

при $\beta < 0,04$, можно предположить, что для малых значений β возможен устойчивый режим течения однако этот вопрос требует дополнительного изучения в рамках тонкослойной аппроксимации.

В заключение отметим, что как в случае внешнего, так и внутреннего течения имеет место незначительный стабилизирующий эффект поверхностного натяжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hickox C. E., Phys. fluids, 1971, v. 14, № 2.

УДК 678:532.135

Н. В. Заварзин, В. М. Суязов

О ВЛИЯНИИ ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛЕНКИ

Рассматривается вязкоупругая жидкость модели Олдройда [1] с двумя временами релаксации. Известно [2], что конститутивные уравнения Олдройда могут быть использованы для описания поведения ряда неньютоновских систем, в частности растворов полимеров. Последние отчетливо обнаруживают эффект пристенного скольжения, экспериментальное изучение которого проводилось в работе [3]. На необходимость учета проскальзывания при течении полимерных растворов указывают также результаты работы [4], где основной причиной появления нерегулярности при течении расплавов и концентрированных растворов полимеров авторы считают поверхностное скольжение.

1. Определяющие уравнения вязкоупругой жидкости модели Олдройда можно записать в следующей безразмерной форме:

$$S^{ik} = -p g^{ik} + p^{ik};$$

$$p^{ik} + M_1 (D/Dt) p^{ik} = \frac{2}{\text{Re}} [1 + M_2 (D/Dt)] \varepsilon^{ik};$$

$$M_1 = \lambda_1 U h^{-1}, \quad M_2 = \lambda_2 U h^{-1}, \quad \text{Re} = U h \nu^{-1}, \quad U = g h^2 \nu^{-1},$$

где p — изотропное давление, p^{ik} — напряжения, определяемые через скорости деформаций ε^{ik} , g^{ik} — контравариантный метрический тензор, λ_1 и λ_2 — время релаксации напряжений и скоростей деформаций соответственно, U и h — характерные скорость и размер, ν — коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение силы тяжести, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Символом (D/Dt) обозначена производная Олдройда, которая для контравариантного тензора A^{ik} имеет вид

$$(D/Dt) A^{ik} = \partial A^{ik} / \partial t + v^m A_{,m}^{ik} - v_{,m}^i A^{mk} - v_{,m}^k A^{im}.$$

Здесь d/dt —частная производная по времени, v^i —вектор скорости, запятая означает ковариантную производную.

В цилиндрической системе координат r, φ, z , ось z которой направлена вверх, уравнения движения несжимаемой жидкости Олдройда имеют стационарное решение:

$$\begin{aligned} u^0 = v^0 = 0; \quad \omega^0 &= \frac{1}{4} (r^2 - \beta^2) - \frac{1}{2} \gamma^2 \ln r \beta \mp \frac{1}{2} k (\beta^{-1} - \gamma^2 \beta); \\ p^0 &= p_a \mp \frac{S}{\gamma}; \quad \beta = \frac{h}{a}; \quad \gamma = \frac{1}{\beta} = 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Оно описывает течение пленки жидкости толщиной h по поверхности вертикального кругового цилиндра радиуса a , происходящее под действием силы тяжести. В (1.1) и далее в местах чередования знаков, верхний знак соответствует течению по внутренней поверхности цилиндра, нижний—по внешней.

Поле скоростей (1.1) на стенке цилиндра удовлетворяет условию проскальзывания [2] с коэффициентом эффективного скольжения $k > 0$:

$$\omega^0 - k \frac{d\omega^0}{dr} = 0, \quad r = \frac{1}{\beta}.$$

На свободной поверхности стекающей пленки выполняется условие отсутствия трения с газовой фазой и условие равенства нормальных напряжений в жидкости и газе:

$$\frac{d\omega^0}{dr} = 0; \quad p^0 = p_a \mp \frac{S}{\gamma}; \quad r = \gamma.$$

В последнем условии p_a —давление в газовой фазе, S —безразмерный коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Влияние проскальзывания на распределение скоростей стационарного течения сказывается в увеличении продольной компоненты вектора скорости как для течения по внешней, так и по внутренней поверхностям цилиндра.

