

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Цапенко М.В.¹, Ермакова А.А.²

Российская Федерация, г. Самара,

¹ *Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,*

² *Самарский государственный технический университет*

Аннотация. Повышение эффективности производства является ключевой задачей управления, особенно в промышленном секторе. Для повышения эффективности производства необходимо оценить зависимость объема производства конечного продукта от затрачиваемых ресурсов. Такую оценку позволяют реализовать модели на основе производственных функций Кобба-Дугласа. Эти модели позволяют оценить зависимость объема производства от затрат капитальных и трудовых ресурсов.

Ключевые слова: производственная функция Кобба-Дугласа, производство электроэнергии, капитальные и трудовые ресурсы, качество модельных решений.

Одной из главных задач управления в промышленном секторе является повышение эффективности работы отраслей и производств. Для достижения этой цели необходимо увеличивать объёмы производства и снижать затраты используемых ресурсов. Производственные функции позволяют наглядно моделировать эти процессы [1, 2, 3].

Производственные функции Кобба-Дугласа получили широкое распространение благодаря возможности оценки взаимозависимости объема производства продукции от использования капитальных и трудовых ресурсов [1].

В общем виде производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \quad (1)$$

где Y – объем выпуска продукции; K – затраты капитальных ресурсов; L – затраты трудовых ресурсов; A – масштабный коэффициент; α , β – факторные эластичности[1].

При этом, возможны два случая:

- $\alpha + \beta = 1$ – это однородная производственная функция (при росте затрат труда и капитала объем выпуска возрастает пропорционально);
- $\alpha + \beta \neq 1$ – это неоднородная производственная функция (рост или уменьшение объема произведенной продукции не равны росту или уменьшению капитала и труда) [1].

Для идентификации параметров производственной функции методом наименьших квадратов [4, 5, 6, 7] необходимо привести производственную функцию к линейному виду. Рассмотрим пример линеаризации однородной производственной функции. Проведём замену $\beta = 1 - \alpha$ и прологарифмируем левую и правую части функции:

$$\ln(Y) = \ln(A) + \alpha \cdot \ln(K) - \alpha \cdot \ln(L) + \ln(L) \quad (2)$$

$$\ln \frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \cdot \ln \frac{K}{L} \quad (3)$$

Следующим этапом необходимо произвести замену:

$$\ln \frac{Y}{L} = y; \ln A = c; \ln \frac{K}{L} = x \quad (4)$$

Таким образом, выражение примет линейный вид:

$$y = c + \alpha \cdot x \quad (5)$$

Задача идентификации заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости (3), при которых сумма квадратов невязки фактических и расчётных значений стремится к минимуму:

$$F(\alpha; c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (c + \alpha \cdot x))^2 \rightarrow \min \quad (6)$$

При найденных таким образом значениях параметров α и c сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от фактических будет наименьшей.

Функция $F(\alpha, c)$ примет минимальное значение, если частные производные по параметрам будут равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\alpha, c)}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial F(\alpha, c)}{\partial c} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Найдя частные производные и решив методом подстановки, получим значения искомых параметров:

$$\alpha = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (8)$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \alpha \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (9)$$

$$A = e^c \quad (10)$$

В случае если функция Кобба-Дугласа неоднородная ($\alpha + \beta \neq 1$), к минимуму будет стремиться выражение:

$$F(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + \alpha \cdot k_i + \beta \cdot l_i))^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

Линеаризованная функция будет выглядеть следующим образом:

$$y = a + \alpha \cdot k + \beta \cdot l \quad (12)$$

При оценивании зависимости по данным временных рядов, некоторая часть изменения зависимой переменной может быть объяснена фактором времени, например, влияние смены или совершенствования технологий. Чтобы учесть такие факторы, в производственную функцию Кобба-Дугласа включается дополнительный параметр, учитывающий влияние научно-технического прогресса (НТП):

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta \cdot e^{\tau t}, \quad (13)$$

где $e^{\tau t}$ – множитель, учитывающий НТП [8, 9].

После проведения линеаризации запишем сумму квадратов невязки, стремящуюся к минимуму:

$$F(A; \alpha; \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + \alpha \cdot k_i + \beta \cdot l_i + \tau \cdot t_i))^2 \rightarrow \min \quad (14)$$

Найдя частные производные по параметрам и приравняв их к нулю, получим систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Использование модели вида (1) возможно для анализа отраслей и производств, в том числе энергетики [10, 11].

На основе официальных источников были собраны и обработаны статистические данные по энергетической отрасли России: отпуск электрической энергии – Y , расход топлива на производство электрической энергии – T , количество занятых в отрасли – L в период 2012–2022 гг. [12, 13, 14]. Исходные данные представлены в таблице 1.

