7) повышение энергоэффективности и снижение потерь на всех стадиях производства в нефтегазовой промышленности:

- в нефтедобыче это связано со снижением расходов нефти на технологические нужды, повышением нефтеотдачи, оптимизацией работы скважин, совершенствованием процесса контроля и учета нефти;
- в транспортировке нефти энергоэффективность заключается в реконструкции нефте- и газопроводов, системной организации технологических режимов их работы, сокращении потерь нефти, использовании автоматизированных систем управления, улучшении технического состояния нефтеперекачивающих агрегатов и прочее;
- в нефтепереработке энергоэффективность состоит в повышении глубины переработки, более полном использовании газов нефтепереработки и прочее;

8) экологизация процессов геологоразведки и добычи нефти и газа.

Таким образом, инновационное развитие нефтегазовой отрасли России должно рассматриваться комплексно и охватывать все ключевые сферы: геологоразведка, добыча, транспортировка, переработка. При этом инновационные изменения должны осуществляться с учетом специфических особенностей каждого элемента нефтегазовой отрасли.

Список использованных источников:

1. Андронова И.В. и др. Основные тенденции развития российского нефтесервиса в условиях экономической нестабильности // Нефть и газ Западной Сибири: материалы международной научно-технической конференции. - Тюмень: ТюмГНГУ, 2015. - 213 с.
2. Карпов В. Р. Нефтегазовые кластеры Российской Федерации: условия их становления и развития // Молодой ученый. — 2015. — №21. — С. 450-452.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ В ПРОЕКТАХ ПО ОСВОЕНИЮ НОВОГО ПРОИЗВОДСТВА[1]

Павлов О.В.[2]
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара.

Ключевые слова: освоение новой продукции, эффект кривой обучения, игровые задачи стимулирования.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606
[2]Кандидат технических наук, заместитель директора Института экономики и управления Самарского университета.

В работе рассматривается аналитическое решение игровой задачи стимулирования исполнителей проекта по освоению новой продукции на промышленном предприятии. Проект освоения новой продукции рассматривается как управляемая иерархическая динамическая система, состоящая из руководства проекта (центра) и исполнителей (агентов). В процессе освоения новой продукции проявляется эффект обучения, который заключается в том, что затраты времени рабочих (трудоемкость) на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Динамика управляемой динамической производственной системы зависит только от действий агента, а центр выбором функции материального стимулирования оказывает воздействие на целевую функцию агента. Состояние иерархической динамической системы в каждый период времени зависит от её состояния и действий участников в предыдущий период. Производственная деятельность в проекте по освоению нового производства характеризуется несовпадающими интересами центра и агентов, что приводит к снижению экономической эффективности. Разрешить эти противоречия возможно с помощью согласованных механизмов управления, которые побуждают агентов к выбору действий выгодных центру.

Динамические модели взаимодействия неравноправных игроков рассматриваются в теории активных систем [1], информационной теории иерархических систем [2], динамических игр [3]. Прикладные модели теории динамических игр в области экономики и менеджмента приводятся в работах [4]-[5].

В рассматриваемой динамической игровой модели с непрерывным временем присутствуют динамика принятия решений и динамика управляемой системы, описываемая дифференциальным уравнением. Неравноправие участников фиксируется порядком ходов, первый ход делает центр, выбирая свою стратегию: функцию стимулирования и сообщая ее агентам.

1.Постановка динамической задачи стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства

Рассматривается двухуровневая динамическая производственная система, состоящая из центра и n независимых агентов. Агенты производят детали, из которых затем собирается готовое изделие. Трудовые затраты и материальное стимулирование агентов зависят только от их собственных действий. В работе применяется принцип декомпозиции игры [1], который позволяет рассматривать управление i-ым агентом независимо и не учитывать взаимодействие агентов между собой. Центр распределяет плановый объем работы i-ыму агенту и контролирует его выполнение, производственной деятельностью занимаются агенты.

Динамика производственного процесса изготовления детали i-ым агентом описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ - кумулятивный объём производства детали в момент времени t, $u(t)$ – объём производства детали в момент времени t.

Проект освоения новой продукции на промышленном предприятии рассматривается на фиксированном интервале времени:

$$0 \le t \le T,$$

T – горизонт планирования проекта.

