвольно). Вторая часть утверждения доказывается «обратным ходом».

Подобно тому, как был осуществлен переход от уравнений (9.7) к (9.11), равенства (10.15) могут быть сведены к утверждению: ортогональный тензор \underline{L} принадлежит группе анизотропии, если и только если равенства

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{\tau < t} \{ \underline{L} \cdot \underline{\varepsilon}(\tau) \cdot \underline{L}^*, T(\tau); \underline{L} \cdot \underline{\nabla} T(t) \}} &= \underline{L} \cdot \overline{\sum_{\tau < t} \{ \underline{\varepsilon}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla} T(\tau) \}} \cdot \underline{L}^*; \\ \overline{\underline{q}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \} &= \underline{L} \cdot \overline{\underline{q}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \}; \\ \overline{\underline{s}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \} &= \overline{\underline{s}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \}; \\ \overline{\underline{\psi}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \} &= \overline{\underline{\psi}} \{ \cdot \cdot \cdot \cdot \} \end{aligned}$$

(10.16)

выполняются при всевозможных $\underline{\varepsilon}(\tau)$, $T(\tau)$, $\underline{\nabla} T(t)$ ($\tau \leq t$).

§ 11. АНИЗОТРОПНЫЕ И ИЗОТРОПНЫЕ ТВЕРДЫЕ МАТЕРИАЛЫ

В отличие от жидкости в твердых материалах имеются предпочтительные конфигурации, примером которых могут служить естественные (ненапряженные) состояния. Переход от одной конфигурации к другой связан, вообще говоря, с изменением реакции материала на историю деформации.

Сказанное приводит к следующему определению твердого материала: материал называется **твердым**, если имеется локальная отсчетная конфигурация — \underline{k} , такая, что соответствующая ей группа анизотропии есть подгруппа полной ортогональной группы. При этом \underline{k} называют неискаженной конфигурацией твердого материала.

Материал называют **анизотропным**, если упомянутая подгруппа является **истинной** (то есть не совпадающей с самой группой или тривиальной, состоящей из единичного элемента — тождественного преобразования). Тип анизотропии материала характеризуется группой анизотропии \underline{g} . При этом для всех $\underline{L} \in \underline{g}$, историй деформации, историй температуры и текущих значений градиента температуры должны выполняться равенства (10.16).

Материал с группой анизотропии, совпадающей с полной ортогональной группой, называют **изотропным**.

В § 10 было отмечено, что вид определяющих уравнений и группа анизотропии зависят не только от свойств материала, но и от выбора отсчетной конфигурации. Пусть g и g' — группы анизотропии твердого материала, отвечающие двум неискаженным конфигурациям k и k' , связанным градиентом изменения конфигурации P . По (10.14) ортогональные тензоры — элементы групп анизотропии (k и k') связаны соотношениями вида $\underline{L}' = \underline{P} \cdot \underline{L} \cdot \underline{P}^{-1}$ или

$$\underline{L}' \cdot \underline{P} = \underline{P} \cdot \underline{L} \quad (\underline{L}' \in g', \underline{L} \in g). \quad (11.1)$$

Пусть (ср. (5.7), (5.8))

$$\underline{P} = \underline{Q} \cdot \underline{\Lambda} \quad (\underline{\Lambda} = \sqrt{\underline{P}^* \cdot \underline{P}} = \underline{\Lambda}^*, \quad \underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{Q}^* = \underline{G}) \quad (11.2)$$

полярное разбиение \underline{P} . Из (11.1) имеем ($\underline{L} \cdot \underline{L}^* = \underline{G}$);

$$(\underline{L}' \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\Lambda} = \underline{Q} \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L} = (\underline{Q} \cdot \underline{L}) \cdot (\underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L}).$$

Так как полярное разбиение единственно, а первые множители левой и правой частей ортогональны, в то время как вторые положительно-определенные¹, то

$$\underline{L}' \cdot \underline{Q} = \underline{Q} \cdot \underline{L} \quad \text{и} \quad \underline{\Lambda} = \underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L}. \quad (11.3)$$

Запишем первое условие в виде $\underline{L}' = \underline{Q} \cdot \underline{L} \cdot \underline{Q}^*$. Отсюда следует, что элементы группы анизотропии в новом неискаженном состоянии g' определяются поворотом элементов группы g . При этом поворот осуществляет ортогональный тензор \underline{Q} .

