

температуры, полученной по параметрам смазки на дорожке качения с температурой — по температуре вне дорожки качения, показывает, что экстраполяция  $T_{ср}$  по формуле (14) дает большее совпадение результатов, чем формальная экстраполяция.

Расчет толщины смазочной пленки по температуре, полученной формальной экстраполяцией, дает повышенную по сравнению с экспериментом величину на 240%, а по формуле (14) — лишь на 30% (см. рис. 3). Расхождение результатов в последнем случае отчасти можно объяснить приработкой смазочного слоя в подшипнике с одноразовой закладкой смазки. Подобное соотношение экспериментальных и теоретических данных наблюдалось на всех скоростных режимах работы подшипника.

Эти обстоятельства показывают возможность существенного уточнения расчета толщины смазочной пленки за счет использования предложенной методики расчета контактной температуры.

## В ы в о д ы

1. Температурное поле на дорожке качения и в ее окрестностях можно восстановить по температуре в двух точках окрестности.

2. Полученные формулы позволяют рассчитать температуру в любой точке зоны качения, в том числе максимальную, минимальную и среднюю на поверхности дорожки качения, а также мощность теплового источника, вызванного энергетическими потерями на трение.

3. Расчет температуры по предлагаемой методике не противоречит экспериментальным данным и может быть использован для оценки температуры зоны качения и уточнения контактно-гидродинамического расчета высокоскоростных приборных подшипников.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Коровчинский М. В. Локальный термический контакт при квазистационарном тепловыделении в процессе трения. Сборник. «Теория трения и износа». Издательство «Наука», 1965.

**Ф. П. СНЕГОВСКИЙ, В. П. КУЗЬМИНСКИЙ**

## **УПРОЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Решения контактно-гидродинамической задачи в полной и строгой постановке вопроса приводят к сложным зависимостям, которые пока не могут быть использованы для расчетов металлических подшипников скольжения.

Экспериментальные исследования [1] и опыт проектирования и эксплуатации подшипников скольжения подтверждают необходи-

мость разработки более упрощенных решений контактно-гидродинамической задачи, пригодных для инженерных расчетов.

Специально поставленными опытами [1] установлено почти полное отсутствие утечек смазки из торцов рабочей зоны тяжело-нагруженного подшипника скольжения и равномерное распределение давления вдоль оси подшипника. В связи с этим для тяжело-нагруженного подшипника скольжения можно ограничиться решением плоской контактно-гидродинамической задачи.

### Уравнение для формы зазора в подшипнике

Пусть в подшипнике, работающем под нагрузкой в стационарном режиме, установился зазор  $h' = h'(\alpha)$ , где  $\alpha$  — текущая угловая координата масляного слоя. В таком случае некоторую условную форму зазора в недеформированном подшипнике (зазор или «внедрение») можно представить выражением

$$h = h' - (u_1 + u_2), \quad (1)$$

где  $u_1 = u_1(\alpha)$  и  $u_2 = u_2(\alpha)$  — величины радиальных деформаций рабочих поверхностей шипа и подшипника (несовпадением осей шипа и подшипника пренебрегаем).

Под действием двух радиальных сжимающих сил  $P$  любая точка на поверхности упругого бесконечного кругового цилиндра получит радиальное перемещение, определяемое выражением [2]

$$U_1 = P \left[ -2\Theta_1 \left( 1 + \cos \gamma \ln \operatorname{tg} \frac{|\gamma|}{2} \right) + \kappa_1 \sin |\gamma| \right]. \quad (2)$$

Аналогично радиальное перемещение любой точки поверхности бесконечного упругого тела с цилиндрическим вырезом определится выражением:

$$U_2 = P \left( -2\Theta_2 \cos \gamma \ln \operatorname{tg} \frac{|\gamma|}{2} + \kappa_2 \sin |\gamma| \right). \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) принято:  $\gamma$  — угол между линией действия сил и радиусом — вектором точки поверхности, где определяется перемещение;  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ ,  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — упругие постоянные материалов шипа и подшипника [2].

