при $\beta<0,04$, можно предположить, что для малых значений β возможен устойчивый режим течения, однако этот вопрос требует дополнительного изучения в рамках тонкослойной аппроксимации.

В заключение отметим, что как в случае внешнего, так и внутреннего течения имеет место незначительный стабилизирующий эффект поверхностного натяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hickox C. E., Phys. fluids, 1971, v. 14, № 2.

УДК 678:532.135

Н. В. Заварзин, В. М.Суязов

О ВЛИЯНИИ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛЕНКИ

Рассматривается вязкоупругая жидкость модели Олдройда [1] с двумя временами релаксации. Известно [2], что конститутивные уравнения Олдройда могут быть использованы для описания поведения ряда неньютоновских систем, в частности растворов полимеров. Последние отчетливо обнаруживают эффект пристенного скольжения, экспериментальное изучение которого проводилось в работе [3]. На необходимость учета проскальзывания при течении полимерных растворов указывают также результаты работы [4], где основной причиной появления нерегулярности при течении расплавов и концентрированных растворов полимеров авторы считают поверхностное скольжение.

1. Определяющие уравнения вязкоупругой жидкости модели Олдройда можно записать в следующей безразмерной форме:

$$S^{ik}=-pg^{ik}+p^{ik};$$

$$p^{ik}+M_1\,(D/Dt)\;p^{ik}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\,[1+M_2\,(D/Dt)]\,\varepsilon^{ik};$$

$$M_1=\lambda_1\,Uh^{-1},\quad M_2=\lambda_2\,Uh^{-1},\quad \mathrm{Re}=Uh\nu^{-1},\quad U=gh^2\,\nu^{-1},$$

где p—изотропное давление, p^{ik}—напряжения, определяемые через скорости деформаций ε^{ik}, g^{ik}—контравариантный метрический тензор, λ_1 и λ_2—время релаксации напряжений и скоростей деформаций соответственно, U и h—характерные скорость и размер, ν—коэффициент кинематической вязкости, g—ускорение силы тяжести, $\lambda_1>\lambda_2>0$.

Символом (D/Dt) обозначена производная Олдройда, которая для контравариантного тензора A^{ik} имеет вид

$$(D/Dt)\,A^{ik}=\partial A^{ik}/\partial t+v^m A^{ik}_{\ ,m}-v^i_{\ ,m}A^{mk}-v^k_{\ ,m}A^{im}.$$

Здесь d/dt—частная производная по времени, v^i—вектор скорости, запятая означает ковариантную производную.

В цилиндрической системе координат r, φ, z, ось z которой направлена вверх, уравнения движения несжимаемой жидкости Олдройда имеют стационарное решение:

$$u^0=v^0=0;\quad w^0=\frac{1}{4}(r^2-\beta^{-2})-\frac{1}{2}\gamma^2\ln r\beta\mp\frac{1}{2}k(\beta^{-1}-\gamma^2\beta);$$

$$p^0=p_a\mp\frac{S}{\gamma};\ \beta=\frac{h}{a};\ \gamma=\frac{1}{\beta}\mp1. \tag{1.1}$$

Оно описывает течение пленки жидкости толщиной h по поверхности вертикального кругового цилиндра радиуса a, происходящее под действием силы тяжести. В (1.1) и далее в местах чередования знаков, верхний знак соответствует течению по внутренней поверхности цилиндра, нижний—по внешней.

Поле скоростей (1.1) на стенке цилиндра удовлетворяет условию проскальзывания [2] с коэффициентом эффективного скольжения $k>0$:

$$w^0\mp k\frac{dw^0}{dr}=0,\quad r=\frac{1}{\beta}.$$

На свободной поверхности стекающей пленки выполняется условие отсутствия трения с газовой фазой и условие равенства нормальных напряжений в жидкости и газе:

$$\frac{dw^0}{dr}=0;\ p^0=p_a\mp\frac{S}{\gamma};\ r=\gamma.$$

В последнем условии p_a—давление в газовой фазе, S—безразмерный коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Влияние проскальзывания на распределение скоростей стационарного течения сказывается в увеличении продольной компоненты вектора скорости как для течения по внешней, так и по внутренней поверхностям цилиндра.

