ОПТИМИЗАЦИЯ СОГЛАСОВАННЫХ ПЕРЕВОЗОК МЕЖДУ ГРУППАМИ ВЕРШИН ГРАФА

Котенко А.П., Котенко А.А.

Российская Федерация, г. Самара,
Самарский государственный технический университет

Аннотация. Решена задача оптимизации согласованных перевозок между подмножествами вершин графа. Минимизируются транспортные расходы с учётом взаимозаменяемости однородного груза в промежуточных вершинах и ограничения проводимости рёбер графа.

Ключевые слова: Транспортная задача линейного программирования, оптимизация перемещений на графе, проводимость маршрутов на графе.

Пусть на связном графе $G(V, R, m_1, m_2, \vec{d})$ без петель с неотрицательной разметкой $m_1 : V \to \Re^+$ вершин $V := \{v_1, v_2, \ldots, v_{|V|}\}$ и их упорядоченных пар $m_2 : V \times V \to \Re^+$ задана мультиразметка рёбер

$$\vec{d} := (d^1, d^2, \ldots, d^m) : R \to (\Re^+)^m,\ R := \{r_1, r_2, \ldots, r_{|R|}\},\ d^s r_i \geq 0,\ s \in \overline{1,m}.$$

При наличии в графе G ориентированных рёбер связность считаем сильной, когда достижимость любой вершины из любой другой вершины учитывает направление рёбер.

В задаче транспортной логистики

$m_1(u)$ – запас однородного груза в вершине u,

$m_2(u; v)$ – количество груза, предназначенного для доставки из вершины u в вершину v,

$d^1 r$ – удельная стоимость перевозки по ребру r,

$d^2 r$ – предельная проводимость ребра r; $m=2$.

Минимизируем сумму расходов на доставку всего груза с учётом проводимости рёбер.

Зададим матрицу взвешенной смежности вершин

$$A := \left\| d^1 r_{v_i v_j} \right\|_{i,j=1}^{|V|};$$

отсутствующим рёбрам и петлям припишем бесконечную удельную стоимость перевозки $d^1 r_{v_i v_j} = +\infty$.

С помощью алгоритма из публикаций [1,2] найдём матрицу минимальных расстояний на графе $B := \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{|V|}$; расстояния $b_{ij} \in \Re^{+}$ между любыми вершинами конечны в силу сильной связности графа G.

Одновременно получим матрицу списков $c_{ij} := \left(e_{(k)ij} \right)_{k=0}^{+\infty}$ соответствующих маршрутов $C := \left\| c_{ij} \right\|_{i,j=1}^{|V|}$, упорядоченных по неубыванию удельной стоимости перевозки: $e_{(k)ij} := v_i \to \ldots \to v_j \;\mapsto\; d^1 e_{(k)ij} := \sum_{r \in e_{(k)ij}} d^1 r$.

Очевидно $c_{ij} \neq \varnothing$; $i, j \in \overline{1, |V|}$.

При совпадении удельных стоимостей маршрутов упорядочим их по неубыванию проводимости

$$d^2 e_{(k)ij} := \min_{r \in e_{(k)ij}} d^2 r : \begin{cases} d^1 e_{(k_1)ij} = d^1 e_{(k_2)ij}, \\ d^2 e_{(k_1)ij} \leq d^2 e_{(k_2)ij}, \end{cases} \Rightarrow k_1 \leq k_2 .$$

Маршруты одинаковой удельной стоимости $d^1 e_{(k)ij}$ и проводимости $d^2 e_{(k)ij}$ упорядочим в списке c_{ij} произвольно. Очевидно, маршрут $e_{(0)ij}$ будет оптимальным, хотя, быть может, не единственным.

Число маршрутов $e_{(k)ij}$, связывающих вершины v_i и v_j, может быть бесконечным при наличии циклов.

