

С. И. Мешков

**КНИГА Р. КРИСТЕНСЕНА
«ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЯЗКОУПРУГОСТИ»**

Широкое применение в современной технике разнообразных материалов (металлы, полимеры, бетоны и др.), свойства которых нельзя описать в рамках классических моделей упругости, пластичности и вязкой жидкости, способствовало интенсивному развитию теории вязкоупругости, основы которой были заложены еще в работах Максвелла, Кельвина, Фойхта, Больцмана и Вольтерра.

Однако почти нет учебных пособий, дающих систематическое представление о предмете. Этот пробел в известной степени восполняет книга Р. Кристенсена «Введение в теорию вязкоупругости» [1], написанная на основе лекций, прочитанных автором в Калифорнийском университете (Беркли) с добавлением сведений из статей, опубликованных, главным образом, в американских журналах.

В книге, содержащей семь глав, излагаются основы теории вязко- и термовязкоупругости, методы решения квазистатических и динамических задач, а также способы экспериментального определения механических характеристик.

В первой главе дается вывод определяющих соотношений между напряжениями и малыми деформациями¹ линейных вязкоупругих сред при изотермических условиях на основе гипотезы о затухающей памяти, предположения гладкости истории деформации (или напряжения) и теоремы представления Рисса. Несмотря на то, что формально можно ограничиться этими предпосылками, и это обстоятельство подчеркивается автором, тем не менее следовало бы привести другие возможности построения определяющих уравнений и в первую очередь, как это делается в теории отклика, установить их связь с принципом причинности [2].

Между твердым и жидким вязкоупругим телом на физическом уровне строгости проводится различие, которое в рамках теории малых деформаций не осложняет методы решения прикладных задач.

Применительно к изотропным материалам, которые представляют большой практический интерес, дана дифференциально-операторная форма определяющих соотношений между напряжениями и деформациями и получены условия эквивалентности

¹ Используемый термин «инфинитезимальная теория» редко встречается в отечественной литературе.

с интегралом релаксации. В качестве примеров рассмотрены элементарные и обобщенные модели Максвелла и Фойхта. Интегральная форма определяющих соотношений исследуется в пространстве Фурье. Приведены формулы реальной и мнимой частей комплексного модуля, которые при помощи обратного преобразования Фурье дают способ определения функций релаксации, а также свидетельствуют о существовании дисперсионного соотношения.

Следует заметить, что если бы при построении определяющих уравнений была установлена их связь с принципом причинности, то появление дисперсионных соотношений и соответствующих следствий было бы более естественным.

При очень быстрых и медленных процессах деформирования поведение вязкоупругой среды аппроксимируется упругим материалом с модулем, соответственно равным начальному или конечному значениям функции релаксации, исключая случай вязкоупругой жидкости.

Функции релаксации для других напряженных состояний определяются из соотношений теории упругости заменой упругих модулей трансформантами Лапласа соответствующих функций релаксации. К сожалению, здесь автор не указывает на тесную связь этого факта с принципом Вольтерра или принципом соответствия.

Во второй главе для изотропных сред при изотермических условиях дана классификация типов краевых задач линейной вязкоупругости и рассмотрены методы их решения.

Для краевой задачи только вязкоупругие соотношения между напряжениями и деформациями отличаются от соответствующих условий инфинитезимальной теории упругости, а во всех остальных случаях учитывается лишь зависимость всех переменных от времени. Теорема единственности доказывается для изотропной квазистатической краевой задачи [3].

Разделение переменных обсуждается при условии постоянства коэффициента Пуассона. Формулируются первая, вторая и смешанная краевые задачи, и устанавливается возможность разделения переменных, обобщение которой обсуждается для гармонической зависимости от времени граничных условий и массовых сил.

