УДК 517.987

О ТЕОРЕМЕ ФУБИНИ ДЛЯ НЕАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА

© Хорохорина Я.А., Свистула М.Г.

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация

e-mail: horohorina-yana@mail.ru

В работе получены аналоги теоремы Фубини, где в качестве интегралов берутся интегралы Шоке по монотонным функциям множества.

Пусть Σ – некоторая σ – алгебра подмножеств множества X. Функция множества μ: $\Sigma \to [0;+\infty)$ называется монотонной, если $\mu(\emptyset)=0$ и $\mu(A)\leq \mu(B)$, лишь только $A, B \in\Sigma$ и $A \subset B$.

Пусть функция f: $X \to [a,b]$ является Σ – измеримой. Под $\int_X f\, d\mu$ здесь понимаем интеграл Шоке, который будет равен $\int_X f\, d\mu = a\ \mu(X) + \int_a^b \mu(\{f\geq t\})\, dt$.

Пусть f_1 и $f_2 : X \to \mathbb{R}$. Будем говорить,что функции f_1 и f_2 сравнимы, если выполняется хотя бы одно из соотношений $f_1 \leq f_2$ или $f_2 \leq f_1$. Множества E и F, содержащиеся в X, называем сравнимыми, если их характеристические функции сравнимы.

Говорим, что μ_1 , μ_2: $\Sigma \to [0;+\infty)$ сравнимы, если выполняется хотя бы одно из соотношений $\mu_1 \leq \mu_2$ или $\mu_2 \leq \mu_1$.

Доказана следующая теорема :

Пусть X, Y – некоторые непустые множества;

μ_y : $2^X \to [0;+\infty)$, *где* $y \in Y$, *-семейство монотонных функций множества, которые попарно сравнимы, и* $\underset{y\in Y}{supretmum}\ \mu_y(X) \neq \infty$

(2^X *означает множество всех подмножеств X).*

Функция множества $\nu : 2^Y \to [0;+\infty)$ *монотонная.*

Пусть функция $f(x,y)$: $X \times Y\to [a,b]$ *имеет попарно сравнимые y-сечения.*

Полагаем выполненным условие согласования: для $\forall y_1, y_2 \in Y$ *имеет место хотя бы одно из условий: 1)* $\mu_{y1}\leq \mu_{y2}$ *и* $f(., y_1) \leq f(., y_2)$ *или 2)* $\mu_{y2}\leq \mu_{y1}$ *и* $f(., y_2)\leq f(., y_1)$.

Обозначим $\mathscr{E}=\{E=\{f \geq\alpha\},\ \alpha\in\mathbb{R}.\}$.

Пусть φ: $2^Z \to [0;+\infty)$ *– любая монотонная функция множества, для которой*

$$\varphi(E)=\int_Y \mu_y(E_y)\, d\nu,\ E\in \mathscr{E}.$$

Тогда $\int_{X\times Y} f(x,y)d\varphi = \int_Y (\int_X f(x,y)d\mu_y)\, d\nu$.

Заметим, что если в теореме дополнительно потребовать $\mu_y(X) = C \geq 0$для всех $y \in Y$, то она остается верной и для ограниченных f со значениями в $\mathbb{R}$, не обязательно неотрицательных.

Библиографический список

1. Ghirardato P. On Independence for Non-Additive Measures, with a Fubini Theorem , Journal of economic theory. 1997.

2. Chateauneuf A., Lefort J.-Ph. Some Fubini Theorems on product σ -algebras for non-additive measures // International Journal of Approximate Reasoning. 2008.

3. Wang Z., Klir G. Generalized Measure Theory. Springer, 2009.