Если на поверхности шипа и подшипника действует гидродинамическое давление  $P = p(\alpha')$ , где  $\alpha'$  — текущая угловая координата точки масляного слоя, в котором определяется давление, то на элемент поверхности  $d\alpha'$  (рис. 1) будет действовать эле-

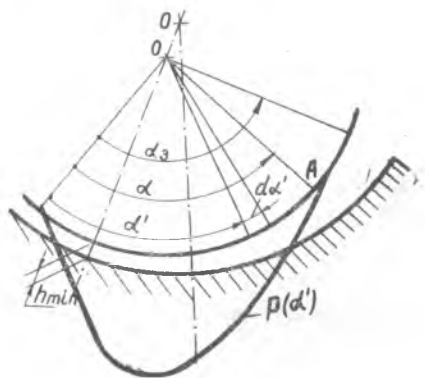


Рис. 1.

ментарная сила  $p(\alpha') r d\alpha'$ , где  $r$  — радиус шипа (радиус подшипника  $R \approx r$ ).

Элементарное перемещение любой точки поверхности под действием элементарной силы нетрудно определить из выражения (2). Для полного радиального перемещения поверхности цилиндра (шипа) под действием гидродинамического давления в области  $0 \leq \alpha' \leq \alpha_3$  можно записать соотношение

$$u_1 = r \int_0^{\alpha_3} p(\alpha') \left\{ -2\Theta_1 \left[ 1 + \cos(\alpha + \alpha') \ln \operatorname{tg} \frac{|\alpha - \alpha'|}{2} \right] + \alpha_1 \sin |\alpha - \alpha'| \right\} d\alpha'. \quad (4)$$

Аналогично получим радиальное перемещение точек поверхности тела с цилиндрическим вырезом (подшипника)

$$u_2 = r \int_0^{\alpha_2} p(\alpha') \left[ -2\Theta_2 \cos(\alpha - \alpha') \ln \operatorname{tg} \frac{|\alpha - \alpha'|}{2} + \alpha_2 \sin |\alpha - \alpha'| \right] d\alpha'. \quad (5)$$

При выводе выражений (4) и (5) предполагалось, что внешние силы действуют симметрично гидродинамическому давлению. Аналогичное предположение было принято и при решении контактной задачи [2], что не повлияло на точность решения. Поэтому такое предположение будем считать приемлемым и для решения контактно-гидродинамической задачи.

Распределение гидродинамического давления в слое смазки описывается уравнением Рейнольдса, которое при известных в гидродинамической теории смазки допущениях имеет вид

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta U r \frac{h' - h'_0}{(h')^3}, \quad (6)$$

где  $\eta$  — вязкость масла, усредненная по толщине и протяженности слоя;

$U$  — линейная скорость поверхности шипа;

$h'_0$  — толщина смазочного слоя в месте максимального давления.

Введем безразмерные параметры. Безразмерная толщина смазочного слоя (безразмерная форма зазора)

$$\lambda' = \frac{h'}{h_{\min}}; \quad (7)$$

безразмерная условная форма зазора в недеформированном подшипнике

$$\lambda = \frac{h}{h_{\min}}; \quad (8)$$

безразмерная функция давления

$$p(\alpha') = \int_0^{\alpha'} \frac{d\alpha}{(\lambda')^2} - \lambda'_0 \int_0^{\alpha'} \frac{d\alpha}{(\lambda')^3}, \quad (9)$$

где  $\lambda_0' = \frac{h_0'}{h_{\min}}$  и  $h_{\min}$  — минимальная толщина смазочного слоя; параметры, характеризующие упругие свойства материалов шипа и подшипника:

$$\varepsilon = \frac{E_1}{E_2}; \quad \gamma_1 = \nu_1 E_1 = \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{\pi}; \quad \rho_1 = (1 - \nu_1) E_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi};$$

$$\gamma_2 = \nu_2 E_2 = \frac{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)}{\pi}; \quad \rho_2 = (1 - \nu_2) E_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi},$$

где  $E_1$  и  $E_2$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов шипа и подшипника (параметры с индексом 1 относятся к шипу, с индексом 2 — к подшипнику);

безразмерная функция суммарной деформации

$$F(x) = \int_0^{\alpha_2} \zeta(x') \left\{ -2\rho_1 \left[ 1 + \cos(x - x') \ln \operatorname{tg} \frac{|x - x'|}{2} \right] + \gamma_1 \sin|x - x'| \right\} dx' +$$

$$+ \int_0^{\alpha_1} \zeta(x') \varepsilon \left[ -2\rho_2 \cos(x - x') \ln \operatorname{tg} \frac{|x - x'|}{2} + \gamma_2 \sin|x - x'| \right] dx'; \quad (10)$$