Наиболее общий случай сведения вязкоупругих задач к упругим связан с применением интегральных преобразований. На примере преобразования Лапласа дана формулировка принципа соответствия или упруго-вязкоупругой аналогии, который показывает, что решения статических задач упругости можно превратить в решения квазистатических задач вязкоупругости посредством замены упругих модулей соответствующими трансформантами вязкоупругих характеристик и переменных упругого поля преобразованными переменными вязкоупругого поля с последующим переходом к оригиналу. При учете инерционных чле-

нов аналогия имеет место уже между преобразованиями упругих и вязкоупругих решений и оказывается менее полезной, так как приходится строить полное решение, не обращаясь к результатам статической теории упругости. Кроме того, обращение преобразованного динамического вязкоупругого решения значительно труднее, чем в квазистатическом случае. К сожалению, здесь не приводится никаких сведений о принципе Вольтерра, применение которого позволяет решать тот же класс задач с использованием операторного метода. Эффективность этого метода зависит от возможности расшифровки выражений, полученных из упругих решений заменой модулей соответствующими интегральными операторами. Автору, по-видимому, неизвестны работы советских ученых, и в первую очередь фундаментальные исследования Ю. Н. Работнова [4], положившие начало широкому использованию интегральных операторов с дробно-экспоненциальными ядрами при решении статических и динамических задач. В качестве конкретных примеров рассматриваются стационарные гармонические крутильные колебания прямого кругового цилиндра, динамика несжимаемого и квазистатика сжимаемого цилиндров, подкрепленных упругой оболочкой под влиянием внутреннего давления, действие давления на границу сферической полости, свободные колебания при постоянном и произвольном коэффициентах Пуассона, иллюстрация приближенного метода решения для систем с одной степенью свободы. Зависимость граничных условий от времени в контактных задачах не позволяет применять методы интегральных преобразований. Это иллюстрируется на примерах вдавливания штампа в полупространство, а также в балку для случаев заданной нагрузки и перемещения.

В третьей главе излагается термодинамический подход к построению общей линейной теории термовязкоупругости с обсуждением некоторых неизотермических эффектов, выходящих за рамки линейной теории.

Вывод определяющих соотношений основывается на законе сохранения энергии, неравенства для роста энтропии в предположении зависимости свободной энергии от историй деформации, изменения температуры, а также линейной зависимости вектора потока тепла от истории градиента температуры. Обсуждается диссипативное неравенство в изотропном случае для разрывных историй деформации и температуры. Получено согласующееся с ограничениями, накладываемыми гипотезой о затухающей памяти, термодинамическое требование отрицательности тангенсов углов наклона графиков функций релаксаций. Для частного случая аддитивного аргумента функции релаксации показана непротиворечивость теории с методом реологических моделей. При пропорциональности двух функций релаксации установлена связь коэффициента термодинамического расширения с относительным изменением объема. Показано, что

требование неотрицательности работы, затраченной на деформацию материала из начального состояния согласуется с гипотезой о затухающей памяти. Рассмотрены постановка и решение крайних задач термовязкоупругости с использованием метода интегральных преобразований.

Описание температурной зависимости механических свойств в состоянии с постоянной температурой приводится на основе постулата о термореологическом простом поведении, называемого принципом температурно-временной суперпозиции или методом приведенных переменных. Для состояний с непостоянной температурой используется связанная теория термовязкоупругости, учитывающая температурную зависимость механических свойств. Определяющие уравнения носят нелинейный характер, и в общем случае применение принципа соответствия оказывается невозможным за исключением двух разных случаев температурного поля: наличия только временной или координатной зависимости. Например, бесконечная изотропная плита, подвергнутая нагреванию, которое приводит к известным распределениям температуры по толщине.

В четвертой главе рассматривается распространение волн в линейных вязкоупругих средах. Этот класс задач представляет большой интерес в связи с использованием динамических методов для определения механических и физических характеристик материалов, в которых протекают релаксационные и ретардационные процессы. Следует заметить, что понятие волны в континуальной теории неоднозначно и определяется как распространение непрерывных возмущений, главным образом периодических (в частности, синусоидальных), или сингулярных поверхностей, при переходе через которые напряжения, деформации и их производные претерпевают разрыв, или как решения дифференциальных уравнений гиперболического типа.

К сожалению, автор, рассматривая распространение изотермической волны разрыва напряжения для одномерного случая, ограничивается только определением скорости, совпадающей с упругим значением, не затрагивая такую важную волновую характеристику, как коэффициент поглощения. Выяснение поведения коэффициента поглощения разрывных волн приобретает важное значение, особенно в связи с использованием слабосингулярных наследственных функций. Дело в том, что подстановка этих функций в выражение для коэффициента поглощения на поверхности разрыва приводит к бесконечной величине. Поэтому необходимо исследование поведения этой характеристики вблизи сингулярной поверхности с целью выяснения условий распространения разрывных волн в таких средах.