По графу $G\left(V, R, m_1, m_2, \vec{d}\right)$ построим орграф $G_1\left(V_1, R_1, m_1, m_2, \vec{d}\right)$:

1. Каждой вершине $v \in V$ поставим в соответствие две различные вершины $v_s, v_f \in V_1$ и положим $m_1(v_s) \equiv m_1(v_f) := m_1(v)$. Таким образом, $|V_1| = 2|V|$.

2. Каждому ориентированному ребру $r_{uv} \in R$ поставим в соответствие ориентированное ребро $r_{uv} \mapsto r^1_{u_s v_f} \in R_1$ той же мультиразметки $\vec{d}r^1_{u_s v_f} := \vec{d}r_{uv}$ и положим $m_2(u_s; v_f) := m_2(u; v)$.

3. Каждое неориентированное ребро $r_{uv} \in R$, $r_{uv} \equiv r_{vu}$, заменим двумя ориентированными антипараллельными рёбрами r_{uv}^1, r_{vu}^1 с разными, в общем случае, разметками $\vec{d}r_{uv}^1 := \vec{d}r_{uv}$, $\vec{d}r_{vu}^1 := \vec{d}r_{vu}$, которые согласно пункту 2 заменим ориентированными рёбрами $r_{u_s v_f}^1, r_{v_s u_f}^1 \in R_1$ соответствующих разметок $\vec{d}r_{u_s v_f}^1 := \vec{d}r_{uv}$, $\vec{d}r_{v_s u_f}^1 := \vec{d}r_{vu}$ и соответствующими, в общем случае различными, заказами на перемещение грузов

$$m_2(u_s; v_f) := m_2(u; v),\ m_2(v_s; u_f) := m_2(v; u).$$

Замечание: $|R_1| \ge |R|$ и ($|R_1| = |R| \Leftrightarrow$ граф G – ориентированный).

Полученный полный двудольный орграф $G_1\left(V_1 = V_s \cup V_f, R_1, m_1, m_2, \vec{d}\right)$ даст транспортную задачу с долями источников стоков

$$V_s := \{v_{s,i} \in V_1\}_{i=1}^{|V|}\ V_f := \{v_{f,i} \in V_1\}_{i=1}^{|V|}:$$

1. $0 \le x_{s,i;f,j} \le d^2 e_{(0)s,i;f,j}$; $i, j \in \overline{1, |V|}$ – условие неотрицательности и ограничения со стороны проводимости груза $x_{s,i;f,j}$, отправленного из каждого пункта отправления $v_{s,i} \in V_s$ в каждый пункт назначения $v_{f,j} \in V_f$ по оптимальному маршруту $e_{(0)s,i;f,j}$ проводимости $d^2 e_{(0)s,i;f,j}$.

2. $\sum_{j=1}^{|V|} \left(x_{s,i;f,j} - x_{s,j;f,i}\right) \le m_1(v_{s,i})$; $i \in \overline{1, |V|}$ – условие неотрицательности запаса груза (с учётом доставленного из всех заданных пунктов отправления) в каждом пункте отправления $v_{s,i}$, необходимого для отправки во все заданные пункты назначения.

3. $\sum_{j=1}^{|V|} x_{s,i;f,j} = m_1(v_{s,i}) + \sum_{j=1}^{|V|} m_2(v_{s,i}, v_{f,j})$; $i \in \overline{1, |V|}$ – условие доставки всего груза из каждого пункта отправления $v_{s,i}$ во все заданные пункты назначения $v_{f,j}$.

4. $\sum_{j=1}^{|V|} x_{s,j;f,i} = m_1(v_{f,i}) + \sum_{j=1}^{|V|} m_2(v_{s,j}, v_{f,i})$; $i \in \overline{1,|V|}$ – условие доставки всего груза в каждый пункт назначения $v_{f,i}$ из всех назначенных пунктов отправления $v_{s,j}$.

5. $\sum_{i,j=1}^{|V|} x_{s,i;f,j} d^1 e_{(0)s,i;f,j} \to \min$ – критерий оптимальности в задаче минимизации транспортных расходов.