Компоненты тензора напряжений $\overline{p}^{ij}$, соответствующие полю скоростей стационарного течения (1.1), имеют вид

$$\overline{p}^{rr}=\overline{p}^{r\varphi}=\overline{p}^{\varphi\varphi}=\overline{p}^{\varphi z}=0;\quad \overline{p}^{rz}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{dw^0}{dr};\quad \overline{p}^{zz}=\frac{2\Delta M}{\mathrm{Re}^2}\left(\frac{dw^0}{dr}\right)^2; \tag{1.2}$$

$$M_1-M_2=\Delta M>0.$$

Соотношения (1.2) совпадают с соответствующими компонентами тензора напряжений в ньютоновской жидкости, за исключением компоненты $\overline{p}^{zz}$, присутствие которой находится в согласии с эффектом Вейссенберга в нелинейных средах.

2. Для исследования устойчивости течения (1.1) относительно малых осесимметричных возмущений, проведем линеаризацию

уравнений состояния, движения и неразрывности. Результирующее поле возмущенного течения представляется в виде суммы стационарной части (1.1), (1.2) и малых возмущений:

$$u=u'(r, z, t); \quad w=w^0(r)+w'(r, z, t); \quad p=p^0+p'(r, z, t);$$
$$p^{ij}=\overline{p^{ij}}(r)+\sigma^{ij}(r, z, t). \tag{2.1}$$

Уравнение неразрывности, выписанное с учетом (2.1) для компонент возмущений

$$\frac{\partial u'}{\partial r}+\frac{\partial w'}{\partial z}+\frac{u'}{r}=0,$$

позволяет ввести безразмерную функцию тока ψ:

$$u'=-\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad w'=\frac{\psi}{r}+\frac{\partial\psi}{r}. \tag{2.2}$$

Решение линеаризованных уравнений состояния и движения, записанных с учетом (2.2), будем искать в виде синусоидальных функций с волновым числом α:

$$\psi, p', \sigma^{rr}, \sigma^{r\varphi}, \sigma^{\varphi\varphi}, \sigma^{rz}, \sigma^{\varphi z}, \sigma^{zz}=$$
$$=[\varphi(r), f(r), F_1(r), F_2(r), F_3(r), F_4(r), F_5(r), F_6(r)]\times$$
$$\times\exp i\alpha(z-ct), \tag{2.3}$$

здесь $\alpha=2\pi h\lambda^{-1}$, λ—длина волны возмущений, $c=c_r+ic_i$, c_r—фазовая скорость, c_i—коэффициент затухания возмущений.

Подставляя (2.3) в линеаризованные определяющие уравнения и разрешая их в случае малых значений волнового числа α относительно амплитуд F_i, получим

$$F_1=-\frac{2i\alpha}{\mathrm{Re}}\frac{d\varphi}{dr}+0(\alpha^2); \quad F_2=0; \quad F_3=-\frac{2i\alpha}{\mathrm{Re}}\frac{\varphi}{r}+0(\alpha^2);$$
$$F_4=\frac{1}{\mathrm{Re}}L\varphi+\frac{i\alpha\Delta M}{\mathrm{Re}}\left[\varphi-2\frac{d\varphi}{dr}\frac{dw^0}{dr}-(w^0-c)L\varphi\right]+0(\alpha^2); \tag{2.4}$$
$$F_5=0; \quad F_6=\frac{4\Delta M}{\mathrm{Re}}\frac{dw^0}{dr}L\varphi+O(\alpha); \quad L=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{1}{r^2}.$$

Подстановка (2.3) в линеаризованные уравнения движения приводит к системе двух дифференциальных уравнений для φ и f:

$$\alpha^2(w^0-c)\varphi=-\frac{df}{dr}+\frac{dF_1}{dr}+i\alpha F-\frac{1}{r}F_3+\frac{1}{r}F_1;$$
$$i\alpha(w^0-c)\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)-i\alpha\varphi\frac{dw^0}{dr}=-i\alpha f+\frac{dF_4}{dr}+$$
$$+i\alpha F_6+\frac{1}{r}F_4. \tag{2.5}$$