упруго-гидродинамический безразмерный параметр

$$\Psi = \frac{6\gamma U r^2}{E_1 h_{\min}^3}, \quad (11)$$

Из (1), (4) и (5), учитывая принятые обозначения, получим уравнение для формы зазора в подшипнике с учетом деформации под нагрузкой:

$$\lambda'(x) = \lambda(x) + \Psi F(x) \quad (12)$$

или

$$\lambda'(x) = \lambda(x) + \Psi F_1[\lambda'(x), x]. \quad (13)$$

### Приближенное решение уравнения для формы зазора

Не останавливаясь на других способах решения уравнения (12), рассмотрим здесь приближенное решение, основанное на предположении, что после деформации под нагрузкой поверхности шипа и подшипника в рабочей зоне остаются круговыми цилиндрами с измененными радиусами кривизны  $r'$  и  $R'$ . Приемлемость такого предположения для инженерных расчетов подтверждается экспериментально [1] и сравнением результатов расчета и опытов.

Форма зазора в рабочей зоне подшипника в таком случае выразится известным соотношением, как для круговых цилиндров

$$h' \approx \delta' [1 - x' \cos(x - \alpha_2)], \quad (14)$$

где  $\delta' = R' - r_1$  — радиальный зазор,  $\varkappa' = \frac{\delta' - h_{\min}}{\delta'}$  — относительный эксцентриситет в рабочей зоне,  $\alpha_2$  — угловая координата сечения, в котором  $h' = h_{\min}$ .

Условная форма зазора может быть представлена выражением

$$h = \delta [1 - \varkappa \cos(\alpha - \beta_2)], \quad (15)$$

где  $\delta$  и  $\varkappa$  — радиальный зазор и относительный эксцентриситет в недеформированном подшипнике с условной формой зазора  $h(\alpha)$ ,  $\beta_2$  — угловая координата сечения, где  $h(\alpha)$  имеет минимум.

Подставив выражение (14) и (15) в уравнение (12) с использованием (7) и (8) и разделив левую и правую часть на  $\delta'$ , преобразуем уравнение (12) к виду

$$v'(\alpha) = v(\alpha) + \Psi'(1 - \varkappa')F(\alpha) + \Delta(\alpha), \quad (16)$$

где

$$v'(\alpha) = 1 - \varkappa' \cos(\alpha - \alpha_2), \quad v(\alpha) = C [1 - \varkappa \cos(\alpha - \beta_2)]; \quad (17), (17A)$$

$C = \frac{\delta}{\delta'} \approx \frac{\Psi'}{\Psi''}$  — коэффициент деформации,  $\Delta(\alpha)$  — поправка, появившаяся в связи с тем, что в уравнение (12) подставлено приближенное выражение (14);  $\Psi' = \frac{\delta'}{r}$  и  $\Psi'' = \frac{\delta}{r}$  — относительные зазоры в деформированном и недеформированном подшипнике ( $r' \approx r$ ).

Для численного решения поставленной задачи разобьем область действия гидродинамических давлений на  $n$  равных частей с шагом  $\vartheta$ .

Уравнение (16) заменим системой уравнений

$$v'(l) = C [1 - \varkappa \cos(l - l_t)\vartheta] + \Psi'(1 - \varkappa')F(l) + \Delta(l), \quad (18)$$

где  $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ ,  $l_t = \frac{\beta_2}{\vartheta}$ ,

$$v'(l) = 1 - \varkappa' \cos(l - l_m)\vartheta \text{ из (17), } l_m = \frac{\alpha_2}{\vartheta}.$$

Задача сводится к подбору таких значений  $C$ ,  $\varkappa$  и  $l_t$  при наперед заданных  $\varkappa'$  и  $\Psi'$ , при которых поправка  $\Delta(\alpha)$  при всех значениях  $l$  будет наиболее близкой к нулю.