Условие же (11.3) налагает на тензор $\underline{\Lambda}$ (характеризующий деформацию материальной частицы при переходе от локальной отсчетной конфигурации — k и k') требование быть инвариантным относительно преобразования (11.3), осуществляемого любым тензором \underline{L} из группы анизотропии материала. Пользуясь таблицей инвариантных базисных тензоров [10], нетрудно выписать в явном виде структуру тензора деформации $\underline{\Lambda}$, для различных сингоний и текстур

¹ По (1.33)

$$(\underline{Q} \cdot \underline{L})^* \cdot (\underline{Q} \cdot \underline{L}) = \underline{L}^* \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{L} = \underline{L}^* \cdot \underline{L} = \underline{G};$$

$$(\underline{L}' \cdot \underline{Q})^* \cdot (\underline{L}' \cdot \underline{Q}) = \underline{Q}^* \cdot (\underline{L}'^* \cdot \underline{L}') \cdot \underline{Q} = \underline{Q}^* \cdot \underline{Q} = \underline{G};$$

$$(\underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L})^* = \underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L}.$$

Положительная же определенность последнего тензора следует из таковой для тензора $\underline{\Lambda}$. Действительно, $|\underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L} - \lambda \underline{G}| = |\underline{L}^* \cdot (\underline{\Lambda} - \lambda \underline{G}) \cdot \underline{L}| = |\underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda}| \cdot |\underline{\Lambda} - \lambda \underline{G}| = |\underline{\Lambda} - \lambda \underline{G}|$. Таким образом, тензоры $\underline{L}^* \cdot \underline{\Lambda} \cdot \underline{L}$ и $\underline{\Lambda}$ имеют одни и те же главные значения. Последние же для $\underline{\Lambda}$ (по определению полярного разложения) положительны.

Сингонии и текстуры	Вид тензора деформации
триклинная	$\underline{\Lambda} = \lambda_\alpha \underline{G}_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, 6)$
моноклинная	$\underline{\Lambda} = \lambda_1 \underline{G}_1 + \lambda_2 \underline{G}_2 + \lambda_3 \underline{G}_3 + \lambda_4 \underline{G}_4$
ромбическая	$\underline{\Lambda} = \lambda_1 \underline{G}_1 + \lambda_2 \underline{G}_2 + \lambda_3 \underline{G}_3$
тетрагональная	} $\underline{\Lambda} = \lambda_1 \underline{G}_1 + \lambda_2 \underline{G}_2$
тригональная	
гексагональная	
$\infty, \infty : m, \infty \cdot m, m : \infty \cdot m, \infty : 2$	
кубическая	} $\underline{\Lambda} = \lambda_1 \underline{G}$
гиротропная (∞ / ∞)	
изотропная $(\infty / \infty \cdot m)$	

(11.4)

Здесь λ_i — инварианты для преобразований из рассматриваемой группы анизотропии.

Таким образом, переход от одной неискаженной конфигурации материала к другой имеет место, если и только если тензор деформации, отвечающий этому переходу, имеет вид, предписываемый таблицей (11.4). Так, например, для изотропного материала указанный переход имеет место лишь при дилатации (деформации всестороннего растяжения — сжатия). Переход же из неискаженной конфигурации в какую-нибудь другую сужает, вообще говоря, группу анизотропии материала.

Перейдем к изотропному материалу, группой анизотропии которого является полная ортогональная группа. Поскольку последняя содержит любой поворот, изотропный материал не имеет предпочтительных направлений. Другими словами, никакие термомеханические испытания не могут обнаружить, была ли материальная частица повернута перед испытаниями. Любой такой поворот никак не влияет на ход последующей деформации.