Транспортная задача 1-5 замкнута при необходимом условии

$$\sum_{u,v\in V} m_2(u;v) = \sum_{u,v\in V} m_2(v;u)$$

выполнимости всех заданных перевозок.

Транспортная задача 1-5 разрешима при достаточной проводимости рёбер графа G и достаточных запасах груза $m_1(u)$ во всех источниках $u \in V_s$. При исключении условия 2 транспортная задача решается стандартными приёмами.

Укажем, как учесть условие 2:

1) решим задачу при условиях 1, 3, 4, 5 и проверим найденное решение на выполнение условия 2. Если оно выполнено, то исходная задача 1-5 решена. В противном случае переходим к следующему шагу;

2) прибавим невязку $h := \max_{i,j\in\overline{1,|V|}} \left\{ m_1(v_{s,i}) - \sum_{j=1}^{|V|} \left(x_{s,i;f,j} - x_{s,j;f,i} \right) \right\}$ ко всем значениям запасов в вершинах графа $m_1(v_i) := m_1(v_i) + h|V|$ и повторим стандартное решение задачи 1, 3, 4, 5, удовлетворяющее дополнительному условию 2.

Если весь груз перевезён, поставленная задача решена с использованием лишь оптимальных маршрутов.

Если не хватило пропускной способности $d^2 e_{(0)s,i;f,j}$ хотя бы одного оптимального маршрута $e_{(0)s,i;f,j}$, то преобразуем граф $G(V, R, m_1, m_2, \vec{d})$:

1. Удалим рёбра, насыщенные найденным потоком грузов

$$x_{s,i;f,j} :\ d^2 r^1_{v_i v_j} - x_{ij} = 0.$$

2. Удалим возникшие изолированные вершины.

3. Пересчитаем остаток грузов в каждой вершине $m_1(v_i):=m_1(v_i)+\sum_{j=1}^{|V|}(x_{ij}-x_{ji})$ и по каждому ребру $m_2(v_i;v_j):=m_2(v_i;v_j)-x_{ij}\geq 0$.

4. Найдём проводимость оставшихся рёбер $d^2r^1_{v_iv_j}:=d^2r^1_{v_iv_j}-x_{ij}>0$.

Пересчитаем матрицу A смежности вершин, матрицу B оптимальных расстояний и матрицу C упорядоченных по уровню оптимальности списков маршрутов удалением маршрутов, содержавших удалённые в пунктах 1 и 2 рёбра и вершины [2]. При этом меняется хотя бы одна верхняя оценка $d^2e_{(0)s,i;f,j}$ условия 1 транспортной задачи 1-4.

Алгоритм повторим циклически до завершения перевозки всего груза.

Примерами приложения алгоритма могут служить задачи оптимизации компоновки железнодорожных составов из вагонов с заданными пунктами отправления и назначения, а также задачи организации взаимозачётов в финансовых сетях в кризисных ситуациях.

Список литературы

1. Котенко А.П. Матричный алгоритм Беллмана-Мура // Управление организационно-экономическими системами: моделирование взаимодействий, принятие решений. Самара: Самарский национальный исследовательский университет, 2013. т.10. С.33-37.

2. Докучаев А.В., Котенко А.П. Свойства графов задач сетевого планирования и управления // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2010. №5(21). С.204-211.

OPTIMIZATION OF AGREED TRANSPORTATION BETWEEN SUBSETS OF GRAPH VERTICES

A.P. Kotenko, A.A. Kotenko

Samara State Technical University,
Samara, Russian Federation

Abstract. The problem of optimizing of agreed transportation between subsets of graph vertices has been solved. Transportation costs are minimized, taking into account the interchangeability of a homogeneous load at intermediate vertices and the limitation of the conductivity of the edges of the graph.

Keywords: Linear programming transport problem, optimization of displacements on a graph, conductivity of routes on a graph