Для вычисления функции  $F(l)$  будем считать, что в пределах шага,  $\vartheta$  функция  $\zeta(\alpha')$  имеет постоянное значение, т. е.

$$\zeta(\alpha') = \zeta(k) \text{ при } (k-1)\vartheta \leq \alpha' \leq k\vartheta$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

В таком случае функция  $F(l)$  будет иметь вид:

$$F(l) = \sum_{k=1}^n \zeta(k) \left[ -2\rho_1\vartheta - 2(\rho_1 + \rho_2\varepsilon) \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos(l\vartheta - \alpha') \ln \operatorname{tg} \frac{|l\vartheta - \alpha'|}{2} d\alpha' + \right.$$

$$+(Y_1 + Y_2 \varepsilon) \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \sin |l\vartheta - \alpha'| dx' \Big]. \quad (19)$$

Вычислив определенные интегралы, входящие в выражение (19) для  $k \leq l$  и  $k \geq l + 1$ , получим:

$$F(l) = \sum_{k=1}^n \zeta(k) \cdot f(l, k) + 2\rho_2 \varepsilon \vartheta \sum_{k=1}^n \zeta(k),$$

где при  $k \leq l$

$$f(l, k) = (Y_1 + Y_2 \varepsilon) [\cos(l-k)\vartheta - \cos(l-k+1)\vartheta] - 2(\rho_1 + \rho_2 \varepsilon) \times \\ \times \left[ -\sin(l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l-k)\vartheta}{2} + \sin(l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(l-k+1)\vartheta}{2} \right],$$

при  $k \geq l + 1$

$$f(l, k) = (Y_1 + Y_2 \varepsilon) [-\cos(l-k)\vartheta + \cos(l-k+1)\vartheta] - 2(\rho_1 + \rho_2 \varepsilon) \times \\ \times \left[ -\sin(l-k)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-l)\vartheta}{2} + \sin(l-k+1)\vartheta \ln \operatorname{tg} \frac{(k-l-1)\vartheta}{2} \right]$$

Значения функции  $\zeta(k)$  вычисляются из условия

$$\zeta(k)\vartheta = \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \zeta(\alpha') dx'$$

Анализ функции  $f(l, k)$  показывает, что для определения ее значений во всем диапазоне  $l$  и  $k$  достаточно определить значения  $f(l, k)$  при  $l = 0$  в некотором диапазоне значений  $k$ , т. е. определить функцию  $f_0(k) = f(l = 0, k)$  при  $k = -(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n$ .

Функцию  $F(l)$  можно представить в следующем виде, удобном для вычислений:

$$F(l) = \zeta(k=1)f_0(k=l) + \zeta(k=2)f_0(k=l-1) + \dots \\ \dots + \zeta(k=s)f_0(k=l-s+1) + \dots + \zeta(k=n)f_0(k=l-n+1) + \\ + 2\rho_2 \varepsilon \vartheta \sum_{k=1}^n \zeta(k), \quad l = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Графики функций  $F(l)$  для баббитового подшипника приведены на рис. 2.

Параметры  $C$  и  $\times$  в системе уравнений (18) подбираются из условия, чтобы квадратическое отклонение  $S = \sum_{l=1}^n [\Delta(l)]^2$  было минимальным.

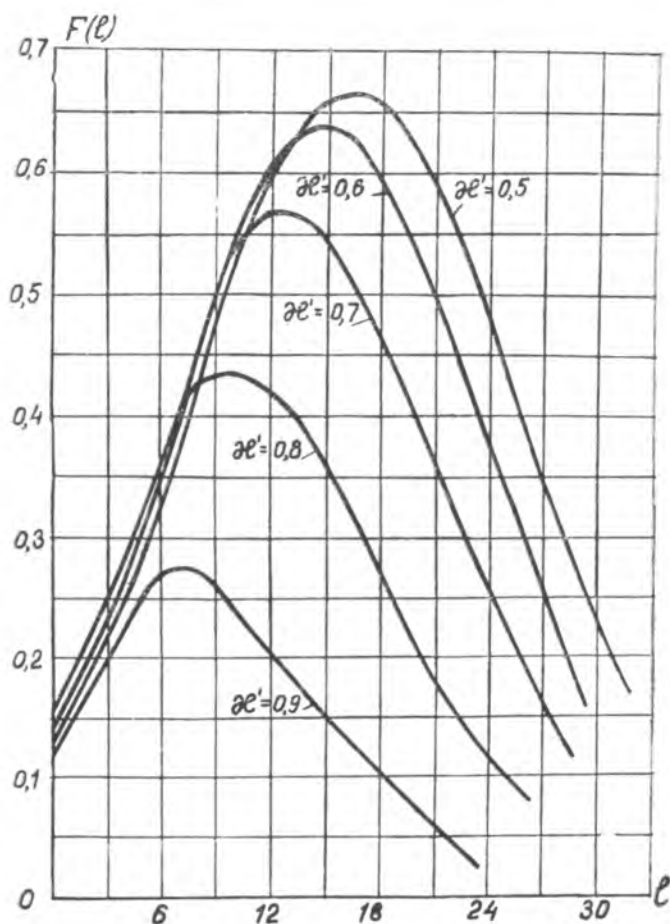


Рис. 2.