Компоненты тензора напряжений \bar{p}^{ij} , соответствующие полю скоростей стационарного течения (1.1), имеют вид

$$\bar{p}^{rr} = \bar{p}^{r\varphi} = \bar{p}^{\varphi\varphi} = \bar{p}^{\varphi z} = 0; \quad \bar{p}^{zz} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{d\omega^0}{dr}; \quad \bar{p}^{zz} = \frac{2\Delta M}{\text{Re}} \left(\frac{d\omega^0}{dr} \right)^2; \quad (1.2)$$

$$M_1 - M_2 = \Delta M > 0.$$

Соотношения (1.2) совпадают с соответствующими компонентами тензора напряжений в ньютоновской жидкости, за исключением компоненты \bar{p}^{zz} , присутствие которой находится в согласии с эффектом Вейссенберга в нелинейных средах.

2. Для исследования устойчивости течения (1.1) относительно малых осесимметричных возмущений, проведем линеаризацию

уравнений состояния, движения и неразрывности. Результирующее поле возмущенного течения представляется в виде суммы стационарной части (1.1), (1.2) и малых возмущений:

$$u = u'(r, z, t); \quad \omega = \omega^0(r) + \omega'(r, z, t); \quad p = p^0 + p'(r, z, t); \\ \rho^{ij} = \bar{\rho}^{ij}(r) + \sigma^{ij}(r, z, t). \quad (2.1)$$

Уравнение неразрывности, выписанное с учетом (2.1) для компонент возмущений

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{u'}{r} = 0,$$

позволяет ввести безразмерную функцию тока ψ :

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w' = \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.2)$$

Решение линеаризованных уравнений состояния и движения, записанных с учетом (2.2), будем искать в виде синусоидальных функций с волновым числом α :

$$\psi, p', \sigma^{rr}, \sigma^{r\varphi}, \sigma^{\varphi\varphi}, \sigma^{rz}, \sigma^{rz}, \sigma^{zz} = \\ = [\varphi(r), f(r), F_1(r), F_2(r), F_3(r), F_4(r), F_5(r), F_6(r)] \times \\ \times \exp i\alpha(z - ct), \quad (2.3)$$

здесь $\alpha = 2\pi h \lambda^{-1}$, λ —длина волны возмущений, $c = c_r + ic_i$, c_r —фазовая скорость, c_i —коэффициент затухания возмущений.

Подставляя (2.3) в линеаризованные определяющие уравнения и разрешая их в случае малых значений волнового числа α относительно амплитуд F_i , получим

$$F_1 = -\frac{2i\alpha}{\text{Re}} \frac{d\varphi}{dr} + O(\alpha^2); \quad F_2 = 0; \quad F_3 = -\frac{2i\alpha}{\text{Re}} \frac{\varphi}{r} + O(\alpha^2); \\ F_4 = \frac{1}{\text{Re}} L\varphi + \frac{i\alpha\Delta M}{\text{Re}} \left| \varphi - 2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\omega^0}{dr} - (\omega^0 - c) L\varphi \right| + O(\alpha^2); \quad (2.4) \\ F_5 = 0; \quad F_6 = \frac{4\Delta M}{\text{Re}} \frac{d\omega^0}{dr} L\varphi + O(\alpha); \quad L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Подстановка (2.3) в линеаризованные уравнения движения приводит к системе двух дифференциальных уравнений для φ и f :

$$\alpha^2 (\omega^0 - c) \varphi = -\frac{df}{dr} + \frac{dF_1}{dr} + i\alpha F - \frac{1}{r} F_3 + \frac{1}{r} F_1; \\ i\alpha (\omega^0 - c) \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) - i\alpha \varphi \frac{d\omega^0}{dr} = -i\alpha f + \frac{dF_4}{dr} + \\ + i\alpha F_6 + \frac{1}{r} F_4. \quad (2.5)$$

Исключая f из уравнений (2.5), с учетом (2.4), имеем

$$LL\varphi = i\alpha \text{Re} \left[(\omega^0 - c) L\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega^0}{dr} - \frac{d^2\omega^0}{dr^2} \right) \varphi \right] - i\alpha\Delta M \times \\ \times \left\{ L \left[\varphi - 2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\omega^0}{dr} - (\omega^0 - c) L\varphi \right] + 4 \frac{d^2\omega^0}{dr^2} L\varphi + \right.$$

$$+ 4 \frac{d\omega^0}{dr} \frac{d}{dr} (L\varphi) \} + O(\alpha^2). \quad (2.6)$$

