пользовать метод разделения деформации для построения определяющих уравнений непрерывных конструкций частного вида.

Теорема 8. Если для непрерывной конструкции выполняются условия теоремы 7 и множество векторных полей внешних воздействий зависит от конечного или счетного набора параметров

$$q=\chi(t,\ r,\ a),\quad a=\{a_1,\ \ldots,\ a_r\}$$

(χ—заданная функция; допускается случай $r=\infty$), то система дифференциальных уравнений (15) расщепляется

$$H_i(t)=\Psi_i(H_i(t),\ a),\quad i=\overline{1,\ s}.$$

Доказательство выполняется аналогично доказательству теоремы 2 работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
2. **Самарин Ю. П.** О применении теории управления к описанию деформирования реономных материалов. — В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Куйбышев, 1975, вып. 2 (Куйбышевский политехнический институт).
3. **Самарин Ю. П.** Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1971, № 3.
4. **Самарин Ю. П.** Применение метода разделения деформации в теории ползучести бетона. — В сб.: Механика. Новые разработки конструкций. Куйбышев, 1973. (Куйбышевский политехнический институт).

УДК 519.2

В. Б. Илюшин, Ю. В. Солодянников

К ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТА СВЕРТКИ

Устройство наблюдения [1], участвующее в идентификации объекта, можно представить в виде структуры, изображенной на рис. 1. На вход устройства поступает сигнал x. Устройство состоит из отдельных блоков, каждый из которых вносит помеху измерений, являющуюся случайной величиной. В результате на выходе наблюдается величина z. Помеха измерений β_i, $i=\overline{1,m}$ каждого блока определяется своим распределением вероятностей. Распределение вероятностей суммарной помехи измерений $\beta_{(m)}=\beta_1+\ldots+\beta_m$ является сверткой распределений вероятностей слагаемых помех, которые либо из-

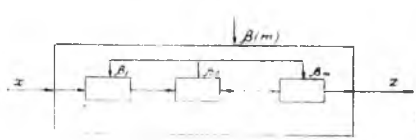

Рис. 1

вестны, либо с некоторой точностью оцениваются по выборке, причем элементы выборки измеряются со случайными погрешностями. В первом случае для нахождения свертки распределений ее компоненты аппроксимируются некоторыми функциями, и возникает задача определения точности аппроксимаций истинной свертки сверткой аппроксимирующих функций. Во втором случае свертка истинных распределений оценивается сверткой оценок, полученных на основе выборок, и возникает задача анализа точности статистического оценивания свертки. Задача второго случая неявно включает задачу первого случая.

Таким образом, приходим к постановке следующих математических задач, касающихся нахождения распределения вероятностей суммы независимых случайных величин

$$\beta_{(m)}=\beta_1+\ldots+\beta_m. \tag{1}$$

1. Задача аппроксимации компонент свертки является более удобной функцией, когда свертка аппроксимирующих функций дает аппроксимацию свертки истинных функций. При этом требуется определить погрешность аппроксимаций результата свертки.

2. Задача оценки, когда по выборке строится статистическая оценка распределения вероятностей каждого слагаемого суммы (1) и требуется оценить значение критерия согласия о близости свертки распределений вероятностей и свертки их оценок.

3. Задача оценки при наличии случайных погрешностей изменений элементов выборки. Если ξ_i — наблюдаемая случайная величина, β_i — случайная величина, распределение вероятностей которой подлежит оценке, ε_i — случайная величина погрешности измерений, то $\xi_i=\beta_i+\varepsilon_i$. Требуется по оценке $\hat{p}_{\xi_{(m)}}(x)$ распределения вероятностей случайной величины $\xi_{(m)}=\sum\limits_{i=1}^{m}(\beta_i+\varepsilon_i)$ построить оценку $\hat{p}_{\beta_{(m)}}(x)$ распределения случайной величины $\beta_{(m)}=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i$ и оценить значение критерия согласия о близости $\hat{p}_{\beta_{(m)}}(x)$ и истинного распределения случайной величины $\beta_{(m)}$.

Обозначим $p_i(x)$ — плотность вероятностей случайной величины β_i, $\hat{p}_i(x)$—оценку $p_i(x)$, $p''_i(x)$ — аппроксимацию $p_i(x)$. Для $\beta_{(m)}$ обозначения аналогичные —$p_{(m)}(x)$, $\hat{p}_{(m)}(x)$, $p''_{(m)}(x)$. Рассмотрим сначала сформулированные выше задачи при $m=2$.

Теория непараметрического оценивания плотности вероятностей, вообще говоря, не предполагает того, что для оценки $\hat{p}(x)$ и аппроксимации $p''(x)$ выполнено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p''(x)\,dx = 1,$$

а также для любого x, $\hat{p}(x) \geqslant 0$ и $p''(x) \geqslant 0$. Введем условия, учитывающие это:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p''_1(x)|\,dx \leqslant A_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p_1(x)|\,dx \leqslant B_1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p''_2(x)|\,dx \leqslant A_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p_2(x)|\,dx \leqslant B_2.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p''_{(2)}(x)|\,dx \leqslant A_1 A_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p_{(2)}(x)|\,dx \leqslant B_1 B_2.$$

Пусть мерой точности статистической оценки является интегральный квадратичный критерий

$$I = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{p}(x) - p(x)]^2\,dx\right\}, \tag{2}$$

а мерой точности аппроксимации — среднеквадратическое отклонение

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [p(x) - p''(x)]^2\,dx. \tag{3}$$

В выражениях (3) и (2) $p(x)$ — истинная плотность вероятностей, $p''(x)$ и $\hat{p}(x)$ соответственно ее аппроксимация и оценка, $M\{\ \}$ — означает математическое ожидание. Обозначим:

$$\Delta_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [p_1(x) - p''_1(x)]^2\,dx, \quad I_1 = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [p_1(x) - \hat{p}_1(x)]^2\,dx\right\};$$

$$\Delta_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [p_2(x) - p''_2(x)]^2\,dx, \quad I_2 = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [p_2(x) - \hat{p}_2(x)]^2\,dx\right\};$$

$$\Delta_{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} [p_{(2)}(x) - p''_{(2)}(x)]^2\,dx, \quad I_{(2)} = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [p_{(2)}(x) - \hat{p}_{(2)}(x)]^2\,dx\right\}.$$