В другом примере рассматривается распространение волны напряжения в полубесконечном стержне и приводится точное решение для модели Маквелла. Для более сложных вязкоупругих сред приводится асимптотический метод решения на приме-

ре разрывного изменения напряжения. Для стержней разрывы напряжений и деформаций распространяются с упругими скоростями. Этот результат обобщается на неограниченную среду.

Дополнительно к задачам этого типа рассматривается пространство возмущений в телах конечных размеров по направлениям переменных полей. Применение метода интегральных преобразований в этих случаях приводит к тому, что с усложнением вязкоупругих свойств процедура обращения быстро становится непрактичной. Преодоление этих трудностей для некоторых типов динамических задач состоит в перенесении на вязкоупругость метода, применяемого в теории упругости при зависящих от времени граничных условиях. Это иллюстрируется на примере стержня конечной длины и задачей о течении сдвига.

Гармонические термовязкоупругие волны в неограниченной среде рассматриваются при изотермических и неизотермических условиях. Показано, что происходит не только затухание этих волн, но проявляется также дисперсия, вызванная частотной зависимостью фазовой скорости, а поэтому распространяющийся импульс меняет свою форму. Для того чтобы показать, что направление затухания не всегда совпадает с направлением распространения, рассматривается отражение гармонических поперечных и продольных волн от свободной границы для действительного и комплексного отношения параметров, характеризующих пространственные свойства вектора перемещения.

Из динамических задач, связанных с движущимися нагрузками на вязкоупругом полупространстве, рассматривается пример о разрыве давления, перемещающегося с постоянной скоростью.

В пятой главе собраны результаты общего характера. Для линейных задач термовязкоупругости доказана единственность решения, являющегося обобщением на неизотермический случай изотермической теоремы.

Методы теории упругости перехода к несвязанным уравнениям равновесия с использованием вектора Галеркина, функции напряжения Папковича-Нейберга при помощи свертки Стильтьеса обобщаются на случай вязкоупругости. Это обстоятельство иллюстрируется на примерах решения контактных задач и доказательства теоремы взаимности. Отмечается, что для этих же целей могут быть использованы интегральные преобразования, которые, однако, несмотря на более простой подход, не позволяют достичь необходимой общности и строгости при рассмотрении различных вопросов.

Свертка Стильтьеса используется при доказательстве двух первых вариационных теорем вязкоупругости, которые соответственно являются обобщением теорем Ху-Вашица Хеллингера-Рейсснера из теории упругости. Для упрощенного функционала первая теорема является обобщением теоремы о стационарности потенциальной энергии, а вторая -- теоремы о стационарнос-

ти дополнительной энергии. Подчеркивается, что прямое использование вариационных теорем является более строгим и общим способом описания поведения вязко-упругих сред по сравнению с использованием интегральных преобразований в сочетании с соответствующими упругими теориями.

Две другие вариационные теоремы, в которых не используется свертка Стильтьеса, имеют ограниченное применение, так как их доказательство основано на допущении разделения пространственных и временных переменных. Ограничения состоят в том, что материал считается изотропным, а вязкоупругий коэффициент Пуассона — действительной константой. Эти результаты являются прямым обобщением соответствующих теорем для упругих сред и устанавливают условия стационарности некоторых функционалов.

При определенных ограничениях получаются значительно более сильные результаты, устанавливающие минимальное значение некоторых других функционалов. Эти результаты формулируются при помощи четырех минимальных теорем; из которых первая связана с теоремой о минимуме потенциальной энергии теории упругости и применима ко всем материалам, с неотрицательно произведенной работой. Вторая минимальная теорема соответствует теореме минимума дополнительной энергии в теории упругости и применима в ограниченных случаях, например, в опытах на ползучесть. Для стационарных гармонических колебаний хотя и применимы эти теоремы, практически удобнее непосредственно вывести две другие минимальные теоремы, из которых третья — доказывается вкратце, а четвертая — отнесена в упражнения.