Граничными условиями для дифференциального уравнения (2.6) на поверхности цилиндра служат условие непротекания

$$\varphi \left(\frac{1}{3} \right) = 0 \quad (2.7)$$

и условие скольжения жидкости вдоль стенки

$$\frac{d\varphi}{dr} \pm k \left\{ L\varphi + i\alpha\Delta M \left[\varphi - 2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{d\omega^0}{dr} - (\omega^0 - c) L\varphi \right] \right\} + O(\alpha^2) = 0, \quad r = \frac{1}{3}. \quad (2.8)$$

На поверхности стекающей пленки выполняются обычные динамические условия баланса внешних и внутренних сил:

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha \operatorname{Re} \bar{\varphi}}{c - \omega^0} \frac{S}{\gamma^2} (1 - \alpha^2 \gamma^2) - i \left(\frac{d}{dr} L\varphi + \frac{1}{r} L\varphi \right) - \\ & - \alpha \operatorname{Re} (\omega^0 - c) \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dr} + \frac{\bar{\varphi}}{r} \right) + \alpha \Delta M \left[\frac{\bar{\varphi}}{r} - \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - (\omega^0 - c) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{d}{dr} L\varphi + \frac{1}{r} L\varphi \right) \right] = 0, \quad r = \gamma; \\ & L\varphi + i\alpha\Delta M [\varphi - (\omega^0 - c) L\varphi] + \frac{\bar{\varphi}}{c - \omega^0} = 0, \quad r = \gamma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, исследование вопроса об устойчивости течения (1.1) по отношению к малым осесимметричным возмущениям привело к задаче на собственные значения (2.6) — (2.9).

3. Следуя [5, 6], в случае длинноволновых возмущений, представим φ и c в виде рядов по малому параметру α :

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha\varphi_1 + \dots \quad c = c_0 + \alpha c_1 + \dots \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.6) — (2.9), в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} & LL\varphi_0 = 0; \quad \varphi_0 \left(\frac{1}{3} \right) = 0; \quad \frac{d\bar{\varphi}_0}{dr} = kL\varphi_0; \quad r = \frac{1}{3}; \\ & \frac{d}{dr} L\varphi_0 + \frac{1}{r} L\varphi_0 = 0; \quad L\varphi_0 + \frac{\bar{\varphi}_0}{c_0 - \omega^0} = 0; \quad r = \gamma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Система (3.2) совпадает с соответствующими соотношениями для ньютоновской жидкости. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \gamma \ln \beta r + \frac{1}{2} (\beta^{-2} r^{-1} - r) \pm k (\beta^{-1} r^{-1} - \beta r); \\ c_0 &= \frac{1}{2} (\gamma^2 - \beta^{-2}) - \gamma^2 \ln \gamma \beta \mp k \beta^{-1} (1 - \gamma^2 \beta^2). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Так же как и в ньютоновской жидкости, собственное значение задачи первого приближения действительно и не дает сведений об устойчивости течения (1.1).

Уравнение и граничные условия второго приближения

$$LL\varphi_1 = i \operatorname{Re} \left[(\omega^0 - c_0) L\varphi_0 + \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega^0}{dr} - \frac{d^2\omega^0}{dr^2} \right) \varphi_0 \right] - \\ - i\Delta M \left\{ L \left[\varphi_0 - 2 \frac{d\zeta_0}{dr} \frac{d\omega^0}{dr} - (\omega^0 - c_0) L\varphi_0 \right] + \right. \\ \left. + 4 \frac{d^2\omega^0}{dr^2} L\varphi_0 + 4 \frac{d\omega^0}{dr} \frac{d}{dr} (L\varphi_0) \right\};$$

$$\varphi_1 \left(\frac{1}{\beta} \right) = 0; \quad \frac{d\zeta_1}{dr} - k \left\{ L\varphi_1 + i\Delta M \left[\varphi_0 - 2 \frac{d\zeta_0}{dr} \frac{d\omega^0}{dr} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\omega^0 - c_0) L\varphi_0 \right] \right\} = 0; \quad r = \frac{1}{\beta};$$