Теорема 1

$$\Delta_{(2)} \leqslant \left(\|p_1(x)\|_{L^2}\,\Delta_2^{\frac{1}{2}} + \|p''_2(x)\|_{L^2}\,\Delta_1^{\frac{1}{2}}\right)(1 + A_1 A_2); \tag{4}$$

$$I_{(2)} \leqslant \left(\|p_1(x)\|_{L^2}\,I_2^{\frac{1}{2}} + \|p''_2(x)\|_{L^2}\,I_1^{\frac{1}{2}}\right)(1 + B_1 B_1). \tag{5}$$

Доказательство. Неравенство (4) получим следующим образом:

$$|p_{(2)}(x) - p''_{(2)}(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} p_1(t)\,p_2(x-t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} p''_1(t)\,p''_2(x-t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} p_1(t)\,|\,p_2(x-t)-p_2''(x-t)\,|\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} p_2''(x-t)\,|\,p_1(t)-$$

$$-p_1''(t)\,|\,dt \leqslant \|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,\Delta_2^{\frac{1}{2}}+\|\,p_2''(x)\,\|_{L^2}\Delta_1^{\frac{1}{2}};$$

$$\Delta_{(2)}=\int_{-\infty}^{\infty}[p_{(2)}(x)-p_{(2)}''(x)]^2\,dx\leqslant(\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,\Delta_2^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\|\,p_2''(x)\,\|_{L^2}\,\Delta_1^{\frac{1}{2}})\int_{-\infty}^{\infty}|\,p_{(2)}(x)-p_{(2)}''(x)\,|\,dx\leqslant(\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,\Delta_2^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\|\,p_2''(x)\,\|_{L^2}\,\Delta_1^{\frac{1}{2}})\,(1+A_1A_2).$$

Докажем (5). Пусть

$$I_{i0}=\int_{-\infty}^{\infty}[p_i(x)-\hat{p}_i(x)]^2\,dx,\quad I_i=M\,\{I_{i0}\},\quad i=1,\ 2;$$

$$I_0=\int_{-\infty}^{\infty}[p_{(2)}(x)-\hat{p}_{(2)}(x)]^2\,dx,\quad I_{(2)}=M\,\{I_0\}.$$

Пространством элементарных событий U, на котором определяется статистика критерия согласия, является множество всех возможных реализаций n-мерной выборки δ наблюдаемой случайной величины. Пусть $U_i=\{\sigma_i\}$—пространство элементарных событий для случайной величины I_{i0}. Тогда декартово произведение $U_1\times U_2=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ есть пространство элементарных событий для случайных величин

$$I_0 \text{ и } (\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,I_{20}^{\frac{1}{2}}+\|\,\hat{p}_2(x)\,\|_{L^2}\,I_{10}^{\frac{1}{2}})\,(1+B_1B_2).$$

При любом элементарном исходе (σ_1,σ_2)

$$I_0\leqslant(\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,I_{20}^{\frac{1}{2}}+\|\,\hat{p}_2(x)\,\|_{L^2}\,I_{10}^{\frac{1}{2}})\,(1+B_1B_2). \tag{6}$$

Числовое соотношение (6) доказывается аналогично соотношению (4). Из неравенства (6) получаем

$$I_{(2)}=M\,\{I_0\}\leqslant M\,\{\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,I_{20}^{\frac{1}{2}}+\|\,\hat{p}_2(x)\,\|_{L^2}\,I_{10}^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$=(\|\,p_1(x)\,\|_{L^2}\,M\,\{I_{20}^{\frac{1}{2}}\}+\|\,\hat{p}_2(x)\,\|_{L^2}\,M\,\{I_{10}^{\frac{1}{2}}\})\,(1+B_1\,B_2).$$

Используя неравенство Иенсена, получим

$$M\,\{I_{i0}\}=M\,\{[I_{i0}^{\frac{1}{2}}]^2\}\geqslant[M\,I_{i0}^{\frac{1}{2}}]^2,\quad i=1,\ 2.$$

Тогда

$$I_{(2)} \leqslant (\| p_1(x) \|_{L^2} [M\{I_{20}\}]^{\frac{1}{2}} + \| p_2(x) \|_{L^2} [M\{I_{10}\}]^{\frac{1}{2}})(1 + B_1 B_2) =$$

$$= (\| (p_1(x) \|_{L^2} I_2^{\frac{1}{2}} + \| \hat{p}_2(x) \|_{L^2} I_1^{\frac{1}{2}})(1 + B_1 B_2).$$

Теорема доказана.

Кроме среднеквадратического отклонения в качестве меры точности аппроксимации на практике используется норма пространства непрерывных функций

$$\sup_{x \in (-\infty,\, \infty)} \{| p_{(2)}(x) - p''_{(2)}(x) |\}. \tag{7}$$

Легко видеть, что для нее выполняется следующее соотношение:

$$\sup_{i \in (-\infty,\, \infty)} \{ | p_{(2)}(x) - p''_{(2)}(x) | \} \leqslant \sup_{x \in (-\infty,\, \infty)} \{ | p_1(x) - p''_1(x) | \} +$$

$$+ A_1 \sup_{x \in (-\infty,\, \infty)} \{ |p_2(x) - p''_2(x)| \}.$$

Рекуррентно можно получить аналогичные формулы для произвольного числа слагаемых (1).

Рассмотрим задачу учета погрешностей измерения элементов выборки, возникающую при оценивании плотности вероятностей суммы двух случайных величин сверткой оценок Ченцова [2], которые строятся следующим образом. Измеряется выборка $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^N)$ случайной величины ξ, принимающей значения в μ-измеримом пространстве X. На X задается весовая функция $r(x)$ и посредством скалярного произведения

$$(\varphi, f) = \int_X r(x)\, \varphi(x)\, f(x)\, \mu(dx)$$

вводится гильбертово пространство L^2. Предполагая, что $p(x) \in L^2$, рассматривается ее проекция $p''(x)$ на n-мерное подпространство с ортонормированным базисом $\Psi_k(x),\, k = \overline{1, n}$,

$$p''(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x),$$

здесь

$$a_k = \int_X \psi_k(x)\, p(x)\, r(x)\, \mu(dx).$$

Плотность вероятностей $p(x)$ оценивается функцией

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x),$$

здесь

$$\gamma_k = N^{-1} [c_k(\xi^1) + \ldots + c_k(\xi^N)], \quad c_k(x) = \psi_k(x)\, r(x).$$