Исключая f из уравнений (2.5), с учетом (2.4), имеем

$$LL\varphi=i\alpha\,\mathrm{Re}\left[(w^0-c)L\varphi+\left(\frac{1}{r}\frac{dw^0}{dr}-\frac{d^2w^0}{dr^2}\right)\varphi\right]-i\alpha\Delta M\times$$
$$\times\left\{L\left[\varphi-2\frac{d\varphi}{dr}\frac{dw^0}{dr}-(w^0-c)L\varphi\right]+4\frac{d^2w^0}{dr^2}L\varphi+\right.$$

$$\frac{d}{dr}(L\varphi)\Big\}+0(\alpha^2). \tag{2.6}$$

Граничными условиями для дифференциального уравнения (2.6) на поверхности цилиндра служат условие непротекания

$$\varphi\left(\frac{1}{\beta}\right)=0 \tag{2.7}$$

и условие скольжения жидкости вдоль стенки

$$\frac{d\varphi}{dr}\pm k\left\{L\varphi+i\alpha\Delta M\left[\varphi-2\frac{d\varphi}{dr}\frac{dw^0}{dr}-(w^0-c)L\varphi\right]\right\}+$$
$$+O(\alpha^2)=0,\quad r=\frac{1}{\beta}. \tag{2.8}$$

На поверхности стекающей пленки выполняются обычные динамические условия баланса внешних и внутренних сил:

$$\mp\frac{\alpha\operatorname{Re}\varphi}{c-w^0}\frac{S}{\gamma^2}(1-\alpha^2\gamma^2)-i\left(\frac{d}{dr}L\varphi+\frac{1}{r}L\varphi\right)-$$
$$-\alpha\operatorname{Re}(w^0-c)\left(\frac{d\varphi}{dr}+\frac{\varphi}{r}\right)+\alpha\Delta M\left[\frac{\varphi}{r}-\frac{d\varphi}{dr}-(w^0-c)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{d}{dr}L\varphi+\frac{1}{r}L\varphi\right)\right]=0,\quad r=\gamma;$$
$$L\varphi+i\alpha\Delta M\,[\varphi-(w^0-c)L\varphi]+\frac{\varphi}{c-w^0}=0,\quad r=\gamma. \tag{2.9}$$

Таким образом, исследование вопроса об устойчивости течения (1.1) по отношению к малым осесимметричным возмущениям привело к задаче на собственные значения (2.6)—(2.9).

3. Следуя [5, 6], в случае длинноволновых возмущений, представим φ и c в виде рядов по малому параметру α:

$$\varphi=\varphi_0+\alpha\varphi_1+\ldots\quad c=c_0+\alpha c_1+\ldots \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (2.6)—(2.9), в первом приближении имеем

$$LL\varphi_0=0;\ \varphi_0\left(\frac{1}{\beta}\right)=0;\ \frac{d\varphi_0}{dr}\pm kL\varphi_0;\ r=\frac{1}{\beta};$$
$$\frac{d}{dr}L\varphi_0+\frac{1}{\gamma}L\varphi_0=0;\ L\varphi_0+\frac{\varphi_0}{c_0-w^0}=0;\quad r=\gamma. \tag{3.2}$$

Система (3.2) совпадает с соответствующими соотношениями для ньютоновской жидкости. Ее решение имеет вид

$$\varphi_0=r\ln\beta r+\frac{1}{2}(\beta^{-2}r^{-1}-r)\pm k(\beta^{-1}r^{-1}-\beta r);$$
$$c_0=\frac{1}{2}(\gamma^2-\beta^{-2})-\gamma^2\ln\gamma\beta\mp k\beta^{-1}(1-\gamma^2\beta^2). \tag{3.3}$$

Так же как и в ньютоновской жидкости, собственное значение задачи первого приближения действительно и не дает сведений об устойчивости течения (1.1).

Уравнение и граничные условия второго приближения

$$LL\varphi_1 = i\ \mathrm{Re}\left[(w^0 - c_0)\,L\,\varphi_0 + \left(\frac{1}{r}\frac{dw^0}{dr} - \frac{d^2w^0}{dr^2}\right)\varphi_0\right] -$$

$$- i\Delta M\left\{L\left[\varphi_0 - 2\frac{d\varphi_0}{dr}\frac{dw^0}{dr} - (w^0 - c_0)\,L\varphi_0\right] + \right.$$

$$\left. + 4\frac{d^2w^0}{dr^2}L\varphi_0 + 4\frac{dw^0}{dr}\frac{d}{dr}(L\varphi_0)\right\};$$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{\beta}\right) = 0;\quad \frac{d\varphi_1}{dr} \pm k\left\{L\varphi_1 + i\Delta M\left[\varphi_0 - 2\frac{d\varphi_0}{dr}\frac{dw^0}{dr} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (w^0 - c_0)\,L\varphi_0\right]\right\} = 0;\quad r = \frac{1}{\beta};$$