Вернемся к уравнениям (9.11), записав первое из них в виде

$$\underline{Q}(t) \cdot \underline{\sum}^3(t) \cdot \underline{Q}^*(t) = \underline{Q}(t) \cdot \underline{\sum}^3_{\tau < t} \{ \underline{\varepsilon}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla}^3 T(\tau) \} \cdot \underline{Q}^*(t).$$

Равенства (10.16) для изотропного материала должны выполняться при любом ортогональном тензоре \underline{L} . В частности, при $\underline{L} = \underline{Q}(t)$

$$\begin{aligned} & \underline{Q}(t) \cdot \underline{\sum}^3_{\tau < t} \{ \underline{\varepsilon}(\tau), T(\tau); \underline{\nabla}^3 T(\tau) \} \cdot \underline{Q}^*(t) = \\ & = \underline{\sum}^3_{\tau < t} \{ \underline{Q}(t) \cdot \underline{\varepsilon}(\tau) \cdot \underline{Q}^*(t), T(\tau); \underline{Q}(t) \cdot \underline{\nabla}^3 T(\tau) \}. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти выражения по τ , получаем с учетом (3.25) и (7.23)

$$\frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} = \text{tr} \left\{ \frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \right\} = 0.$$

Разбивая $d\lambda^{(i)}/d\varepsilon$ на сумму симметричной и кососимметричной частей, и учитывая, что свертка кососимметричной части с симметричным тензором $\underline{\underline{\varepsilon}}$ равна нулю (§ 1), получаем

$$\text{tr} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} \right)^* \right] \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \right\} = 0. \quad (12.3)$$

Внутренние связи реализуются некоторыми силами, воспрепятствующими соответствующие виды движения. Рассмотрение многочисленных примеров связей позволяет [10] установить определяющее свойство этих сил: **они не производят работы на действительных (совместных с внутренними связями) перемещениях материальной частицы** (аналогично тому, как, например, сила тяжести не производит работы при перемещении тяжелого тела по горизонтальной плоскости).

Если обозначить через $\underline{\underline{N}}^{(i)}(t)$ энергетический тензор напряжений, реализующий i -ую связь, то условие его нулевой работы записывается, согласно (7.31), в виде $\text{tr} \left\{ \underline{\underline{N}}^{(i)} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \right\} = 0$. Соотношение (12.3) показывает, что выписанным уравнениям можно удовлетворить, приняв

$$\underline{\underline{N}}^{(i)}(\tau) = q^{(i)} \frac{1}{2} \left[\frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} + \left(\frac{d\lambda^{(i)}}{d\varepsilon} \right)^* \right] \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12.4)$$

где $q^{(i)}$ — произвольные скаляры.

Сформулируем уточненный принцип термодинамической определенности: при внутренних связях вида (12.1), (12.2) энергетический тензор напряжений $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ определяется историями градиента движения и температуры, а также градиентом температуры, с точностью до дополнительных слагаемых типа (12.4) при $\tau = t$.

Тензор $\left(\sum_{i=1}^n \underline{\underline{N}}^{(i)} \right)$ называют тензором сверхнапряжений.

Сказанное приводит к следующему практическому правилу: при наличии внутренних связей энергетический тензор напряжений в определяющих уравнениях следует заменять на тензор сверхнапряжений.

Наиболее часто используемой внутренней связью является условие несжимаемости материала (6.1), (7.32) ($\underline{\dot{C}} = \underline{\dot{\Lambda}}^2$)

$$\lambda \left(\frac{1}{2} \underline{\dot{C}} \right) \equiv \text{III}_c - 1 = 0.$$

Отсюда и из (12.4) получаем, с учетом (3.30), (5.24),

$$\underline{\dot{N}} \equiv \underline{F}^{-1} \cdot \underline{N} \cdot \underline{F}^{-1*} = q \text{III}_c \underline{C}^{-1}$$

и по (5.6) ($\tau = 1$, $\underline{C}^{-1} = \underline{G} - 2\Theta$)

$$\underline{N} = \underline{F} \cdot \{q \text{III}_c \underline{C}^{-1}\} \cdot \underline{F}^* = q \text{III}_c \underline{F} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{-1*}) \cdot \underline{F}^* = q \text{III}_c \underline{G}$$

и после замены $q \text{III}_c$ на также произвольную функцию ρ

$$\boxed{\underline{N} = \rho \underline{G}}. \quad (12.5)$$

Таким образом, тензор напряжений в несжимаемом материале определяется с точностью до произвольного всестороннего давления.

