

УДК 517.928

## АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОБИОЛОГИИ С СИНГУЛЯРНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

О. С. Кипкаева<sup>1</sup>

*Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

*Научный руководитель: Е. А. Щепаккина, д.ф.-м.н., профессор  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация*

Ключевые слова: сингулярные возмущения, бифуркации, редукция

В данной работе исследуется модель, описывающая взаимодействие бактерий и вирусов, которая в безразмерном виде описывается системой [1], [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - bx(x+y) - Q(x)W(v), \\ \dot{y} = Q(x)W(v) - \mu y, \\ \dot{v} = \bar{\sigma}y - \bar{m}v, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$Q(x) = \frac{x}{1+\mu x}, \quad W(v) = \alpha v(1 + \eta v^p), \quad \eta > 0, \alpha > 0, p > 0, \mu > 0.$$

$x(t)$  – концентрация незараженных бактерий-переносчиков вируса;  $y(t)$  – концентрация зараженных бактерий;  $v(t)$  – свободные вирусы;  $a, b$  – коэффициенты репродукции для бактерий и вирусов, соответственно,  $b = a/K$ , где  $K$  – пропускная способность среды;  $\alpha$  – константа скорости контакта бактерий с вирусами.

В работе методами качественного и численного анализа исследуется динамика решений системы (1) для частного случая  $p = 1$ . На основе метода инвариантных многообразий была осуществлена редукция системы [3]. Было показано, что исследование полной системы может быть заменено анализом ее проекции на устойчивое медленное инвариантное многообразие без потери важных качественных свойств динамики ее решений.

В работе установлено, что в системе (1) может наблюдаться бифуркация рождения цикла [4], получены необходимые условия этой бифуркации в виде соотношения между значениями параметров динамической системы. Получены результаты о влиянии значений

<sup>1</sup> Кипкаева Ольга Сергеевна, студент группы 6541-010501D,  
email: o\_kipkaeva@mail.ru

параметров динамической системы на размер, форму предельного цикла и его расположение на фазовой плоскости. Так, для рассматриваемой задачи вирусологии важно, чтобы центр предельного цикла имел координату  $x$  как можно большей при незначительных значениях  $y$ . Это отвечает случаю, когда организм успешно справляется с вирусным заболеванием. Однако данная модель, как и другие модели динамики популяций, являясь универсальной, может быть использована не только в микробиологии, но в других отраслях науки, включая экологию, макробиологию, экономику, историю и др. Поэтому полученные результаты бифуркационного анализа имеют важное значение с точки зрения управления колебательными процессами в различных динамических системах с разномасштабными переменными.

#### Библиографический список

1. Korobeinikov A., Shchepakina E., Sobolev V. The paradox of enrichment, spatial heterogeneity, community effects and the phenomenon of apparent disappearance in the marine bacteriophage dynamics // The ANZIAM Journal. – 2020. – V. 62. P. 453–468.

2. Beretta E., Kuang Ya. Modeling and analysis of a marine bacteriophage infection // Math. Biosci. – 1998. – V. 149(1). – P. 57–76.

3. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 320 с.

4. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций / Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. М.: ВИНТИ, 1986. – Т. 5. – С. 5-218.