Имеем

$$p''_i(x) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k^{(i)} \psi_k^{(i)}(x), \quad p_i(x) = \sum_{k=1}^{n_i} \gamma_k^{(i)} \psi_k^{(i)}(x), \quad i = 1,\ 2.$$

Оценка $p_{(i)}(x)$ характеризуется следующим значением критерия согласия [2]:

$$I_i = \Delta_i + \sum_{k=1}^{n_i} \frac{1}{N_i} D\{\gamma_k^{(i)}\}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для оценки $p_{(2)}(x) = p_1(x) \times p_2(x)$ критерий согласия принимает следующее значение:

$$I_{(2)} = \Delta_{(2)} + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{N_1 N_2} D\{\gamma_k^{(1)} \gamma_j^{(2)}\} \int_X \left| \int_X \psi_k^{(1)}(t) \psi_j^{(2)}(x-t) \mu(dt) \right| \mu(dx). \tag{8}$$

При наличии случайных погрешностей измерений элементов выборок фактически наблюдаются случайные величины $\xi_i = \beta_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2$. Поэтому оценки $p_i(x)$ являются, вообще говоря, смещенными для $p''_i(x)$, $i = 1, 2$. В результате значение I дается выражением, отличным от выражения (8). Если операторы

$$A^{(i)} \psi(x) = \int_X p_{\varepsilon_i}(x-t) \psi(t) \mu(dt), \quad i = 1, 2$$

осуществляют взаимнооднозначное соответствие почти всюду и функции

$$\xi_k^{(i)}(x) = \int_X p_{\varepsilon_i}(x-t) \psi_k(t) \mu(dt), \quad k = \overline{1, n_i}$$

линейно-независимы, то для того, чтобы избавиться от смещения оценки $p_{(2)}(x)$, возьмем, вместо коэффициентов $\gamma^{(i)}_k$, $k = \overline{1, n_i}$, следующие величины, определяемые на основе матричных операций [7]:

$$b^{(i)} = \frac{1}{N_i} \rho^{-1} \sum_{k=1}^{N_i} \xi^{(1)}(\xi^k). \tag{9}$$

Здесь

$$b^{(i)} = (b_1^{(i)}, \ldots, b_{n_i}^{(i)}), \quad \zeta^{(i)}(x) = (\zeta^{(i)}(x), \ldots, \zeta_{n_i}^{(i)}(x)),$$

ρ_i—матрица Грамма функций $\zeta_k^{(i)}(x)$, $k = \overline{1, n_i}$.

Оценка

$$p_i(x) = \sum_{i=1}^{n} b_k^{(i)} \psi_k^{(i)} \tag{10}$$

является несмещенной для $p''_i(x)$, тогда оценка $p_{(2)}(x)$— несмещенная для $p''_{(2)}(x)$. Значение критерия согласия, соответствующее оценке (10), имеет следующий вид:

$$I_{(2)} = \Delta_{(2)} + \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{N_1 N_2} D\{b_k^{(1)} b_j^{(2)}\} \int_X \times$$

$$\times [\int_X \psi_k^{(i)}(t) \psi_j(x-t) \mu(dt)] \mu(dx).$$

Рассмотрим оценку свертки плотностей вероятностей на основе гистограмм компонент свертки (рис. 2). Пусть плотность вероятностей $p_i(x)$ случайной величины β_i оценивается гистограммой

$$p_i(x) = \begin{cases} \dfrac{g_i^{II}(k)}{h}, & \text{при } a_i + (k-1)h \leq x < a_i + kh, \quad k = \overline{1, n_i}, \\ 0, & \text{при } x \text{ вне } (a_i, a_i + n_i h), \end{cases}$$

полученной путем N_i независимых наблюдений над случайной величиной β_i. Здесь $g_i^{II}(k)$ — частота попадания элементов выборки случайной величины β_i в интервал $(a_i + (k-1) h_1 a_i + kh)$.

Обозначим

$$g_i^I(k) = \int_{a_i+(k-1)h}^{a_i+kh} p_i(x)\, dx,$$

тогда ошибка в определении вероятности попадания случайной величины в интервал $(a_i + (k-1)h, a_i + kh)$ равна $\delta_i(k) = g_i^I(k) - g_i^{II}(k)$. Введем следующие обозначения:

$$d_m = \sum_{i=1}^{m} n_i; \quad a = \sum_{i=1}^{m} a_i;$$

$$g_{(m)}^T(k) = \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} \prod_{i=1}^{m} {}^*p_i(t)\, dt, \quad k = \overline{1, d_m};$$

$$g_{(m)}^{T_1}(k) = \prod_{i=1}^{m} {}^*g_i^T(k), \quad g_{(m)}^{II_1}(k) = \prod_{i=1}^{m} {}^* g_i^{II}(k), \quad k = \overline{2, d_m}.$$

В частном случае при $m = 2$

$$g_{(2)}^T(k) = \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} p_1(x) * p_2(x)\, dx;$$

$$g_{(2)}^{T_1}(k) = \sum_{i+j=k} q_1^T(i)\, g_2^T(j),$$

$$g_{(2)}^{II_1}(k) = \sum_{i+j=k} g_1^{II}(i)\, g_2^{II}(j), \quad k = \overline{1, d_2}, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad j = \overline{1, n_2}.$$

Воспользовавшись формулой свертки гистограмм, приведенной в [3], легко установить следующее соотношение:

$$g_{(m)}^T(k) = \frac{g_{(m)}^{T_1}(k) + g_{(m)}^{T_1}(k+1)}{2}, \quad k = \overline{1, d_m}, \tag{11}$$

причем $g^{T_1}_{(m)}(1) = g^{T_1}_{(m)}(d_m+1) = 0$. Вероятности $g^T_{(m)}(k)$ оценим так:

$$g^{\Pi}_{(m)}(k) = \frac{g^{\Pi_1}_{(m)}(k) + g^{\Pi_1}_{(m)}(k+1)}{2}, \quad k = \overline{1,\ d_m}, \tag{12}$$

здесь $g^{\Pi_1}_{(m)}(1) = g^{\Pi_1}_{(m)}(d_m+1) = 0$. Легко видеть, что

$$M\,\{g^{\Pi}_{(m)}(k)\} = g^{T}_{(m)}(k).$$

Рассмотрим разности

$$\delta'_{(m)}(k) = g^{T_1}_{(m)}(k) - g^{\Pi_1}_{(m)}(k), \quad \delta_{(m)}(k) = g^{T}_{(m)}(k) - g^{\Pi}_{(m)}(k).$$

Следуя методу наименьших квадратов, примем за меру отклонения величин $g^{\Pi}_{(m)}(k)$ и $g^{T}_{(m)}(k)$, $g^{\Pi_1}_{(m)}(k)$ и $g^{T_1}_{(m)}(k)$ статистики

$$\sum_{k=1}^{d_m} c_k\,[\delta_{(m)}(k)]^2, \quad \sum_{k=1}^{d_m} c_k\,[\delta'_{(m)}(k)], \tag{13}$$

здесь c_k—некоторые коэффициенты. Имеют место следующие теоремы, касающиеся распределения статистик вида (13).