Решив систему уравнений  $\frac{\partial S}{\partial C} = 0$  и  $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ , получим значения  $x$  и  $C$ , удовлетворяющие заданному условию:

$$x = \frac{\left[ \sum_{l=0}^n W(l) \right] \sum_{l=0}^n \cos(l-l_t) \vartheta - (n+1) \sum_{l=0}^n [W(l) \cdot \cos(l-l_t) \vartheta]}{\left[ \sum_{l=0}^n \cos^2(l-l_t) \vartheta \right] \sum_{l=0}^n W(l) - \left[ \sum_{l=0}^n \cos(l-l_t) \vartheta \right] \sum_{l=0}^n [W(l) \cdot \cos(l-l_t) \vartheta]}$$

(20)

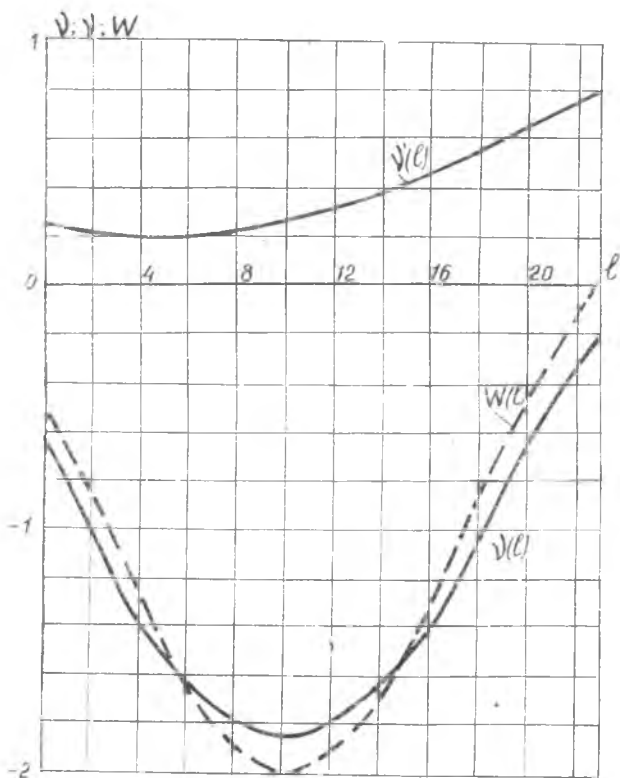


Рис. 3.

$$C = \frac{\sum_{l=0}^n [W(l) \cdot \cos(l - l_t) \vartheta]}{\sum_{l=0}^n \cos(l - l_t) \vartheta - \kappa' \sum_{l=0}^n \cos^2(l - l_t) \vartheta} \quad (21)$$

где  $W(l) = \psi'(l) - \gamma F(1 - \kappa') F(l)$ .

Параметр  $l_t$  приблизительно равен значению  $l$ , при котором функция  $W(l)$  имеет минимум и уточняется пробными расчетами.

Выражение (21) — это функция  $C = C(\Psi)$  и может быть представлено в виде

$$C = 1 + \sigma \Gamma, \quad (22)$$

где  $\sigma$  — параметр, вычисляемый из (21), зависит от  $\kappa'$  и упругих свойств материалов шипа и подшипника. Для баббитового 120-градусного подшипника получено:  $\kappa' = 0,5$   $\sigma = 0,34$ ;  $\kappa' = 0,6$   $\sigma = 0,17$ ;  $\kappa' = 0,7$  и  $\kappa' = 0,8$   $\sigma = 0,1$ ;  $\kappa' = 0,9$   $\sigma = 0,02$ .



Ориентировочное сравнение коэффициентов деформации, полученных обработкой опытных данных из работы [1] и расчетом по формуле (22) приведено в таблице 1.