$$\frac{S}{\gamma^2} \frac{\operatorname{Re} \zeta_0}{c_0 - \omega^0} (1 - \alpha^2 \gamma^2) - i \left(\frac{d}{dr} L\varphi_1 + \frac{1}{r} L\varphi_1 \right) - \operatorname{Re} (\omega^0 - c_0) \times \\ \times \left(\frac{d\zeta_0}{dr} + \frac{\zeta_0}{r} \right) + \Delta M \left[\frac{\zeta_0}{r} - \frac{d\zeta_0}{dr} - (\omega^0 - c_0) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{d}{dr} L\varphi_0 + \frac{1}{r} L\varphi_0 \right) \right] = 0; \quad r = \gamma;$$

$$L\varphi_1 + \frac{\zeta_1}{c_0 - \omega^0} - \frac{\zeta_0 c_1}{(c_0 - \omega^0)^2} + i\Delta M [\varphi_0 - (\omega^0 - c_0) L\varphi_0] = 0; \\ r = \gamma. \quad (3.4)$$

Интегрирование (3.4) с учетом (1.1) и (3.3) дает следующее значение собственного числа второго приближения:

$$c_1 = \mp \frac{iS'}{8\gamma^3} (1 - \alpha^2 \gamma^2) (B_2 \pm 2kP_1) - i \operatorname{Re} (B_1 B_2 + B_3 B_4 + B_5) \pm \\ \pm i \operatorname{Re} (\pm kP_4 + k^2 P_5 \pm k^3 P_6) - i\Delta M (B_6 \pm kP_7).$$

Постоянные B_i ($i=1, \dots, 5$) введены в работе [7]. Остальные постоянные имеют вид

$$P_1 = \gamma^4 \beta - 2\gamma^2 \beta^{-1} + \beta^{-3}; \quad P_2 = 1 - \gamma^2 \beta^2;$$

$$P_3 = \beta^{-1} \left(2 \ln \gamma + \frac{7}{2} \right) - 2\beta^{-1} P_2 \ln \beta \gamma - \beta B_4;$$

$$P_4 = 2B_1 P_1 + 2\beta^{-1} P_2 B_3 - \frac{1}{32} \left| \beta^{-1} \gamma^2 \left(4 \ln \gamma + \frac{5}{2} \right) B_4 + \right. \\ \left. + \gamma^4 \beta^{-1} \ln \gamma (1 + 2 \ln \gamma) + P_3 B_2 - \frac{1}{2} (\gamma^2 E + M) \right|;$$

$$P_5 = \frac{1}{16} \left[\beta^{-2} \gamma^2 P_2 \left(4 \ln \gamma + \frac{5}{2} \right) + P_1 P_3 - P_2 B_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (\beta^{-1} \gamma^2 - \beta^{-3}) I \right];$$

$$P_6 = \frac{1}{8} P_1 P_2; \quad P_7 = \frac{1}{8} [P_1 + (6\beta^{-1} - 4\gamma^2 \beta) B_4];$$

$$E = \beta^{-1} \left| 2\beta^{-2} (1 - 2 \ln \beta) + 4\gamma^2 \ln \beta (1 - \ln \beta) + 3N \left(1 - \frac{4}{3} \ln \beta \right) \right|;$$

$$M = \beta^{-3} \left[2\beta^{-2} (\ln \beta - 1) + 4\gamma^2 \ln \beta (2 \ln \beta - 1) + 3N \left(\frac{4}{3} \ln \beta - 1 \right) \right];$$

$$L = 6\beta^{-1} \left(1 - \frac{4}{3} \ln \beta \right) + 4\gamma^2 \beta (1 - 2 \ln \beta); \quad N = \beta^{-2} + 4\gamma^2 (1 + \ln \gamma);$$

$$B_6 = \frac{1}{16} \left\{ B_2 + (\beta^{-2} + 4\gamma^2 \ln \gamma) B_4 + \gamma^3 \left[4\gamma \ln \gamma (\ln \gamma - 1) - \right. \right.$$

$$\left. - 2\beta^{-2} \gamma^{-1} \left(\ln \gamma + \frac{3}{2} \right) - 4\gamma \ln \beta \left(\ln \beta + \frac{3}{2} \beta^{-2} \gamma^{-2} \right) + 3\gamma \right\};$$

$$S' = S \operatorname{Re}.$$

Значение c_1 — мнимая величина. Поэтому коэффициент затухания длинноволновых возмущений $c_i = -i a c_1$. Ветвь кривой нейтральной устойчивости $c_1 = 0$ характеризуется следующей связью между волновым числом возмущений и числом Рейнольдса основного течения:

$$\pm a^2 = \pm \frac{1}{\gamma^2} + \frac{8\gamma \Delta M}{S'} (B_6 \pm kP_7) (B_2 \mp 2kP_1)^{-1} +$$

$$+ \frac{8\gamma}{S'} (B_1 B_2 + B_3 B_4 + B_5 \mp kP_4 - k^2 P_5 \mp k^3 P_6) (B_2 \mp 2kP_1)^{-1} \operatorname{Re}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) видно, что неньютоновские свойства жидкости Олдройда влияют только на величину критического волнового числа a_0 , получаемого из (3.5) при $\operatorname{Re} = 0$. Вместе с тем на его значение влияют проскальзывание жидкости:

$$\pm a_0^2 = \pm \frac{1}{\gamma^2} + \frac{8\gamma \Delta M}{S'} (B_6 \pm kP_7) (B_2 \mp 2kP_1)^{-1}. \quad (3.6)$$

В сравнении со случаем реализации на стенке цилиндра условия прилипания ($k=0$), соотношение (3.6) дают более высокие значения критического волнового числа, увеличивающиеся по мере роста коэффициента k . Но увеличение значения a_0 для течения по поверхности вертикального цилиндра свидетельствует об уменьшении области устойчивости течения [7]. Отсюда вытекает, что учет эффекта проскальзывания на границе цилиндра с жидкостью приводит к снижению области устойчивости.

Результаты решения задач первого и второго приближений показывают, что роль фазовой скорости длинноволновых возмущений выполняет собственное значение первого приближения c_0 . Из (3.3) и (1.1) следует, что фазовая скорость c_0 равна удвоенной скорости свободной поверхности стекающей пленки, и с ростом коэффициента эффективного скольжения k ее значение увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldroyd J. G. Proc. Roy. Soc. (London), 1950, A200, 523.
2. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., «Наука», 1964.
3. Vinogradov G. V., Malkin A. Ya., Yanovsky Yu. G., Borisenkova Ye. K., Yarlukov B. V., Berezhnaya G. Y. J. Polim. Sci., 1972, A2, 10, 1061.

4. Pearson J. R. A., Petrie C. J. S. Proc. 4th Internat. Congr. Rheol., Providence, R. I., 1963. Part. 3. New York—London—Sydney, Interscience, 1965, 265.

5. Иванилов Ю. П. ПММ, 1960, 24, 380.

6. Yih Chia—Shun. Phys. Fluids, 1963, 6, 321. Русск. перевод: Механика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, 5, 77.

7. Заварзин Н. В., Суязов В. М. Редколлегия Инж.-физ. ж. АН БССР Минск, 1974. Рукопись деп. в ВИНТИ, рег. № 2908-74 Деп.

УДК 539.376+532.135

Ю. П. Самарин

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ КОНСТРУКЦИЙ

1. Пусть имеется l однородных реономных тел, каждое из которых находится в однородном возмущающем поле. Уравнение состояния тела, рассматриваемого как управляемая система, имеет вид [1, 2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i^i(t)}{dt} &= f^i(\gamma_i^i(t), x^i(t)); \gamma_i^i(0) = 0; \\ y^i(t) &= \varphi^i(\gamma_i^i(t), x^i(t)); \varphi^i(0, 0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

здесь $x^i(t)$ —управляющая (входная) вектор-функция со значениями в $D^i \subset R^{m_i}$; $\eta^i(t)$ —вектор-функция со значениями в пространстве состояний $S^i \subset R^{S^i}$ (вектор η^i представляет собой набор фазовых координат); $y^i(t)$ —наблюдаемая (выходная) вектор-функция со значениями в $Y^i \subset R^{n_i}$. В работе [2] показано, что уравнения вида (1) содержат, как частные случаи, все наиболее важные варианты теории ползучести.

Пусть далее реономные тела с уравнениями состояния (1) взаимодействуют друг с другом, т. е. между управляющими и наблюдаемыми координатами имеют место функциональные зависимости, в которые могут также входить заданные внешние нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} F_k(x^1, \dots, x^l, y^1, \dots, y^l, q_1, \dots, q_m) &= 0, \quad k = \overline{1, m_0}, \\ m_0 &= \sum_{i=1}^l m_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Совокупность уравнений (1) и (2) описывает дискретную конструкцию из управляемых систем. m_a —соответственно число внутренних, и m —внешних степеней свободы конструкции по управлению.