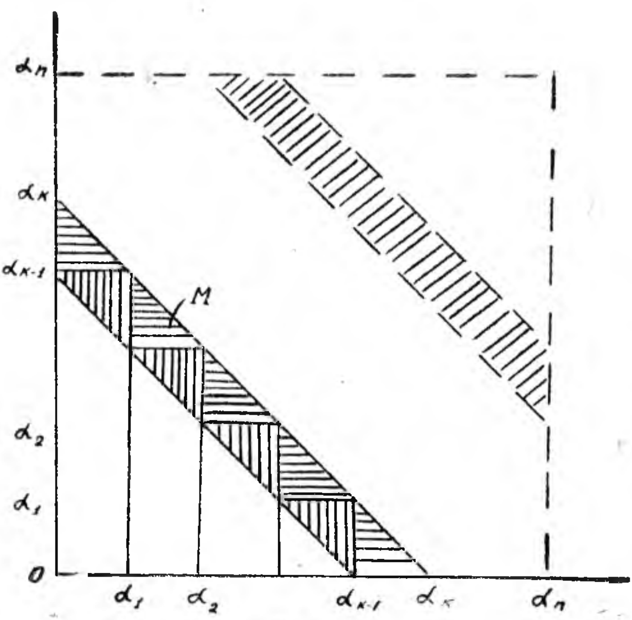

Рис. 2

Теорема 2. Если $\sigma^2{}_k$—дисперсии случайных величин,

$$s_k = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i+j=k} (\delta_1(i)\,g_2^T(j) + \delta_2(j)\,g_1^T(i)) + \sum_{i+j=k+1} (\delta_1(i)\,g_2^T(j) + \delta_2(j)\,g_1^T(i))\Bigg]$$

R—детерминант корреляционной матрицы случайных величин, $\frac{s_k}{\sigma_k}$, R_{ij} — минор детерминанта R, то статистика

$$\sum_{k=1}^{d_2} \left[\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k} \right]^2 \tag{14}$$

имеет распределение вероятностей с характеристической функцией

$$\varphi(t) = R^{\frac{d_2-1}{2}} \begin{vmatrix} R_{11}-2itR & R_{12} & \dots & R_{1d_2} \\ R_{21} & R_{22}-2itR & \dots & R_{2d_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{d_21} & R_{d_22} & & R_{d_2d_2}-2itR \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$

Доказательство. Имеем

$$\delta_{(2)}(k) = \frac{1}{2}\Big[\sum_{i+j=k} g_1^T(i)\, g_2^T(j) - \sum_{i+j=k+1} g_1^T(i)\, g_2^T(j) -$$

$$- \sum_{i+j=k} g_1^\Pi(i)\, g_2^\Pi(j) - \sum_{i+j=k+1} g_1^\Pi(i)\, g_2^\Pi(j)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i+j=k} g_1^T(i)\, \delta_2(j) + \sum_{i+j=k} g_2^\Pi(j)\, \delta_1(i) + \sum_{i+j=k+1} g_1^T(i)\, \delta_2(j) +$$

$$+ \sum_{i+j=k+1} g_2^\Pi(j)\, \delta_1(i)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\sum_{i+j=k} g_1^T(i)\, \delta_2(j) + \sum_{i+j=k} g_2^T(j)\, \delta_1(i) +$$

$$+ \sum_{i+j=k+1} g_1^T(i)\, \delta_2(j) + \sum_{i+j=k+1} g_2^T(i)\, \delta_2(j) + \sum_{i+j=k} \delta_1(i)\, \delta_2(j) +$$

$$+ \sum_{i+j=k+1} \delta_1(i)\, \delta_2(j)\Big] = s_k + \frac{1}{2}\Big[\sum_{i+j=k} \delta_1(t)\, \delta_2(j) +$$

$$+ \sum_{i+j=k+1} \delta_1(i)\, \delta_2(j)\Big].$$

Так как $M\{\delta_k(i)\} = 0$, то $M\{\delta_1(i)\, \delta_2(j)\} = 0$.

Как показано в [8]

$$M\{\delta_k(i)\, \delta(j)\} = \frac{g_k^T(i)\, g_k^T(j)}{N_k}, \quad \text{при } i \neq j;$$

$$M\{[\delta_k(i)]^2\} = \frac{g_k^T(i)\,(1 - g_k^T(i))}{N_k}.$$

Учитывая это, можно выразить через $g_k^T(i)$, $i = \overline{1, n_k}$, $k = 1, 2$ дисперсию случайных величин s_k, $k = \overline{1, d_m}$

$$\sigma_k^2 = D\{s_k\} = M\Big\{\frac{1}{4}\Big[\sum_{i+j=k} (\delta_1(i)\, g_2^T(j) + \delta_2(j)\, g_1^T(i)) +$$

$$+\sum_{i+j=k+1}(\delta_1(i)\,g_2^T(j)+\delta_2(j)\,g_1^T(i))\Bigg]\Bigg[\sum_{i_1+j_1=k}(\delta_1)(i_1)\,g_2^T(j_1)+$$

$$+\delta_2(j_1)\,g_1^T(i_1))+\sum_{i_1+j_1=k+1}(\delta_1(i_1)\,g_2^T(j_1)+\delta_2(j_1)\,g_1^T(i_1))\Bigg]\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{4}\Bigg\{\sum_{i,\,j,\,i_1,\,j_1\in\mu_1}\Bigg[g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)\frac{g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)}{N_2}+g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)\frac{g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)}{N_1}\Bigg]+$$