Таблица 1

Данные из работы [ 1 ]				Параметры опытных кривых		Параметры, полученные расчетом	
Номер рисунка	Номер кривой	$h_{\min}$ в мкм	$U$ , м/сек	$\kappa'$	$C$	$C$	$\Psi$
84	3	9,3	10	0,77	12,5	13	36
	4	12,5	20	0,42	11,5	7,6	19,7
	5	9,7	30	0,41	14,7	11,5	31
83	6	8	30	0,38	19,0	15,2	42,2
	4	5	5	0,42	27,7	33	96

Графики функций  $v'(l)$ ,  $v(l)$  и  $W(l)$  для баббитового 120-градусного подшипника, работающего при  $\kappa'=0,8$  и  $\Psi=25$ , показаны на рис. 3.

### Решение с учетом зависимости вязкости масла от давления

Зависимость вязкости масла от давления примем в виде формулы Баруса

$$\eta_a = \eta_0 e^{ap} \quad (23)$$

где  $\eta_a$  — вязкость масла с учетом ее зависимости от давления,  
 $a$  — пьезокоэффициент вязкости,  
 $\eta_0$  — вязкость при атмосферном давлении.

Аналогично выражению (9) введем безразмерную функцию давления с учетом зависимости вязкости от давления

$$\zeta_a(\alpha') = \frac{h_{\min}^2}{6\eta_0 Ur} p_a(\alpha'), \quad (24)$$

где  $p_a(\alpha')$  — гидродинамическое давление в слое смазки, вязкость которой зависит от давления.

Преобразовав выражение для  $p_a(\alpha')$ , выведенное в работе [5], и подставив его в (24), получим выражение для безразмерной функции гидродинамического давления в виде

$$\zeta_a(\alpha') = \zeta(\alpha') \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} B^i [\zeta(\alpha')]^i \right\}, \quad (25)$$

где  $B = \frac{6a\eta_0 Ur}{h_{\min}^2}$ .

Решение задачи с учетом зависимости вязкости от давления производится до получения зависимости  $C=C(\Psi)$  в том же поряд-

ке, что и без учета зависимости вязкости от давления, но во всех выражениях  $\sigma(\alpha')$  заменяется на  $\sigma_d(\alpha')$  из (25).

При численном решении задачи расчеты производятся для нескольких значений параметра  $B$ .

Удовлетворительное совпадение опытных и расчетных коэффициентов деформации (см. таблицу), а также близкое совпадение кривых  $v(l)$  и  $W(l)$  (рис. 3) подтверждают достаточную точность приближенного решения контактно-гидродинамической задачи для практических расчетов.

Полученные зависимости  $C=C(\Psi)$  позволяют рядом пробных расчетов определить действительный зазор в рабочей зоне подшипника скольжения с учетом деформации деталей подшипника под нагрузкой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Снеговский Ф. П. Опоры скольжения тяжелых машин. М., Машиностроение, 1969.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
3. Коровчинский М. В. Некоторые вопросы гидродинамической теории смазки при деформируемости тел, ограничивающих смазочный слой. Тр. III Всес. конф. по трению и износу в машинах, т. 3. Изд. АН СССР, 1960.
4. Коднир Д. С. Контактно-гидродинамическая теория смазки. Куйбышев. 1963.
5. Дьячков А. К. Учет влияния зависимости вязкости смазочного масла от давления на показатели работы цилиндрического подшипника при статическом нагружении. «Трение и износ в машинах», сб. III. Москва, 1946 г.

Д. Л. БАКАШВИЛИ

## ИССЛЕДОВАНИЕ КАЧЕНИЯ ШАРИКА В ШАРИКОПОДШИПНИКЕ

Работы, проводимые в последние годы в лабораториях Англии и США показали, что оптическая интерференция является наиболее удобным методом для получения фундаментальных характеристик эластогидродинамической смазки. Методика и физика интерференционной техники определения толщины масляного слоя подробно приводится в работах А. Камерона, Тейбора, Блока, В. Винера и др. Нами для изучения процесса контактирования шарика с кольцами подшипника в условиях жидкостного трения металлические кольца заменялись стеклянными [1].

Для экспериментального определения толщины и формы смазочного слоя при качении была создана установка, приведенная на рис. 1. Она состоит из модели упорного шарикоподшипника, привода и приборов, необходимых для обеспечения интерферометрии. Кольца подшипника изготовлены из оптического стекла марки К-8;