Зависимости (12.5), (7.32), (7.33), (5.7), (5.8), (5.10) и (5.11) приводят к таблице

	I	II	III	IV	V	VI
$\underline{\dot{N}}$	$\rho \underline{\Lambda}^{-2}$	$\rho \underline{\Lambda}^2$	$\rho \underline{G}$	$\rho \underline{\Lambda}^{-1}$	$\rho \underline{\Lambda}$	$\rho \underline{F}^{-1}$
$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{N}} \cdot \underline{Q}^*$	$\rho \underline{\Lambda}^{-2}$	$\rho \underline{\Lambda}^2$	$\rho \underline{G}$	$\rho \underline{\Lambda}^{-1}$	$\rho \underline{\Lambda}$	$\rho \underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{Q}^*$

(12.6)

§ 13. ОБЪЕКТИВНЫЕ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ

В механике твердого деформируемого тела часто приходится рассматривать скорость изменения напряжения. Мало пригоден для ее описания тензор $\underline{\dot{\Sigma}}$. Поясним это на простом примере. Пусть в отсчетной конфигурации прямолинейный стержень растягивается вдоль оси, то есть $\underline{\Sigma}_0 = \sigma_{(3)} \underline{e}_3 \underline{e}_3 = \text{const}$. Пусть, далее при неизменном растягивающем напряжении стержень поворачивается. Тогда $\underline{\Lambda} = \underline{G}$, $\underline{F} = \underline{Q}$ и по (5.21)

$$\underline{\dot{\Sigma}} = \sigma_{(3)} (\underline{Q} \cdot \underline{e}_3) (\underline{Q} \cdot \underline{e}_3) = \underline{Q} \cdot (\sigma_{(3)} \cdot \underline{e}_3 \underline{e}_3) \cdot \underline{Q}^* = \underline{Q} \cdot \underline{\Sigma}_0 \cdot \underline{Q}^*,$$

где \underline{Q} — изменяющийся во времени ортогональный тензор поворота. Отсюда и следует, что в рассматриваемом случае $\underline{\dot{\Sigma}} \neq 0$, хотя напряженное состояние явно не изменяется.

От указанного недостатка свободны энергетические тензоры напряжения (7.32). Все они в рассматриваемом случае жесткого поворота ($\underline{\dot{\Lambda}} = \underline{G}$) равны постоянной величине $\underline{Q}^* \cdot \underline{\Gamma} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} = \underline{\Sigma}_0 = \text{const}$. Более того, в § 9 было установлено, что энергетические тензоры удовлетворяют принципу материальной объективности. Такими же, очевидно, являются и их производные по времени, именуемые поэтому **объективными скоростями изменения напряжения**.

Используя зависимости (7.32), (7.35), (7.6) и (4.12), введем пять скоростей, употребив более или менее установившуюся терминологию: **контравариантно-конвективная**

$$\begin{aligned} \{ \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \}' &= \{ \underline{\dot{\Lambda}}^{-1} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\dot{\Lambda}}^{-1} \}' = \\ &= (\underline{\tau} \underline{\Sigma}^{\alpha\beta}) \circ \underline{R}_\alpha \underline{R}_\beta = [(\Lambda^{-1})_{\alpha\gamma} \tau \Sigma_{(\gamma\delta)} (\Lambda^{-1})_{(\delta\beta)}] \cdot \underline{\dot{e}}_\alpha \underline{\dot{e}}_\beta; \end{aligned} \quad (13.1)$$

ковариантно-конвективная (скорость по Котреллу)

$$\begin{aligned} \{ \underline{F}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} \}' &= \{ \underline{\dot{\Lambda}} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\dot{\Lambda}} \}' = \\ &= (\underline{\tau} \underline{\Sigma}_{\alpha\beta}) \cdot \underline{\dot{R}}^\alpha \underline{\dot{R}}^\beta = [\Lambda_{(\alpha\gamma)} \tau \Sigma_{(\gamma\delta)} \Lambda_{(\delta\beta)}] \cdot \underline{\dot{e}}_\alpha \underline{\dot{e}}_\beta; \end{aligned} \quad (13.2)$$

соповоротная (скорость по Яуману)

$$\{ \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \}' = (\tau \Sigma_{(\alpha\beta)}) \cdot \underline{\dot{e}}_\alpha \underline{\dot{e}}_\beta; \quad (13.3)$$

контравариантно-конвективная—соповоротная (скорость по Био)