$$+2\sum_{i,\,j,\,i_1,\,j_1\in\mu_2}\Bigg[g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)\frac{g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)}{N_2}+g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)\frac{g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)}{V_1}\Bigg]+$$

$$+\sum_{i,\,j,\,i_1,\,j_1\in\mu_3}\Bigg[g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)\frac{g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)}{N_2}+g_2^T(j)\,g_2^T(j_1)\frac{g_1^T(i)\,g_1^T(i_1)}{N_1}\Bigg]+$$

$$+\sum_{i+j=k}\Bigg[(g_1^T(i))^2\frac{g_2^T(j)\,(1-g_2^T(j)}{N_2}+2g_1^T(i+1)\,g_1^T(i)\frac{g_1^T(j)\,(1-g_2^T(j))}{N_2}+$$

$$+(g_1^T(i+1)^2\frac{g_2^T(j)\,(1-g_2^T(j))}{N_2}+(g_2^T(i))^2\frac{g_1^T(j)\,(1-g_1^T(j))}{N_1}+$$

$$+2g_2^T(i+1)\,g_2^T(i)\frac{(1-g_1^T(j))\,g_1^T(j)}{N_1}+(g_2^T(i+1))^2\frac{g_1^T(j)\,(1-g_1^T(j)}{N_1}\Bigg]\Bigg\},$$

здесь множества индексов суммирования определяются так:

$$\mu_1=\{i,\ j,\ i_1,\ j_1/i+j=i_1+j_1=k,\quad j\neq j_1,\ i\neq i_1\};$$
$$\mu_2=\{i,\ j,\ i_1,\ j_1/i+j=i_1+j_1-1=k,\ j\neq j_1,\ i\neq i_1\};$$
$$\mu_3=\{i,\ j,\ i_1,\ j_1/i+j=i_1+j_1=k+1,\ j\neq j_1\ i\neq i_1\}.$$

Для случайных величин $\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}$ и $\frac{s_k}{\sigma_k}$ имеем

$$P\left(\left|\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}-\frac{s_k}{\sigma_k}\right|\geqslant\varepsilon\right)=P\left(\frac{1}{2\sigma_k}\left|\sum_{i+j=k}\delta_1(i)\,\delta_2(j)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i+j=k+1}\delta_1(i)\,\delta_2(j)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{D\left\{\sum\limits_{i+j=k}\delta_1(i)\,\delta_2(j)+\sum\limits_{i+j=k+1}\delta_1(i)\,\delta_2(j)\right\}}{4\sigma_k^2\,\varepsilon^2}=\frac{0\left(\frac{1}{N_1N_2}\right)}{0\left(\frac{1}{N_1}\right)+0\left(\frac{1}{N_2}\right)}.$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}}P\left(\left|\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}-\frac{s_k}{\sigma_k}\right|<\varepsilon\right)=0.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}}P\left(\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}=\frac{s_k}{\sigma_k}\right)=1.$$

Таким образом, предельные распределения случайных величин $\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}$ и $\frac{s_k}{\sigma_k}$ совпадают, значит, предельные распределения квадратичных форм

$$\sum_{k=1}^{d_2}\left[\frac{\delta_{(2)}(k)}{\sigma_k}\right]^2 \text{ и } \sum_{k=1}^{d_2}\left[\frac{s_k}{\sigma_k}\right]^2$$

также совпадают. Случайные величины s_k асимптотически являются нормально коррелированными, так как получаются из асимптотически нормально коррелированных случайных величин $\delta_1(k)$, $k=\overline{1, n_1}$ и $\delta_2(k)$, $k=\overline{1, n_2}$ линейным преобразованием. Квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^{d_2}\left[\frac{s_k}{\sigma_k}\right]^2$$

имеет распределение вероятностей, характеристическая функция которого такова [9]:

$$\varphi(t)=R^{\frac{d_2-1}{2}}\begin{vmatrix} R_{11}-2itR & R_{12} & \ldots & R_{1d_2} \\ R_{21} & R_{22}-2itR & \ldots & R_{2d_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{d_21} & R_{d_22} & \ldots & R_{d_2d_2}-2itR \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Элементы детерминанта R можно выразить через вероятности $g_1^{\mathrm{I}}(k)$, $k=\overline{1, n_i}$, $i=1, 2$, аналогично тому, как это было сделано для дисперсий $\sigma^2{}_k$.

Замечание 2. Аналитический вид плотности вероятностей статистики (14) можно получить, если определить характеристические корни детерминанта R, а затем применить результат работы [10].

Теорема 3. Статистика

$$V=\sum_{k=1}^{d_m} N\,[\delta_{(m)}(k)]^2, \quad N=\min_{i=\overline{1, m}} N_i,$$

при $N\to\infty$ мажорируется распределением $\chi^2_{d_m-m}$, то есть

$$P(V\leqslant x)\geqslant F(x),$$

где $F(x)$ — функция распределения $\chi^2_{d_m-m}$.

Доказательство. При $m=2$ имеем

$$\delta_{(2)}(k)=\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i+j=k}[g^T_1(i)\,\delta_2(j)+g^{\mathrm{II}}_2(j)\,\delta_1(i)]+$$

$$+\sum_{i+j=k+1}[g^T_1(i)\,\delta_2(j)+g^{\mathrm{II}}_2(j)\,\delta_1(i)]\Bigg\},$$

откуда при любом элементарном исходе на основе неравенства Гельдера имеем

$$[\delta_{(2)}(k)]^2 \leq \frac{1}{4}\Bigg\{\sum_{i,j}[(g_1^T(i))^2(\delta_2(j))^2 + (g_2^{\Pi}(j))^2(\delta_1(i)^2)] +$$

$$+\sum_{i,j}[(g_1^T(i))^2(\delta_2(j))^2 + (g_2^{\Pi}(j))^2(\delta_1(i))^2]\Bigg\},$$

$$\sum_{k=1}^{d_2} N[\delta_{(2)}(k)]^2 \leq \frac{N}{4}\Bigg\{2\sum_{i=1}^{n_1}(g_1^T(i))^2\sum_{j=1}^{n_2}(\delta_2(j))^2 +$$

$$+2\sum_{j=1}^{n_2}(g_2^T(j))^2\sum_{i=1}^{n_1}(\delta_1(i))^2\Bigg\} \leq \sum_{j=1}^{n_2}\frac{N_2}{g_2^T(j)}[\delta_2(j)]^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{n_1}\frac{N_1}{g_1^T(i)}[\delta_1(i)]^2.$$

Аналогично при любом элементарном исходе

$$\sum_{k=1}^{d_m} N[\delta_{(m)}(k)]^2 \leq \sum_{k=1}^{d_{m-1}} N[\delta_{(m-1)}(k)]^2 + \sum_{k=1}^{m}\frac{N_m}{g_1^T(i)}[\delta_m(j)]^2.$$

Таким образом, на основании принципа математической индукции можно утверждать истинность теоремы.