В начальный период известно количество произведенных деталей:

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

В конечный период кумулятивный объём готовых деталей должен быть равен заданному центром:

$$x(T) = x_0 + R. \tag{3}$$

где R – заданное количество деталей центром агенту.

На объём производства детали в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t), \ t = \overline{0,T}, \tag{4}$$

В качестве целевой функции центра рассматривается максимизация интегрального дисконтированного дохода центра, разницы между доходом от произведенного агентом детали и затратами на материальное стимулирование агента:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t}\{ pu(t) - \sigma(x(t)\}dt \to max, \tag{5}$$

где p – цена детали, $\sigma(x(t))$ - функция стимулирования центра, δ – ставка дисконтирования центра.

Под функцией стимулирования понимается правило выплаты материального вознаграждения агенту за выполненный объем работы. Центр воздействует на производственный процесс через механизм материального стимулирования $\sigma(x(t))$, экономически заинтересовывая агентов выполнять плановые объемы производства.

Целевой функцией агента является максимизация интегрального дисконтированного дохода:

$$J_a = \int_0^T e^{-\rho t}\{ \sigma(x(t)) - C(x(t),u(t))\}dt \to max, \tag{6}$$

где $C(x(t),u(t))$ - функция трудовых затрат агента на производство продукции (затрат в момент времени t), ρ - ставка дисконтирования агента.

Доход агента - это разница между материальным стимулированием и его трудовыми затратами, выраженными в денежной форме.

Функция трудовых затрат агента на производство продукции (затрат в момент времени t) в денежном выражении определяется как произведение трудоемкости $c(t)$, объёма производства $u(t)$ и стоимости одного норма часа s:

$$C(t) = sc(x(t))u(t). \tag{7}$$

Динамика изменения трудоемкости продукции от кумулятивного объёма производства описывается различными моделями кривой обучения. Наиболее типичными моделями являются степенная, экспоненциальная и логистическая, описанные в научной литературе [6]-[9].

Степенная модель кривой обучения имеет следующий вид:

$$c(x(t)) = ax(t)^{-b}.$$

где a – затраты на производство первого изделия, b – индекс обучения.

Индекс обучения характеризует скорость снижения трудоемкости продукции при увеличении кумулятивного объёма производства.

Экспоненциальная модель кривой обучения:

$$c(x(t)) = k + \beta e^{-\alpha x(t)}.$$

где α - индекс обучения, k, β - параметры экспоненциальной модели.

Логистическая модель кривой обучения:

$$c(x(t)) = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min})\left[\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}\right],$$

где $c_{\min}$, $c_{\max}$ - минимальные и максимальные значения трудоемкости продукции, α - индекс обучения, β - параметр логистической модели.

Задача управления центра заключается в выборе оптимальной системы стимулирования $\sigma(x(t))$, при которой агент выберет оптимальные объёмы производства деталей *u(t)* удовлетворяющие ограничению (4), которые осуществят перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и максимизируют интегрированный дисконтированный доход центра (5).

Реакцией агента на систему стимулирования центра является выбор оптимальных объёмов производства деталей *u(t)* удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и максимизируют интегрированный дисконтированный доход агента (6).

2.Решение динамической задачи стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства

Для решения сформулированной задачи управления применяется принцип компенсации затрат [1]. В соответствии с принципом компенсации затрат для того, что бы побудить агента выбрать плановую траекторию центру достаточно компенсировать его затраты:

$$\sigma(x(t)) = C(x(t), u(t)). \qquad (8)$$

С учетом (8) и (7) целевая функция центра запишется:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t}\{[p - sc(x(t))]u(t)\}dt \to \max.$$

Учитывая, что цена детали *p* постоянная величина, максимизацию интегрального дохода центра можно заменить минимизацией интегральных трудовых затрат агента:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\{sc(x(t))u(t)\}dt = \int_0^T e^{-\delta t}C(x(t),u(t))dt \to \min. \qquad (9)$$

Алгоритм решения состоит в разделении исходной задачи на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования.

1.Задача согласованного динамического стимулирования.