$$\mp\frac{S}{\gamma^2}\frac{\mathrm{Re}\,\varphi^0}{c_0 - w^0}(1 - \alpha^2\gamma^2) - i\left(\frac{d}{dr}L\varphi_1 + \frac{1}{r}L\varphi_1\right) - \mathrm{Re}\,(w^0 - c_0)\times$$

$$\times\left(\frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{\varphi_0}{r}\right) + \Delta M\left[\frac{\varphi_0}{r} - \frac{d\varphi_0}{dr} - (w^0 - c_0)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{d}{dr}L\varphi_0 + \frac{1}{r}L\varphi_0\right)\right] = 0;\quad r = \gamma;$$

$$L\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{c_0 - w^0} - \frac{\varphi_0\,c_1}{(c_0 - w^0)^2} + i\Delta M\,[\varphi_0 - (w^0 - c_0)\,L\varphi_0] = 0;$$

$$r = \gamma. \tag{3.4}$$

Интегрирование (3.4) с учетом (1.1) и (3.3) дает следующее значение собственного числа второго приближения:

$$c_1 = \mp\frac{iS'}{8\gamma^3}(1 - \alpha^2\gamma^2)(B_2 \mp 2kP_1) - i\ \mathrm{Re}\,(B_1B_2 + B_3B_4 + B_5) +$$

$$+ i\ \mathrm{Re}\,(\pm kP_4 + k^2P_5 \pm k^3P_6) - i\Delta M\,(B_6 \pm kP_7).$$

Постоянные $B_i (i = 1, \ldots 5)$ введены в работе [7]. Остальные постоянные имеют вид

$$P_1 = \gamma^4\beta - 2\gamma^2\beta^{-1} + \beta^{-3};\quad P_2 = 1 - \gamma^2\beta^2;$$

$$P_3 = \beta^{-1}\left(2\ln\gamma + \frac{7}{2}\right) - 2\beta^{-1}P_2\ln\beta\gamma - \beta B_4;$$

$$P_4 = 2B_1P_1 + 2\beta^{-1}P_2B_3 - \frac{1}{32}\left[\beta^{-1}\gamma^2\left(4\ln\gamma + \frac{5}{2}\right)B_4 + \right.$$

$$\left. + \gamma^4\beta^{-1}\ln\gamma\,(1 + 2\ln\gamma) + P_3B_2 - \frac{1}{2}(\gamma^2E + M)\right];$$

$$P_5 = \frac{1}{16}\left[\beta^{-2}\gamma^2P_2\left(4\ln\gamma + \frac{5}{2}\right) + P_1P_3 - P_2B_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(\beta^{-1}\gamma^2 - \beta^{-3})\,I\right];$$

$$P_6 = \frac{1}{8}P_1P_2;\quad P_7 = \frac{1}{8}[P_1 + (6\beta^{-1} - 4\gamma^2\beta)\,B_4];$$

$$E = \beta^{-1}\left[2\beta^{-2}(1 - 2\ln\beta) + 4\gamma^2\ln\beta\,(1 - \ln\beta) + 3N\left(1 - \frac{4}{3}\ln\beta\right)\right];$$

$$M=\beta^{-3}\left[2\beta^{-2}(\ln\beta-1)+4\gamma^2\ln\beta\,(2\ln\beta-1)+3N\left(\frac{4}{3}\ln\beta-1\right)\right];$$

$$I=6\beta^{-1}\left(1-\frac{4}{3}\ln\beta\right)+4\gamma^2\beta\,(1-2\ln\beta);\quad N=\beta^{-2}+4\gamma^2\,(1+\ln\gamma);$$

$$B_6=\frac{1}{16}\left\{B_2+(\beta^{-2}+4\gamma^2\ln\gamma)\,B_4+\gamma^3\left[4\gamma\ln\gamma\,(\ln\gamma-1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\beta^{-2}\gamma^{-1}\left(\ln\gamma+\frac{3}{2}\right)-4\gamma\ln\beta\left(\ln\beta+\frac{3}{2}\beta^{-2}\gamma^{-2}\right)+3\gamma\right]\right\};$$

$$S'=S\,\mathrm{Re}.$$

Значение c_1—мнимая величина. Поэтому коэффициент затухания длинноволновых возмущений $c_i=-i\alpha c_1$. Ветвь кривой нейтральной устойчивости $c_1=0$ характеризуется следующей связью между волновым числом возмущений и числом Рейнольдса основного течения:

$$\pm\alpha^2=\pm\frac{1}{\gamma^2}+\frac{8\gamma\Delta M}{S'}(B_6\pm kP_7)(B_2\mp 2kP_1)^{-1}+$$

$$+\frac{8\gamma}{S'}(B_1B_2+B_3B_4+B_5\mp kP_4-k^2P_5\mp k^3P_6)(B_2\mp 2kP_1)^{-1}\,\mathrm{Re}. \tag{3.5}$$