Пусть случайные величины β_i, $i=\overline{1,m}$ распределены одинаково, то есть

$$g_i^T(k) = g^T(k), \quad g_i^{\Pi}(k) = g^{\Pi}(k), \quad \delta_i(k) = \delta_k, \quad \delta_i'(k) = \delta_k', \quad n_i = n.$$

Для этого случая имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Случайная величина $\sum_{k=1}^{d_m}[\delta'_{(m)}(k)]^2$ имеет распределение однородного полинома степени $2m-1$

$$2!\,m!\sum_{k=1}^{d}\sum_{\{\omega_{jk}\}}\sum_{\{q_i\}}\prod_{i=1}^{m-2}\frac{[\delta'_{(i)}]^{q_i\,\omega_{jk}}}{q_i!\,\omega_{ik}!},$$

здесь $d=n(m+1)-m$, $\{\omega_{jk}\}$ и q_i—совокупность решений следующей системы диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{t=1_n}^{\max_{jk}}\omega_t = 2, \\ \sum_{i=1}^{n} q_{ijk} = m, \\ \sum_{i=1}^{n} i q_{ijk} = m+k-1 \end{cases}$$

и определяется в случае нормальной выборки заданием его первых моментов

$$\alpha_r = 2\pi^{n+1}\sigma(mz+n-1)\sum_{\{q_i\}}\sum_{\{\omega_{jk}\}}\sum_{\{\mu_m\}}\times$$

$$\times\frac{(p_n-1)!!\,(p_{n-1}-1)!!}{(p_n+p_{n-1})\,(p_n+p_{n-1}-2)\dots(p_{n-1}+2)\,2^{p^{n-1}}}\times$$

$$\times\frac{1}{(n-1)!}\left[\prod_{l=1}^{n-2}C_{l j_k m n k}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\left(\sum_{i=l+1}^{n}p_i+n-i\right)-1\right)!!\,(p_l-1)!!}{\left|2\left(\sum_{i=l+1}^{n}p_i+n-i\right)+p_l\right|\left|2\left(\sum_{i=l+1}^{n}p_i+n-i\right)+p_l-2\right|\dots\dots[p_l+2]\,2^{\frac{p_l}{2}}\frac{p_l}{2}!}\right]$$

При этом $\sum_{i=l+1}^{n}p_i+n-i$, p_n, p_l — четные. Для нечетных значений $\alpha_r=0$. В этом выражении $\sigma(mz+n-1)=\dfrac{(-1)^{n-1}\,n!}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,2}$, если $mz+n-1$ — нечетное, $\sigma(mz+n-1)=\dfrac{(-1)^{n-1}\,(2n-1)!!}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\,2^{n+1}}$, если $mz+n-1$ четное, $\{\mu_m\}$, $\{\omega_l\}$, $\{q_l\}$ — совокупность решений следующей системы диофантовых уравнений:

$$\left|\begin{array}{l}\sum_{r=1}^{d}\mu_r=z,\\ \sum_{l=1}^{\max j_k}\omega_l=2\mu_r,\\ \sum_{l=1}^{n}q_{lj_k}=m,\\ \sum_{l=1}^{n}lq_{lj_k}=m+k-1.\end{array}\right.$$

Доказательство.

В случае дискретных одинаково распределенных случайных величин число n означает максимальное значение целочисленного аргумента их распределения.

Обозначим $\delta_k^{*(m)}=\delta'_{(m)}(k)$.

По рекуррентному свойству свертки

$$\delta_k^{*m}=\sum_{i=1}^{k}\delta_k^{*(m-1)}\,\delta_{k-i+1}$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{d_m}\binom{*m}{nk}=\sum_{k=1}^{d_m}\left(\sum_{i=1}^{\max j_k}\prod_{\{q_i\}_{jk}}\frac{m!\,\delta_{n_i}^{q_i}}{q_i!}\right)^2,$$

где сумма в круглых скобках вычисляется по всем решениям диофантовых уравнений [5]:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}q_{ij_k}=m\\ \sum\limits_{i=1}^{n}iq_{ij_k}=m+k-1\end{cases} \tag{15}$$

Здесь $\{q_i\}_{jk}$—j-ая совокупность решений системы (15) для фиксированного k; $\{\{q_i\}\}_{jk}$ — совокупность для всех $\max j_k$ совокупностей решений системы (15). Для квадрата суммы имеем

$$\left(\sum_{j_k=1}^{\max j_k}\prod_{\{q_i\}j_k}\frac{m!\,\delta_{n_i}^{q_i}}{q_i}\right)^2=\sum_{\nu=1}^{\max\nu_{jk}}2!\prod_{\{\omega_t\}_{\nu_{jk}}}\frac{\left(\prod\limits_{\{q_i\}_{jk}}\frac{m!\,\delta_{n_i}^{q_i}}{q_i!}\right)^{\omega_k}}{\omega_t!},$$

где сумма вычисляется по всем решениям уравнения

$$\sum_{t=1}^{\max j_k}\omega_t=2, \tag{16}$$

$\{\omega_t\}_{\nu_{jk}}$—одна из совокупностей решений системы (16).