Центр выбирает компенсаторную систему стимулирования, которая заключается в компенсации затрат агента в случае выбора оптимальной плановой траектории центра $x^R(t)$ и отсутствия материальных выплат в противном случае:

$$\sigma(x(t)) = \begin{cases} C(x(t),u(t)), \text{ если } x(t) = x^R(t), \text{ для } \forall t \in [0,T] \\ 0, \qquad \text{если } x(t) \neq x^R(t), \text{ для } \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

В практической деятельности компенсаторная система материального стимулирования может быть реализована в виде штрафа за отклонение от плановой траектории:

$$\sigma(x(t)) = Z(t) - Z(t)\lambda abs\left(1 - \frac{x(t)}{x^R(t)}\right),$$

где $Z(t)$ – материальное вознаграждение агента, равное его трудовым затратам: $Z(t) = C(x(t),u(t))$, λ - параметр системы стимулирования.

2. Задача согласованного динамического планирования.

Оптимальная плановая траектория центра $x^R(t)$ определяется из решения задачи оптимального управления (1)-(4), (9).

Задача центра заключается в выборе оптимальных объёмов производства деталей $u(t)^{opt}$ удовлетворяющие ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют интегрированные дисконтированные трудовые затраты агента (9).

Для решения сформулированной задачи оптимального управления с непрерывным временем (3)-(6), (9) применим принцип максимума Понтрягина [10]. Непосредственное применение принципа максимума Понтрягина к сформулированной задаче оптимального управления невозможно, так как в этом случае существует особое управление [11].

В качестве критерия оптимальности центра рассмотрим близкий по экономическому смыслу критерий: минимизация интегрального дисконтированного темпа функции трудовых затрат агента *C(t)*:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt \to min.$$

где $\dfrac{\dot{C}(t)}{C(t)} = [\ln C(t)]'$- логарифмическая производная функции затрат, имеющая экономический смысл темпа функции затрат.

Утверждение

Для положительной и абсолютно непрерывной функции *C(t)* максимизация (минимизация) функционала:

$$\tilde{J} = \int_0^T e^{-\delta t} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt \qquad (10)$$

эквивалентна максимизации (минимизации) функционала:

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} \ln C(t) dt. \qquad (11)$$

Доказательство утверждения приводится в Приложении.

С учетом утверждения в качестве критерия оптимальности центра примем минимизацию интегральной дисконтированной логарифмической функции трудовых затрат агента (8). Подставим выражение для функции трудовых затрат (7) в функционал (11). При этом постоянный множитель *s* можно не учитывать:

$$J_p = \int_0^T e^{-\delta t} \ln[c(x(t))u(t)]\, dt \to \min. \qquad (12)$$

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t,x,\psi,u) = \psi(t)u(t) - e^{-\delta t} \ln[c(x(t))] - e^{-\delta t} \ln[u(t)],$$

где $\psi(t)$ - вспомогательная переменная, которая удовлетворяет сопряжённому уравнению:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = e^{-\delta t} \frac{\partial \{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x}.$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управляющих параметров. Найдем максимум гамильтониана по управлению из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \qquad (13)$$

Определим оптимальное управление из условия (10):

$$u(t)^{opt} = \frac{e^{-\delta t}}{\psi}. \qquad (14)$$

Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{-\delta t}}{\psi} \\ \dfrac{d\psi}{dt} = e^{-\delta t} \dfrac{\partial \{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x} \end{cases} \qquad (15)$$

Из уравнений системы (15) следует:

$$dt = e^{\delta t} \psi dx. \qquad (16)$$

$$dt = e^{\delta t} \left(\frac{\partial \{\ln[c(x(t))]\}}{\partial x} \right)^{-1} \mathrm{d}\psi. \qquad (17)$$

Симметрическая форма системы (15) с учетом уравнений (16), (17) будет иметь вид:

$$dt = \psi dx = \left(\frac{\partial \{ln[c(x(t))]\}}{\partial x} \right)^{-1} d\psi. \quad (18)$$

Выполним разделение переменных во втором дифференциальном уравнении (18):

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{\partial \{ln[c(x(t))]\}}{\partial x} d\,x. \quad (19)$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения (19):

$$\psi = C_0 c(x(t)). \quad (20)$$

где C_0 - постоянная интегрирования.

Оптимальное управление (14) с учетом (20) примет вид:

$$u(t)^{opt} = \frac{e^{-\delta t}}{C_0 c(x(t))}. \quad (21)$$

Из полученного условия для оптимального управления (21) следует: оптимальные объемы производства для любой модели кривой обучения в каждый момент времени должны быть обратно пропорциональны трудоемкости продукции и прямо пропорциональны коэффициенту дисконтирования.