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}) \right\}' = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} [\underline{\dot{\Lambda}}^{-1} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) + (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\dot{\Lambda}}^{-1}] \right\}' = \\ &= \frac{1}{2} [(\Lambda^{-1})_{(\alpha\gamma)} \tau \Sigma_{(\gamma\beta)} + \tau \Sigma_{(\alpha\gamma)} (\Lambda^{-1})_{(\gamma\beta)}] \cdot \underline{\dot{e}}_\alpha \underline{\dot{e}}_\beta, \end{aligned} \quad (13.4)$$

ковариантно-конвективная—соповоротная

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}) \right\}' = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} [\underline{\dot{\Lambda}} \cdot (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) + (\underline{Q}^* \cdot \underline{\tau} \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q}) \cdot \underline{\dot{\Lambda}}] \right\}' = \\ &= \frac{1}{2} [\Lambda_{(\alpha\gamma)} \tau \Sigma_{(\gamma\beta)} + \tau \Sigma_{(\alpha\gamma)} \Lambda_{(\gamma\beta)}] \cdot \underline{\dot{e}}_\alpha \underline{\dot{e}}_\beta. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Выявим физический смысл рассматриваемых объективных скоростей. Прежде всего по (13.1)—(13.3) и (4.12)

$$\begin{aligned}
 \tau \underline{\Sigma} &= (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta = \left| \begin{array}{l} \underline{F} \cdot \{ \underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \} \cdot \underline{F}^* = (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \cdot \hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta ; \\ \underline{F}^{-1*} \cdot \{ \underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} \} \cdot \underline{F}^{-1} = (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \cdot \hat{R}^\alpha \hat{R}^\beta ; \\ \underline{Q} \cdot \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \} \cdot \underline{Q}^* = (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \cdot \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta . \end{array} \right. \\
 &= (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \hat{R}^\alpha \hat{R}^\beta = \\
 &= (\tau \hat{\Sigma}^{\alpha\beta}) \hat{e}_\alpha \hat{e}_\beta .
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

Из первой строки видно, что тензор $\underline{F} \cdot \{ \underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \} \cdot \underline{F}^*$ является скоростью изменения напряжения внутри (движущегося и деформирующегося) ковариантного материального базиса. Контравариантно-конвективная скорость $\{ \underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \}$ представляет собой соответствующий тензор (4.12), отнесенный к отсчетной конфигурации. Если в качестве отсчетной выбрать текущую конфигурацию в рассматриваемый момент времени, то $\underline{F} = \underline{\Lambda} = \underline{Q} = \underline{G}$, и контравариантно-конвективную скорость можно рассматривать как **мгновенную скорость** изменения напряжения внутри ковариантного материального базиса.

Аналогичный смысл имеет и ковариантно-конвективная скорость, но по отношению к контравариантному материальному базису. Сопоротная скорость (по Яуману) является мгновенной скоростью изменения напряжения в жестком ортонормированном базисе, вращающемся со скоростью вращения материальной частицы. Остальные скорости являются промежуточными.

Приняв в качестве отсчетной мгновенную текущую конфигурацию, имеем $\underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}^{-1} = \underline{Q} = \underline{Q}^* = \underline{G}$; $\underline{\Lambda}^{-1'} = -\underline{\Lambda}'$, и из (13.1) — (13.5) следуют связи между мгновенными объективными скоростями

$$\begin{aligned}
 \{ \underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*} \}' &= \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \}' - \{ \underline{\Lambda}' \cdot \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{\Lambda}' \}; \\
 \{ \underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F} \}' &= \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \}' + \{ \underline{\Lambda}' \cdot \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{\Lambda}' \}; \\
 \left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^{-1} \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}^{-1*}) \right\}' &= \\
 &= \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \}' - \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}' \cdot \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{\Lambda}'); \\
 \left\{ \frac{1}{2} (\underline{F}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} + \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{F}) \right\}' &= \\
 &= \{ \underline{Q}^* \cdot \tau \underline{\Sigma} \cdot \underline{Q} \}' + \frac{1}{2} (\underline{\Lambda}' \cdot \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma} \cdot \underline{\Lambda}').
 \end{aligned} \tag{13.7}$$