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{d_m}(\delta_{nk}^{*m})^2=2!\,m!\sum_{k=1}^{d_m}\sum_{\{\nu_{jk}\}}\prod_{\{\omega_t\}_{jk}}\prod_{\{q_i\}_{jk}}\frac{\delta_{nk}^{q_k\,\omega_t}}{q^k!\,\omega_t!},$$

где вычисления производятся по всем решениям системы

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}q_{ij_k}=m;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}iq_{ijk}=m+k-1;\\ \sum\limits_{t=1}^{\max j_k}\omega_t=2.\end{cases}$$

Если расписать построчно, по k, выражения для δ_{nk}^{*m} при конкретном n, то из геометрических и комбинаторных соображений устанавливается, что суммирование по k достаточно до

$$d = n(m+1) - m.$$

Все остальные члены обращаются в нуль. Аналогично

$$\left[\sum_{k=1}^{d} (\delta_{nk}^{*m})^2\right]^z = \sum_{\lambda=1}^{\max\lambda} z! \prod_{\{\mu_r\}_\lambda} \frac{[(\delta_{nk}^{*m})^2]^{\mu_r}}{\mu_r} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\max\lambda} z! \prod_{\{\mu_r\}_\lambda} \frac{2\mu_r!}{\mu_r!} \sum_{\nu=1}^{\max\nu_{jk}} \prod_{\{\omega_t\}\nu_{jk}} \frac{\left(\prod\limits_{\{q_i\}_{jk}} \frac{m!\,\delta_{n_i}^{q_i}}{q_i!}\right)^{\omega_t}}{\omega_t} =$$

$$= z! \sum_{\lambda=1}^{\max\lambda} \sum_{\nu=1}^{\max\nu_{jk}} \prod_{\{\omega_t\}^{\nu}_{jk}} \prod_{\{q_i\}_{jk}} \prod_{\{\mu_r\}_\lambda} \frac{2\mu_r!}{\mu_r!} (m!) \frac{\delta_{n_i}^{q_i\omega_t}}{q_i\,\omega_t!}.$$

Здесь множества $\{\mu_r\}$, $\{\omega_t\}$ и $\{q_i\}_{jk}$ являются решениями следующей системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{r=1}^{d} \mu_r = z \\ \sum\limits_{t=1}^{\max j_k} \omega_t = 2\mu_r \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij_k} = m \\ \sum\limits_{i=1}^{n} i q_{ij_k} = m + k - 1. \end{cases}$$

Учитывая обращение в нуль некоторых слагаемых в формулах [6], получаем при $\sum\limits_{i=l+1}^{n} (p_i + n - i)$ — четном,

$$\int\limits_{\Phi} \cos^{\sum\limits_{i=l+1}^{n} (p_i + n - i)} x_l \sin_{x_l}^{p_l} dx_l =$$

$$= \frac{\left|\left(\sum\limits_{i=l+1}^{n} p_i + n - i\right) - 1\right|!!}{\left[2\left(\sum\limits_{i=l+1}^{n} p_i + n - i\right) + p_l\right]\left[2\left(\sum\limits_{i=l+1}^{n} p_i + n - i\right) + p_l - 2\right] \ldots [p_l + 2]}.$$

При $\sum\limits_{i=l+1}^{n} (p_i + n - i)$ — нечетном этот интеграл обращается в нуль.

$$\int\limits_{\Phi} \sin^{p_l} x_l\, dx_l = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p_l} x_l\, dx_l = \frac{(p_l - 1)!!\, \pi}{2^{\frac{p_l}{2}} \frac{p_l}{2}!},$$

при p_l—четном и обращается в нуль при p_l—нечетном. Аналогично

$$\int\limits_{\Phi} \cos^{p_n} x_{n-1} \sin^{p_{n-1}} x_{n-1}\, dx_{n-1} =$$

$$= \frac{(p_n - 1)!!\, (p_{n-1} - 1)!!\, 2\pi}{(p_n + p_{n-1})(p_n + p_{n-1} - 2) \dots (p_{n-1} + 2)}$$

при p_n—четном и обращается в нуль при p_n—нечетном. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы, причем $\sigma(mz+n-1)$ [5] вычисляется по формулам [6].

Доказана аналогичная теорема $\delta_{(m)}(k)$.

Рассмотрим применение изложенных выше результатов для случая, когда компоненты свертки аппроксимируются или, соответственно, статистически оцениваются кусочно-постоянными функциями

$$p''_i(x) = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{g_i^T(k)}{h} \chi_{ki}(x), \quad p_i(x) = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{g_i^{\Pi}(k)}{h} \chi_{ki}(x). \qquad (18)$$

Здесь

$$\chi_{ki}(x) = \begin{cases} 1, & a_i + (k-1)h \leqslant x < a_i + kh, \\ 0, & x \notin (a_i + (k-1)h,\ a_i + kh). \end{cases}$$

Плотность вероятностей $p_{(m)}(x)$ оценим, соответственно, аппроксимируем функциями

$$p_{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{d_m} \frac{g_{(m)}^{\Pi}(k)}{h} \chi_k(x), \quad p''_{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{d_m} \frac{g_{(m)}^{T}(k)}{h} \chi_k(x).$$

Величины $g_{(m)}^{T}(k)$ рекуррентно вычисляем, воспользовавшись соотношением (14)

$$g_{(l)}^{T_1}(k) = \sum_{i+j=k} g_{(l-1)}^{T}(i)\, g_l^{T}(j),\quad g_{(l)}^{T}(k) = \frac{g_{(l)}^{T_1}(k) + g_{(l)}^{T}(k+1)}{2},$$

$$l = \overline{1,\ m}.$$

Величины $g_{(m)}^{\Pi}(k)$ вычисляются аналогично.

Погрешность данной аппроксимации свертки, в предположении, что существует ограниченная производная $\left| \frac{dp_{(m)}(x)}{dx} \right| < K$ оценивается следующими неравенствами:

$$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} \left\{ | p_{(m)}(x) - p''_{(m)}(x) | \right\} \leq Kh,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [p_{(m)}(x) - p''_{(m)}(x)]^2\, dx \leq K^2 h^3 d_m.$$

Рассмотрим среднеквадратическое отклонение оценки от истинной свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [p_{(m)}(x) - \hat{p}_{(m)}(x)]^2\, dx \leq \left| \left(\int_{-\infty}^{\infty} (p_{(m)}(x) - p''_{(m)}(x))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{-\infty}^{\infty} (p''_{(m)}(x) - \hat{p}_{(m)}(x))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[p''_{(m)}(x) - \hat{p}_{(m)}(x) \right|^2 dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{d_m} \frac{[g^T_{(m)}(k) - g^{11}_{(m)}(k)]^2}{h}.$$