Заключение

В работе рассмотрены динамические задачи стимулирования исполнителей в проектах по освоению нового производства в непрерывном виде.

Для решения сформулированной задачи стимулирования применен принцип компенсации затрат. В качестве системы стимулирования рассмотрена компенсаторная система, которая заключается в компенсации затрат агента в случае выбора оптимальной плановой траектории центра и отсутствия материальных выплат в противном случае. Исходная задача декомпозирована на задачу согласованного стимулирования и задачу согласованного планирования.

В результате решения задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина найдено условие оптимальной производственной программы, обеспечивающей минимизацию интегрального темпа функции затрат агентов для любой модели трудоемкости.

На основе аналитического исследования сформулированы рекомендации по выбору функции стимулирования и плановых траекторий объемов производства:

1.Оптимальной системой материального стимулирования является компенсаторная система. При использовании компенсаторной системы затраты менеджмента проекта на материальное стимулирование являются минимальными. В практической деятельности компенсаторная система может быть реализована в виде штрафов за отклонение от плановой траектории.

2.Оптимальные объемы производства для любой модели кривой обучения в каждый момент времени должны выбираться обратно пропорционально трудоемкости продукции и прямо пропорционально коэффициенту дисконтирования.

Приложение

Доказательство утверждения.

Выполним интегрирование функционала (10) по частям:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = e^{-\delta T}\ln C(T) - \ln C(0) + \delta\int_0^T e^{-\delta t}\ln C(t)dt. \quad (22)$$

Введем функцию $g(t)$: $g(t) = e^{-\delta t}\ln C(t)$.

Тогда значение функции в начальный и конечный момент времени: $g(0) = \ln C(0)$, $g(T) = e^{-\delta T}\ln C(T)$. Выражение (22) примет вид:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = g(T) - g(0) + \delta\int_0^T g(t)dt. \quad (23)$$

1.Случай возрастающей функции $g(t)$.

Геометрической интерпретацией интеграла $S_g = \int_0^T g(t)dt$ является площадь криволинейной трапеции, ограниченная сверху положительной функцией $g(t)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$. Площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(T)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$ может быть определена с одной стороны через интеграл, а с другой как произведение длины на высоту:

$$S_T = \int_0^T g(T)dt = Tg(T). \quad (24)$$

Аналогично, площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(0)$, снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$ может быть найдена:

$$S_0 = \int_0^T g(0)dt = Tg(0). \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) следует:

$$g(T) = \frac{1}{T}\int_0^T g(T)dt. \quad (26)$$

$$g(0) = \frac{1}{T}\int_0^T g(0)dt. \quad (27)$$

Тогда функционал (23) с учетом формул (26) и (27) может быть записан:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = g(T) - g(0) + \delta\int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]dt + \delta\int_0^T g(t)dt. \quad (28)$$

Интеграл $\int_0^T [g(T) - g(0)]dt = S_{T0}$ определяет площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(T)$, снизу прямой $g(t) = g(0)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$.

Формулу $\delta\int_0^T g(t)dt$ геометрически можно интерпретировать как площадь сжатой по высоте криволинейной трапеции δS_g, так как $\delta < 1$. В случае возрастающей функция $g(t)$ выполняется условие $g(T) > g(0)$. Выражение $\frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]dt = \frac{1}{T}S_{T0}$ является положительной величиной и вычисляет площадь сжатого по высоте прямоугольника S_{T0}.

Сумма площадей трансформированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{T0}$ может быть определена как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху положительной функцией $\lambda_1 g(t)$ (λ_1-постоянный множитель), снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T [g(T) - g(0)]dt + \delta\int_0^T g(t)dt = \int_0^T \lambda_1 g(t)dt.$$

Так как λ_1 постоянный множитель, то максимизация (минимизация) функционала $\int_0^T \lambda_1 g(t)dt$ будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)dt = \int_0^T e^{-\delta t} lnC(t)dt$. Таким образом, утверждение доказано.

2.Случай убывающей функции $g(t)$.