Минимальные теоремы позволяют получить оценки действительных и мнимых частей эффективных комплексных модулей композитных вязкоупругих материалов в тех случаях, для которых нет точных решений.

В конце каждой из первых пяти глав сформулировано в общей сложности тридцать семь задач, решение которых позволяет значительно сознательнее усваивать основной материал.

В шестой главе, на основе принципа объективности, то есть независимости свойств материала от системы координат, рассматривается при изотермических условиях термодинамическая теория нелинейной вязкоупругости, которая является частным случаем простых материалов с учетом затухающей памяти. Формула для напряжения, учитывающая зависимость градиента деформации от координат, выражается при помощи функционала, который инвариантен относительно изменения начала отсчета времени, и тем самым из рассмотрения исключаются материалы, обладающие пределом текучести. Поскольку градиент деформации не удовлетворяет принципу объективности, то мера деформации определяется из закона сохранения энергии и неравенства роста энтропии. В результате получено определяющее

уравнение, из которого следует, что скорость диссипации энергии неотрицательна. Аналогия между нелинейной и линейной теориями прослеживается достаточно убедительно. Приведенная форма определяющих соотношений общей нелинейной теории для инфинитезимальных деформаций приводит к результатам линейной теории. Способы решения задач в нелинейной постановке оказываются более сложными, так как становятся неприменимы теоремы и методы, развитые для линейных функционалов.

В качестве примера рассматривается деформация простого сдвига в несжимаемом изотропном материале. Точное решение для компонент напряжений с использованием выражения накопленной энергии в виде суммы двухкратных интегралов применяется к истории деформации, соответствующей условиям релаксации напряжений в инфинитезимальной линейной теории. Для простоты предполагается, что в функции релаксации аргументы входят в аддитивной форме. Отмечается сходство с решением задачи о кручении прямого цилиндра, т. е. известный из нелинейной теории упругости результат о локальной эквивалентности крутильных деформаций и состояния простого сдвига.

Из разных вариантов нелинейной теории отмечается только подход Грина—Ривлина [6] и не указываются другие возможности построения определяющих уравнений. Особо следовало бы отметить результаты Ю. Н. Работнова по изучению подобия изохронных кривых ползучести, позволяющие привести классическую схему к виду, удобному для практических приложений [7].

В последних двух параграфах этой главы рассматриваются вязкоупругие жидкости. Определяющее уравнение выводится на основе принципа объективности и требования изотропии применительно к функционалу накопленной энергии, а также с использованием уравнения неразрывности закона сохранения энергии и неравенства роста энтропии. Получено выражение, определяющее напряжение при помощи тензорного функционала через дифференциал Фреше первого порядка от функционала накопленной энергии, и условие неотрицательности скорости диссипации энергии. Компактная форма для компонент тензора напряжений получена при помощи частных производных от продифференцированной по времени накопленной энергии по компонентам тензора скорости деформации. Рассматривается простая деформация сдвига в состоянии неограниченного течения.

Для достаточно медленного стационарного течения в первом приближении основную роль играют касательные напряжения, и поведение среды становится аналогичным поведению ньютоновской жидкости с эффективной вязкостью, эта величина равна учетверенному интегралу от функции релаксации, взятому по всей области изменения аргумента. Существует широкий класс вискозиметрических течений, при которых свойства жидкости задаются только для состояния течения простого сдвига [8].

Релаксация напряжений, возникающая при деформации простого сдвига, определяется формулами, использование которых для обработки экспериментальных данных оказывается возможным только в том случае, если функции релаксации имеют аддитивные аргументы. Такой подход не является единственным обобщением изотропной модели ньютоновской вязкой жидкости [9]. Эффекты анизотропии учитываются в теории жидких кристаллов [10].

Седьмая глава посвящена обоснованию экспериментальных способов определения механических характеристик, входящих в определяющие уравнения. Обычно при помощи дополнительного анализа устанавливается связь между этими характеристиками и наблюдаемыми величинами. В идеальном случае анализ должен быть основан на точном решении краевой задачи, соответствующей условиям, в которых находится испытываемый образец. Достижение этой цели, за исключением некоторых случаев, встречает трудности, которые связаны с тем, что теоретические уравнения и используемые для них граничные условия приблизительно отражают реальность. Это обстоятельство указывает на важную роль теоретического обоснования эксперимента.