Из (3.5) видно, что неньютоновские свойства жидкости Олдройда влияют только на величину критического волнового числа α_0, получаемого из (3.5) при $\mathrm{Re}=0$. Вместе с тем на его значение влияет проскальзывание жидкости:

$$\pm\alpha_0^2=\pm\frac{1}{\gamma^2}+\frac{8\gamma\Delta M}{S'}(B_6\pm kP_7)(B_2\mp 2kP_1)^{-1}. \tag{3.6}$$

В сравнении со случаем реализации на стенке цилиндра условия прилипания ($k=0$), соотношение (3.6) дают более высокие значения критического волнового числа, увеличивающиеся по мере роста коэффициента k. Но увеличение значения α_0 для течения по поверхности вертикального цилиндра свидетельствует об уменьшении области устойчивости течения [7]. Отсюда вытекает, что учет эффекта проскальзывания на границе цилиндра с жидкостью приводит к снижению области устойчивости.

Результаты решения задач первого и второго приближений показывают, что роль фазовой скорости длинноволновых возмущений выполняет собственное значение первого приближения c_0. Из (3.3) и (1.1) следует, что фазовая скорость c_0 равна удвоенной скорости свободной поверхности стекающей пленки, и с ростом коэффициента эффективного скольжения k ее значение увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldroyd J. G. Proc. Roy. Soc. (London), 1950, **A200**, 523.
2. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М., «Наука», 1964.
3. Vinogradov G. V., Malkin A. Ya., Yanovsky Yu. G., Borisenkova Ye. K., Yarlukov B. V., Berezhnaya G. Y. J. Polim. Sci., 1972, A2, **10**, 1061.

4. Pearson J. R. A., Petrie C. J. S. Proc. 4th Internat. Congr. Rheol., Providence, R. I., 1963. Part. 3, New York—London—Sydney, Interscience, 1965, 265.

5. **Иванилов Ю. П.** ПММ, 1960, 24, 380.

6. Yih Chia—Shun. Phys. Fluids, 1963, 6, 321. Русск. перевод: Механика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, 5, 77.

7. **Заварзин Н. В., Суязов В. М.** Редколлегия Инж.-физ. ж. АН БССР. Минск, 1974. Рукопись деп. в ВИНИТИ, рег. № 2908-74 Деп.

УДК 539.376+532.135

Ю. П. Самарин

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ КОНСТРУКЦИЙ

1. Пусть имеется l однородных реономных тел, каждое из которых находится в однородном возмущающем поле. Уравнение состояния тела, рассматриваемого как управляемая система, имеет вид [1, 2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta^i(t)}{dt}=f^i(\eta^i(t),\ x^i(t));\ \eta^i(0)=0;\\ &y^i(t)=\varphi^i(\eta^i(t),\ x^i(t));\ \varphi^i(0,\ 0)=0,\ i=\overline{1,\ l},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

здесь $x^i(t)$—управляющая (входная) вектор-функция со значениями в $D^i\subset R_{m_i}$; $\eta^i(t)$—вектор-функция со значениями в пространстве состояний $S^i\subset R^{s_l}$ (вектор η^i представляет собой набор фазовых координат); $y^i(t)$—наблюдаемая (выходная) вектор-функция со значениями в $Y^i\subset R^{n_i}$. В работе [2] показано, что уравнения вида (1) содержат, как частные случаи, все наиболее важные варианты теории ползучести.

Пусть далее реономные тела с уравнениями состояния (1) взаимодействуют друг с другом, т. е. между управляющими и наблюдаемыми координатами имеют место функциональные зависимости, в которые могут также входить заданные внешние нагрузки:

$$F_k(x^1,\ \ldots,\ x^l,\ y^1,\ \ldots,\ y^l,\ q_1,\ \ldots,\ q_m)=0,\ k=\overline{1,\ m_0},$$
$$m_0=\sum_{i=1}^{l}m_i.\qquad(2)$$

Совокупность уравнений (1) и (2) описывает дискретную конструкцию из управляемых систем. m_a—соответственно число внутренних, и m—внешних степеней свободы конструкции по управлению.