Таблица 1. Исходные статистические данные

Период	Производство электроэнергии, млрд. кВт·ч (Y)	Расход топлива на производство электроэнергии, т.у.т./кВт·ч (T)	Среднегодовая численность занятых в отрасли, тыс. человек (L)
2012	1069	0,406	1947
2013	1059	0,395	1938
2014	1064	0,393	1914
2015	1068	0,394	1988
2016	1091	0,392	1991
2017	1094	0,387	1632,5
2018	1115	0,399	1621,9
2019	1121	0,396	1606,7
2020	1047	0,373	1588,4
2021	1114	0,384	1583
2022	1157	0,387	1601

Исходная производственная функция вида (1) была модифицирована – вместо затрат капитальных ресурсов K в модель был включен расход топлива на производство электрической энергии T .

Результаты математического моделирования производства электрической энергии в России представлены на рисунке 1.

Для оценки качества модельных решений были рассчитаны следующие показатели:

- R^2 – коэффициент детерминации,
- F – статистика Фишера,
- DW – критерий Дарбина-Уотсона [15],
- α , β – факторные эластичности.

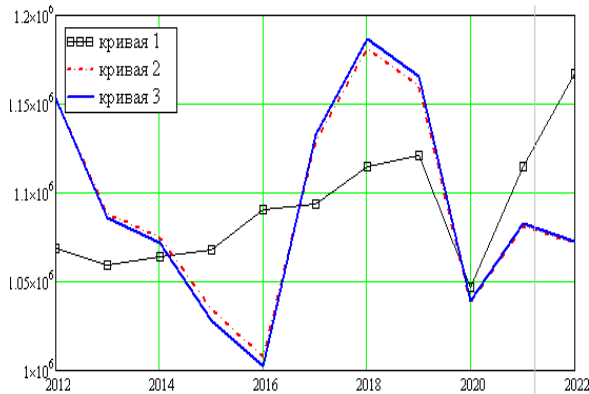
Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Показатели качества

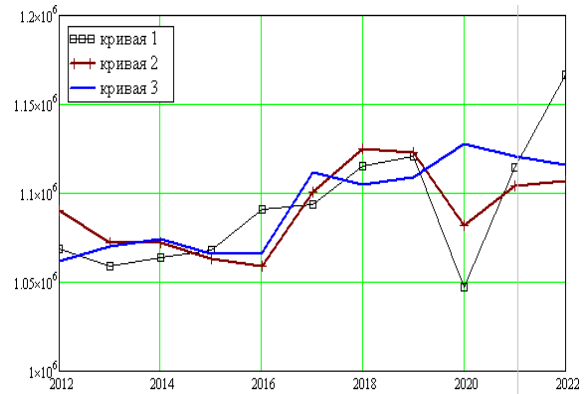
Параметры модели и показатели качества	Однородная ПФ				Неоднородная ПФ			
	Без учета НТП		С учетом НТП		Без учета НТП		С учетом НТП	
	НС*	С*	НС	С	НС	С	НС	С
α	1,299	1,372	1,19	1,181	0,652	-0,239	1,213	2,59
β	-	-	-	-	-0,241	-0,194	0,066	0,238
τ	-	-	0,011	-0,014	-	-	0,014	0,023
R^2	0,48	0,43	0,58	0,53	0,72	0,85	0,94	0,78
DW	0,822	0,961	1,089	1,094	1,285	1,979	1,696	2,62
F	41,49	56,277	11,078	15,99	14,966	2,095	173,41	19,289

*С – сглаженные, НС – не сглаженные

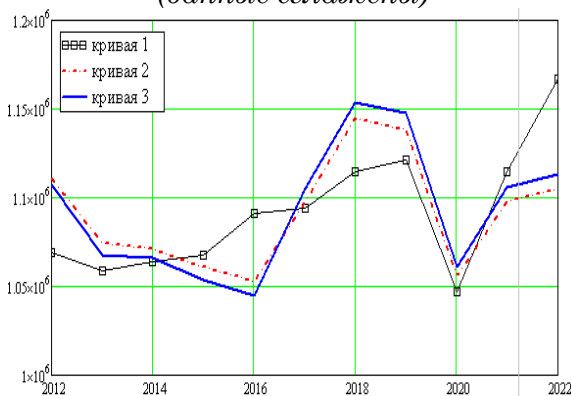
Как видно из данных, представленных в таблице 2, процесс энергопроизводства наилучшим образом описывает неоднородная производственная функция с учетом НТП. На её основе возможна оценка эффективности и построение прогноза.