В линейной изотермической теории основными характеристиками являются функции релаксации и ползучести, комплексные модули податливости и вязкости, определяемые непосредственно из эксперимента. Вопрос о взаимосвязи этих характеристик оказывается очень важным. Эквивалентность задания функций релаксации ползучести и соответствующих комплексных модулей или податливостей на бесконечных интервалах времени и частот не распространяется на конечные интервалы этих аргументов. Поэтому для установления взаимосвязи используется частный вид механических характеристик. В простейших опытах на релаксацию и ползучесть в условиях одноосной деформации может быть определена лишь одна из двух независимых механических характеристик изотропных материалов. При проведении этих опытов следует учитывать следующие обстоятельства.

Во-первых, необходимо проверить справедливость принципа суперпозиции, т. е. установить пропорциональность между изменениями деформации или напряжения и величинами, характеризующими поведение материала, ибо в противном случае применение линейной теории оказывается невозможным.

Во-вторых, при обычных способах крепления образца в испытательной машине эффектами, возникающими от недостаточности распределения внутренних и поверхностных напряжений, можно пренебречь, если продольные размеры намного превышают поперечные.

В-третьих, функции ползучести и релаксации не учитывают переходные процессы, а поэтому данные о механических харак-

теристиках для малых интервалов времени, обычно не менее одной десятой секунды, оказываются неточными.

Функция релаксации на интервале времени, меньшем на три порядка, может быть получена при исследовании стационарного режима крутильных колебаний образца, изготовленного в виде прямого кругового полого цилиндра, один конец которого закреплен, а другой — подвержен действию моногармонического крутящего момента. При этом на максимальный интервал частот или на соответствующий минимальный интервал времени накладываются ограничения, обусловленные возникающим в установке резонансом. Для получения данных о механических характеристиках при больших частотах и меньших временах необходимо использовать опыты, связанные с распространением волн. Аналогичные опыты, примененные к изотропной сплошной среде, в отличие от деформации чистого сдвига, позволяют получить две функции, определяющие независимые механические характеристики.

Вдоль длинной нити рассматривается распространение затухающей волны, возбуждаемой на одном из ее концов. Выражения для фазовой скорости, коэффициента затухания и комплексного модуля Юнга, упрощаются в предположении, что возмущающий импульс достаточно мал и может быть разложен в ряд Фурье. Исследование высокочастотных волн основывается на дальнейших упрощениях, связанных с выбором частных форм для фазовой скорости и тангенса угла потерь, например, в виде констант. Этот способ применим для получения второй независимой механической характеристики, которая описывает распространение одномерных радиально симметричных волн.

Дано краткое описание температурных эффектов, природа которых связана с фактором времени. Простейший случай возникает тогда, когда температурные эффекты нужно связать с различными исходными температурами изотермической теории.

Одна из возможностей решения задач в рамках общей линейной теории связанной термовязкоупругости, заключается в том, что при малых отклонениях от исходной температуры зависимостью механических характеристик от этих отклонений можно пренебречь, то есть решение ищется по той же схеме, что и в изотермических условиях. Для достаточно больших отклонений задача выходит за рамки линейной теории.

Другая возможность позволяет учитывать зависимость механических свойств от общей температуры в двух случаях: 1. Историю температурного поля известна из эксперимента. 2. Взаимосвязь механических и тепловых эффектов пренебрежимо мала, так что переменная температура определяется только из уравнения теплопроводности.

Постулат о термореологически простом материале состоит в том, что вязкоупругие характеристики можно представить одной кривой, которая при разных температурах сдвигается вдоль оси

времени или частоты. Это дает не только удобный способ получения зависимости механических характеристик от времени (или частоты) и температуры, но и возможность формулировки крайних задач линейной несвязанной неизотермической теории. Общих условий для определения терморологически простых материалов не существует, за исключением непосредственной проверки процедуры сдвига.

В заключение экспериментальных методов линейной теории следует указать, что автор не обсуждает возможности такого эффективного способа исследования, каким является метод внутреннего трения релаксационного типа.

Приложение нелинейной теории к определению механических характеристик реальных материалов встречает не только большие экспериментальные трудности, но даже не имеет единого подхода относительно того, какое из нескольких возможных рологических соотношений следует использовать в каждом конкретном случае.