Дифференцируя равенство $\underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda}^{-1} = \underline{G}$, получаем

$$\underline{\Lambda}^{-1'} = -\underline{\Lambda}^{-1} \cdot \underline{\Lambda}' \cdot \underline{\Lambda}^{-1}. \tag{13.8}$$

Дифференцирование же энергетических тензоров деформации (7.32) приводит, с учетом (13.8), к выражениям для $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$:

$$\begin{aligned} \text{I} & \quad \frac{1}{2} (\underline{\underline{\dot{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{\dot{\Lambda}}}); \\ \text{II} & \quad \frac{1}{2} (\underline{\underline{\Lambda}}^{-2} \cdot \underline{\underline{\dot{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} + \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-2}); \\ \text{III} & \quad \frac{1}{2} (\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{\Lambda}}} + \underline{\underline{\dot{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}); \\ \text{IV} & \quad \underline{\underline{\dot{\Lambda}}}; \\ \text{V} & \quad \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\dot{\Lambda}}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}^{-1}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Если в качестве отсчетной принята мгновенная текущая конфигурация, то $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{G}}$ и

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\Lambda}}}. \quad (13.10)$$

Величина (13.10), называемая **эйлеровой скоростью деформации**, является, таким образом, общей скоростью изменения энергетических тензоров деформации относительно отсчетной конфигурации, совпадающей мгновенно с текущей конфигурацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Изд-во МГУ, 1971.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М., «Наука», 1970.
4. Галимов К. З. О некоторых задачах теории упругости при произвольных смещениях. — «Учен. зап. Казанского ун-та», 1952, т. 112, кн. 3.
5. Новожилов В. В. О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов. — ПММ, 1951, т. 15, вып. 6, с. 709—722.
6. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругих телах. — ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 183—194.
7. Новожилов В. В. О классе сложных нагружений, которые характеризуются сохранением направлений главных осей. — ПММ, 1954, т. 18, вып. 4, с. 415—424.
8. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
9. Новожилов В. В. О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах. (Геометрическая сторона вопроса) — ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 794—812.
10. Truesdell C., W. Noll. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics. S. Flugge, v. III/3. Springer-Verlag, 1965.
11. Coleman B. D. Thermodynamics of Materials with Memory. Arch. Rat. Mech. a. Anal, 1964, v. 17, № 1.
12. Coleman B. D. On Thermodynamics, Strain Impulses and Viscoplasticity. Arch. Rat. Mech. a. Anal, 1964, v. 17, № 3.
13. Хилл Р. Об определяющих неравенствах для простых материалов. Механика (период сб. перев. иностр. статей), 1969, 4(116), 94—118.

14. Hill R. Constitutive Inequalities for Isotropic Elastic Solids under Finite Strain, Proc. Roy. Soc. Lond., A. 314, № 1519, 1970.

15. Черных К. Ф. Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости.—«Изв. АН СССР, МТТ», 1970, № 3, с. 5—14.

16. Черных К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга. — В сб.: Проблемы механики твердого деформированного тела. (К 60-летию акад. В. В. Новожилова). М., Судпромгиз, 1970.

17. Черных К. Ф. Определяющие неравенства упругих тел. — В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. (К 80-летию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972.

18. Черных К. Ф. О постулате устойчивости анизотропного материала. — В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. (К 60-летию акад. В. Н. Челомея), 1974.

19. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек. Ил. Изд-во ЛГУ, 1964.

20. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. 1, ГИТТЛ, М.-Л., 1947.

21. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ М., Физматгиз, 1963.

22. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 3-е. М., «Наука», 1967.

23. Бондарь В. Д. Об одном представлении тензорной функции. ДАН СССР, 1961, 141, 1 с. 16—18.

24. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М., «Наука», 1965.

УДК 532.528;532.529.5/6

Г. С. Розаренов

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ КАВИТАЦИОННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

В настоящей работе получено решение краевой задачи для уравнений газовой механики, описывающей движение вязкого теплопроводного газа с учетом теплопроводности несжимаемой жидкости.

В сферической системе координат движение вязкого теплопроводного газа выражается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u \rho}{r} &= 0; \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{4}{3} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0; \\ \rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial r} \right) + p \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \\ &+ 2 \frac{u p}{r} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где T — температура, E — внутренняя энергия на единицу массы, μ и χ — соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности газа.