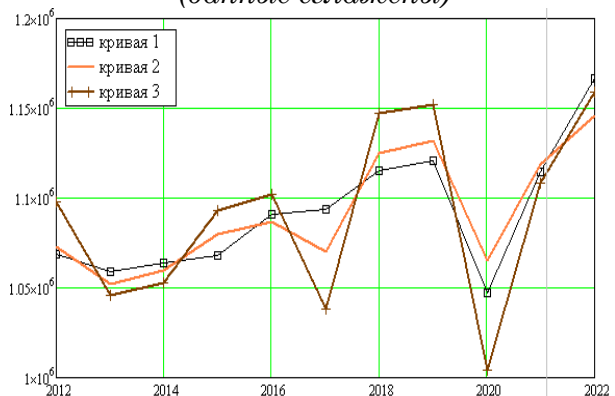
1 – фактический объем производства электрической энергии;
2 – модель на основе однородной производственной функции;
3 – модель на основе однородной производственной функции (данные сглажены)



1 – фактический объем производства электрической энергии;
2 – модель на основе неоднородной производственной функции;
3 – модель на основе неоднородной производственной функции (данные сглажены)



1 – фактический объем производства электрической энергии;
2 – модель на основе однородной производственной функции с учетом НТП;
3 – модель на основе однородной производственной функции с учетом НТП (данные сглажены)



1 – фактический объем производства электрической энергии;
2 – модель на основе неоднородной производственной функции с учетом НТП;
3 – модель на основе неоднородной производственной функции с учетом НТП (данные сглажены)

Рисунок 1. Результаты моделирования

Таким образом, научная новизна исследования определена двумя факторами:

- модификацией классической производственной функций Кобба-Дугласа (1): вместо затрат капитальных ресурсов K в модель введён тех-

нологический фактор T – расход топлива на производство электрической энергии, что позволяет учесть технико-технологические особенности объекта моделирования;

▪ отраслевым масштабом исследования: модели построены в целом для энергетической системы страны, а не отдельных генерирующих мощностей.

Список литературы

1. Клейнер, Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. 239 с.

2. Абрамов А.П., Бессонов В.А., Никифоров Л.Т., Свириденко К.С. Исследование динамики макроэкономических показателей методом производственных функций. М.: ВЦ АН СССР, 1987. 67 с.

3. Иванилов Ю.П., Ланец С.А. Анализ и построение производственных функций с переменной эластичностью замещения по ресурсам. М.: Наука, 1980. 166 с.

4. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск: ВО «Наука». 1995. 220 с.

5. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. М.: Экономика. 1987. 240 с.

6. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука. 1984. 392 с.

7. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М.: МГУ, Издательство «ДИС». 1997. 368с.

8. Сергиенко И.В. Об основных направлениях развития информатики // Кибернетика и системный анализ. №6. 1997. С. 3-93.

9. Терехов Л.Л. Производственные функции. М.: Статистика. 1974. 128 с.

10. Цапенко, М.В. Статистическая идентификация макроэкономических характеристик промышленных комплексов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2001. № 13. С. 186 - 194.

11. Гаврилова, А.А., Цапенко, М.В. Синтез математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2002. № 14. С. 126 - 130.

12. Российский статистический ежегодник. 2022: Стат. сб. \ Росстат. 117 с., 395 с.

13. Enerdata – Данные о мировой энергетике и климате. URL: energystats.enerdata.net/electricity/world-electricity-production-statistics (дата обращения 02.05.2023)

14. ВНИИ ТРУДА – Минтруда России. URL: <https://vcot.info/blog/struktura-zanatosti-v-ekonomike-po-vidam-deatel-nosti-i-osnovnym-professional-nym-grupпам> (дата обращения 02.05.2023)

15. Мюллер П.И. и др. Таблицы по математической статистике / Перевод с нем. и предисл. В.М. Ивановой. М.: Финансы и статистика. 1982. 271с.

MODEL ESTIMATING EFFICIENCY OF ELECTRIC ENERGY PRODUCTION

M.V. Tsapenko ¹, A.A. Ermakova ²

¹ *Samara University,*

² *Samara State Technical University
Samara, Russian Federation*

Abstract. Improving production efficiency is a key management task, especially in the industrial sector. In order to increase the efficiency of production it is necessary to estimate the dependence of the output of the final product on the resources spent. Models based on Cobb-Douglas production functions allow to realize such an assessment. These models make it possible to estimate the dependence of the volume of production on the costs of capital and labor resources.

Keywords: Cobb-Douglas production function, electricity production, capital and labor resources, quality of model solutions.