Согласно теории Грина-Ривлина [6], связь между напряжениями и деформациями устанавливается в виде ряда кратнointегральных соотношений Вольтерровского типа, содержащего только нечетные члены в силу предположения о неотрицательности накопленной энергии.

Казалось бы, определение весовых функций, несмотря на сложности, возникающие из-за их многомерной природы, позволяет получить вязкоупругие характеристики. Однако в действительности дело осложняется еще и тем, что по смыслу приближения эти функции не являются внутренними характеристиками материала, так как зависят от уровня, которым ограничивается ряд. С другой стороны, быстро возрастающая с увеличением числа слагаемых ряда экспериментальная погрешность [11] существенно ограничивает возможности учета высших членов разложения.

Для преодоления этих трудностей используются различные способы, из которых рассматриваются процедуры, связанные с определением числа независимых испытаний [12], и применение модифицированного принципа суперпозиции [13].

Для описания нелинейного вязкоупругого поведения жидкостей рассматриваются три формы определяющих соотношений, принципиальные различия которых состоят в том, что в первом случае функция релаксаций зависит от истории изменения напряжения [14], во втором — от истории изменения скорости деформации [15], в третьем — от истории деформации, измененной относительно мгновенной конфигурации [16]. Обсуждение ясно показывает возникающие трудности, которые не позволяют сформулировать общепринятые определяющие соотношения с соответствующими методами определения механических характеристик.

В приложении даны очень краткие сведения о ступенчатой функции Хевисайда и дельта-функции, о свойствах и приближенном обращении преобразования Лапласа.

В целом книга, написанная ясно и четко, доступна широкому кругу читателей, знакомых с основами механики сплошной среды, и может быть использована как ценное учебное пособие по теории вязкоупругости.

Рецензия-аннотация написана по совету профессора К. Ф. Черных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christensen R. M. Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York and London, 1971. (Русск. перев. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974).
2. Nakada O. Theory of Non-Linear Responses. J. Phys. Soc. Japan, 1960, v. 15, № 12, p. 2280.
3. Gurtin M. E., Sternberg E. On the Linear Theory of Viscoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, v. 11, p. 291.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием.—ПММ, 1948, т. 12, вып. 1, с. 53.
5. Onat E. T., Breuer S. On Uniqueness in Linear Viscoelasticity, in «Progress in Applied Mechanics» (Drucker D. C., ed), The Prager Anniversary Volume, p. 349, New York, 1963.
6. Green A. E., Rivlin R. S. The Mechanics of Non-Linear Materials with Memory, Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., 1957, v. 1, № 1, p. 1.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций, М., «Наука», 1966.
8. Coleman B. D., Marcovitz H., Noll W., In «Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids» (Truesdell C. ed.) Springer, New York, 1966.
9. Marcovitz H. Nonlinear Steady Flow Behavior, In «Rheology» (Eirich F. R. ed) v. 4, p. 347, Academic Press, New York, 1967.
10. Erickson J. L. Continuum Theory of Liquid Crystals. Appl. Mech. Rev., 1967, v20, № 1.
11. Gradowczyk M. H., On the Accuracy of the Green-Rivlin Representation for Viscoelastic Materials. Int. J. Solids Structures, 1969, v. 5, № 8 p. 873.
12. Lockett F. J. Creep and Stress Relaxation Experiments for Non-Linear Materials. Int. J. Eng. Sci., 1965, v. 3, p. 59.
13. Findley W. N., Khosla G. Application of the Superposition Principle and Theories of Mechanical Equation of State, Strain, and Time Hardening to Creep of Plastics under Changing Loads, J. Appl. Phys., 1955, v. 26, № 7, p. 821.
14. Kaye A. An Equation of State for Non-Newtonian Fluids. Brit. J. Appl. Phys., 1966, v17, p. 803.
15. Lodge A. S., Elastic Liquids. Academic Press, New York, 1964. (Русск. пер. Лодж А. Эластичные жидкости, М., «Наука», 1969).
16. Bernstein B., Kearsley E. A., Zapas L. J. A Study of Stress Relaxation with Finite Strain. Trans. Soc. Rheol., 1963, v. 7, p. 391.