В случае убывающей функции $g(t)$ выполняется условие $g(T) < g(0)$. Формула (33) примет вид:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T [g(0) - g(T)]dt + \delta\int_0^T g(t)dt.$$

Интеграл $\int_0^T [g(0) - g(T)]dt = S_{0T}$ определяет площадь прямоугольника, ограниченного сверху прямой $g(t) = g(0)$, снизу прямой $g(t) = g(T)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$. Выражение $\frac{1}{T}\int_0^T [g(0) - g(T)]dt = \frac{1}{T}S_{0T}$ является положительной величиной и вычисляет площадь сжатого по высоте прямоугольника S_{0T}.

1 вариант: выполняются условия $\delta > \frac{1}{T}$, $\delta g(T) > \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансформированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху положительной функцией $\lambda_2 g(t)$ (λ_2-постоянный множитель), снизу осью абсцисс и прямыми $t = 0$ и $t = T$:

$$\int_0^T e^{-\delta t}\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = -\frac{1}{T}\int_0^T [g(0)-g(T)]dt + \delta\int_0^T g(t)dt = \int_0^T \lambda_2 g(t)dt.$$

Максимизация (минимизация) функционала $\int_0^T \lambda_2 g(t)dt$ будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)dt = \int_0^T e^{-\delta t} lnC(t)dt$. Утверждение доказано.

2 вариант: выполняются условия $\delta < \frac{1}{T}$, $\delta g(T) < \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансфомированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как площадь перевернутой криволинейной трапеции, ограниченной сверху прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$, снизу функцией $\delta g(t)$ и прямыми $t = 0$ и $t = T$. Отрицательная разница площадей может быть вычислена $-\int_0^T [\frac{1}{T}g(0) - \delta g(t)]dt = \int_0^T \delta g(t)dt - g(0)$. Так как $\delta, g(0) = const$, то максимизация (минимизация) этого выражения будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)dt = \int_0^T e^{-\delta t} lnC(t)dt$. Утверждение доказано.

3 вариант: выполняются условия $\delta > \frac{1}{T}$, $\delta g(T) < \frac{1}{T}g(0)$.

В этом случае разница площадей трансфомированных криволинейной трапеции δS_g и прямоугольника $\frac{1}{T}S_{0T}$ может быть определена как разница площадей двух криволинейных треугольников. Площадь первого криволинейного треугольника ограниченна сверху функцией $\delta g(t)$, снизу прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$ и прямыми $t = 0$ и $t = \tau$ (абсцисса точки пересечения функции $\delta g(t)$ и прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$). Площадь второго криволинейного треугольника ограниченна сверху прямой $g(t) = \frac{1}{T}g(0)$, снизу функцией $\delta g(t)$ и прямыми $t = \tau$ и $t = T$.

Разница площадей может быть вычислена: $\int_0^\tau [\delta g(t) - \frac{1}{T}g(0)]dt - \int_\tau^T [\frac{1}{T}g(0) - \delta g(t)]dt = \int_0^T \delta g(t)dt - g(0)$. Так как $\delta, g(0) = const$, то максимизация (минимизация) этого выражения будет эквивалентна максимизации (минимизации) функционала $\int_0^T g(t)dt = \int_0^T e^{-\delta t} \ln C(t)dt$. Утверждение доказано.

Список использованных источников:

1. Новиков, Д.А. Механизмы управления динамическими активными системами / Д.А. Новиков, И.М. Смирнов, Т.Е. Шохина М.: ИПУ РАН, 2002. – 124 с.
2. Горелик, В.А. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления / В.А. Горелик, М.А. Горелов, А.Ф. Кононенко. - М.: Радио и связь, 1991.
3. Basar, T. Dynamic Noncooperative Game Theory / T. Basar, G.J. Olsder. – Philadelphia: SIAM, 1999.
4. Угольницкий, Г.А. Управление устойчивым развитием активных систем / Г.А. Угольницкий. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 940 с.
5. Dockner, E. Differential games in economics and management Science / E. Dockner, S. Jorgensen, N.V. Long, G. Sorger - Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. V. 3. no. 4. P. 122-128.
7. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. V. 39, no. 2. P. 176-188.
8. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. 1979. V. 10, no. 2. P. 302-328.
9. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 P.
10. Понтрягин, Л.С., Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – 4–е изд., стереотип. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
11. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. / Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. Для вузов. – 3-е, испр. и доп., М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.