По заданной доверительной вероятности p определяем p—квантиль τ функции распределения $\chi^2_{d_m - m}$. На основании теоремы 3 с заданной доверительной вероятностью p имеем

$$\sum_{k=1}^{d_m} \frac{[g^T_{(m)}(k) - g^{11}_{(m)}(k)]^2}{h} \leq \frac{\tau}{hN}.$$

Тогда с вероятностью p

$$\int_{-\infty}^{\infty} | p_{(m)}(x) - \hat{p}_{(m)}(x)|^2\, dx \leq \left(Kh \sqrt{hd_m} + \sqrt{\frac{\tau}{hN}} \right)^2.$$

Рассмотрим оценку и аппроксимацию однократной свертки плотностей вероятностей сверткой, соответственно, аппроксимирующих или статистически оценивающих компоненты свертки кусочно-постоянных функций. Имеем

$$\hat{p}_{(2)}(x) = \hat{p}_1(x) * \hat{p}_2(x), \quad p''_{(2)}(x) = p''_1(x) * p''_2(x),$$

здесь $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p''_1(x)$, $p''_2(x)$—кусочно-постоянные функции вида (18). Формула однократной свертки кусочно-постоянных функций дана в работе [3]. Погрешность аппроксимации свертки в смысле среднеквадратического отклонения в данном случае такова:

$$\Delta_{(2)} \leq h^3 d_2 (\| p''_1(x) \|_{L_2} K_2 + \| p_2(x) \|_{L^2} K_1), \quad \left| \frac{dp_i(x)}{dx} \right| < K_i, \ i = 1,\ 2.$$

Это неравенство получается на основе теоремы 1. Для равномерной метрики (7)

$$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} \{ | p_{(2)}(x) - p''_{(2)}(x) | \} \leq h (K_1 + K_2).$$

Рассмотрим погрешность оценивания свертки в смысле интегрального квадратического критерия согласия (5). На основании теоремы 1 имеем

$$I_{(2)} \leqslant \| p_1 \|_{L^2} I_1^{\frac{1}{2}} + \| p_2 \|_{L^2} I_2^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, как оценить сверху значение I для гистограммы

$$I_i = M\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [p_i(x) - p_i(x)]^2\, dx \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} [p_i(x) - p_i''(x)]^2\, dx +$$

$$+ M\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [p_i(x) - p_i''(x)]^2\, dx \right\}; \quad M\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [p_i(x) - p_i''(x)]^2\, dx \right\} =$$

$$= M\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{[g_i^{\Pi}(k) - g_i^{T}(k)]^2}{h} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_i^{T}(k)(1 - g_i^{T}(k))}{hN_i} \leqslant \frac{1}{hN_i},$$

$$i = 1,\ 2)$$

поэтому

$$I_i < K_i^2 h^3 d_m + \frac{1}{hN_i}, \quad i = 1,\ 2.$$

Окончательно получаем

$$I_{(2)} \leqslant \| p_1(x) \|_{L^2} \left(K_2^2 h^3 d_2 + \frac{1}{hN_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \| p_2(x) \|_{L^2} \times$$

$$\times \left(K_1^2 h^3 d_2 + \frac{1}{hN_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Предположим, что гистограммы строились по выборкам, содержащим погрешности измерений. Так как гистограммы являются частным случаем оценок Ченцова, то учесть погрешности измерений элементов выборок можно по методу, изложенному выше. Обозначим, как и ранее, ε_1 и ε_2—случайные величины погрешностей измерений с плотностями вероятностей $p\varepsilon_1$ и $p\varepsilon_2$. Легко видеть, что функции

$$\zeta_k^{(i)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\varepsilon_i}(x - t)\, \chi_{ki}(t)\, dt = \int_{a_i + (k-1)h}^{a_i + kh} p_{\varepsilon_i}(x - t)\, dt,$$

$$k = \overline{1,\ n_i}$$

линейно-независимы. По формуле (8) определяем величины $b_k^{(i)}$

$$b^{(i)} = \frac{1}{N_i}\, \rho_i^{-1} \sum_{k=1}^{N_i} \zeta^{(i)}(\xi^k).$$

Так как

$$M\{b_k^{(i)}\} = \frac{g_i^{T}(k)}{h},$$

то для оценки

$$\hat{p}_{(2)}(x) = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} b_k^{(1)} b_j^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{1k}(x-t) \chi_{2j}(t)\, dt$$

значения критерия согласия оценивается неравенством (19).

В работе получены следующие результаты.

Погрешность аппроксимации свертки плотностей вероятностей сверткой функций, аппроксимирующих ее компоненты, оценена сверху через погрешности аппроксимаций компонент применительно к среднеквадратическому отклонению и равномерной метрике.

Значения интегрального квадратичного критерия согласия о близости истинной свертки плотностей вероятностей и свертки оценок компонент оценены сверху значениями критерия согласия о близости компонент свертки и их оценок.

Предположена оценка свертки плотностей вероятностей на основе гистограмм компонент, построенных по равномерному квантированию. Близость этой оценки и теоретической гистограммы для однократной свертки дается критерием согласия, полученным в теореме 2; для свертки одинаковых плотностей вероятностей—теоремой 4. Критерий согласия, полученный в теореме 2 и теореме 4, является некоторым подобием критерия согласия χ^2—Пирсона. На основе теоремы 3 можно оценить сверху вероятность среднеквадратического отклонения предложенной оценки свертки плотностей вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л.** Идентификация систем управления. М., «Наука», 1974.
2. **Ченцов Н. Н.** Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М., «Наука», 1972.
3. **Коваленко И. Н., Филиппова А. А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1973.
4. **Калинин В. М., Шалаевский О. В.** Исследования по классическим проблемам теории вероятностей и математической статистике. Л., «Наука», 1972, г. 26, ч. 2.
5. **Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.** Характеризационные задачи математической статистики. М., «Наука», 1972.
6. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
7. **Губонин Н. С.** Влияние ошибок измерения элементов выборки случайной величины на точность аппроксимации плотности вероятностей этой величины по данной выборке. — «Доклады всесоюзной научно-технической конференции по радиотехническим измерениям», Новосибирск, 1970, т. 3.
8. **Крамер Г.** Математические методы статистики. М., «Мир», 1975.
9. **Камалов М. К.** Распределение квадратичных форм. Ташкент, 1958.
10. Knatri C. C. Distribution of a qvadratis form in normal vectors. «Mod. Course Statist. Distrib. Sci. Work. Vol. 1», Dordrecht—Boston, 1975.