

увеличение угла раскрытия во всех случаях приближает точку обрыва к сечению с минимальной высотой. Проведенный анализ показывает, что переменность вязкости в направлении движения существенно влияет на формирование смазочного слоя. Учет этого фактора при построении интегральных характеристик смазочного слоя обеспечивает более высокую точность расчета и не вызывает принципиальных затруднений. Возможно обобщение рассматриваемой задачи при учете зависимости вязкости от давления [2], а также плотности смазки от температуры. В последнем случае следует постулировать непрерывность массового расхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камерон А. Теория смазки в инженерном деле. Машгиз, 1962.
2. Коднир Д. С. Контактно-гидродинамическая теория смазки. Куйбышевское книжное издательство, 1963.
3. Козырев С. П. О кавитации в вязкой жидкости. Сб. «Развитие гидродинамической теории смазки». Изд-во «Наука», 1970.
4. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. Машгиз, 1959.
5. Петруничев А. И. О границах несущего смазочного слоя опорного подшипника скольжения. Машиноведение, 1971, № 4.
6. Попов П. З. Плоская неизотермическая задача гидродинамической теории смазки подпятника с деформированной подушкой. Машиноведение, 1966, № 4.
7. Попов П. З. Плоская изотермическая задача гидродинамической теории смазки подпятника с деформированной подушкой. Труды Ленингр. кораблестр. ин-та, вып. 50, Изд-во «Судостроение», 1966.
8. Попов П. З. Неизотермическая задача гидродинамической теории смазки подпятника с недеформированной и деформированной подушками. Сб. «Развитие гидродинамической теории смазки». Изд-во «Наука», 1970.
9. Попов П. З. Использование параболической аппроксимации функции вязкости в плоской неизотермической задаче теории смазки подпятника с деформированной подушкой. Труды Ленингр. кораблестр. ин-та, вып. 76. Изд-во «Судостроение», 1971.
10. Снеговский Ф. П. Опоры скольжения тяжелых машин. Изд-во «Машиностроение», 1969.
11. Тодер И. А., Розлер Г. М. Расчет предельных режимов работы подшипников жидкостного трения. Сб. «Развитие гидродинамической теории смазки». Изд-во «Наука», 1970.
12. Ханович М. Г. Опоры жидкостного трения и комбинированные. Машгиз, 1960.
13. Birkhoff G. Hays D. F. Free Boundaries in Partial Lubrication. Journal of Mathematics and Physics. v. XLII, № 2, 1963.
14. Floberg L., Experimental Investigation of Cavitation Regions in Journal Bearings. Trans of Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, № 238, 1961.

М. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ БОКОВОГО ИСТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОТДАЧИ В СТЕНКИ

Как известно, несущая способность смазочной пленки существенно зависит от температуры масла. Поэтому вопросы, связанные

с изучением температурных полей смазочных слоев, имеют важное значение. Ниже, применительно к частному случаю слоя постоянной вязкости между плоскими пластинками, дается приближенное решение задачи, выполненное с учетом движения смазки в боковом направлении (вдоль оси z , см. рис. 1), при наличии теплообмена между слоем и подвижной пластиной.

Используя общепринятые обозначения, уравнение для температуры в пленке можно записать в виде

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Принтегрируем (1) по толщине пленки. Учитывая, что, в силу уравнения неразрывности,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (uT) + \frac{\partial}{\partial y} (vT) + \frac{\partial}{\partial z} (wT),$$

и используя граничные условия $u = v = w = 0$ при $y = h$ и $v = 0$ при $y = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h uT dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h wT dy + \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0^h + f, \\ f = \int_0^h \frac{\mu}{\rho c} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае постоянной вязкости функции u , w и f могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u = U_0 \bar{u}, \quad \bar{u} = 1 - \eta + \frac{1}{2} \varphi_x (\eta^2 - \eta), \quad \varphi_x = \frac{h^2}{\mu U_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ w = U_0 \bar{w}, \quad \bar{w} = \frac{1}{2} \varphi_z (\eta^2 - \eta), \quad \varphi_z = \frac{h^2}{\mu U_0} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ f = \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\mu U_0^2}{h} + \frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}, \quad \eta = \frac{y}{h}. \end{aligned} \quad (3)$$

Давление в слое p находится из уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U_0 \frac{dh}{dx}. \quad (4)$$

Профиль температур по толщине пленки будем аппроксимировать параболой второй степени [1, 2]. Ограничиваясь тем случаем, когда теплоотдача в колодку отсутствует, выражение для T представим в виде

$$T = T_s [1 + (2\eta - \eta^2) \cdot \theta(x, z)], \quad \eta = \frac{y}{h}. \quad (5)$$

Здесь T_s — температура на границе между слоем и подвижной пластиной, θ — неизвестная функция x и z , подлежащая определению.

Согласно [3], температуру T_s можно считать не зависящей от x . Кроме того, ориентируясь на результаты, полученные в [2], примем, что T_s не зависит от z .

Подставляя (3) и (5) в левую часть (2), с учетом постоянства U_0 и T_s получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_s U_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u T dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \omega T dy \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h}{2} - \frac{h\varphi_x}{12} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h\varphi_z}{12} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{h}{4} - \frac{7}{120} h\varphi_x \right) \Theta \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{7}{120} h\varphi_z \Theta \right). \end{aligned}$$

В силу (4), первые два слагаемых в последнем выражении дают в сумме нуль, а

$$\frac{\partial}{\partial x} (h\varphi_x \Theta) + \frac{\partial}{\partial z} (h\varphi_z \Theta) = h\varphi_x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + h\varphi_z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + 6\Theta \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u T dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h \omega T dy = \\ & = \frac{U_0 T_s h_2}{L} \left[-\frac{\Theta}{10} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{\bar{h}}{4} \left(1 - \frac{7}{30} \varphi_x \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{7}{120} h\varphi_z \frac{L}{B} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$\bar{h} = \frac{h}{h_2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{B}.$$

Правую часть уравнения (2) можно записать так

$$\frac{U_0 T_s h_2}{L} \left[-\frac{\lambda L}{\rho c U_0 h_2^2} \cdot \frac{2}{\bar{h}} \Theta + \frac{\mu U_0 L}{\rho c T_s h_2^2} \cdot \frac{1}{\bar{h}} \left(1 + \frac{\varphi_x^2 + \varphi_z^2}{12} \right) \right].$$

В результате уравнение (2) можно записать так

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -f_2 \cdot \Theta + f_3, \quad (6)$$

где

$$f_1 = -\frac{7}{30} \cdot \frac{\varphi_z}{1 - \frac{7}{30} \varphi_x} \cdot \frac{L}{B}, \quad f_2 = \frac{0.4}{\bar{h}} \cdot \frac{-\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{20}{P_e} \cdot \frac{1}{\bar{h}}}{1 - \frac{7}{30} \varphi_x},$$

$$f_3 = \frac{4}{t_s} \cdot \frac{1}{\bar{h}^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{12} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)}{1 - \frac{7}{30} \varphi_x}, \quad (7)$$

$$t_s = \frac{T_s}{T^0}, \quad P_e = \frac{\rho c U_0 h_2^2}{\lambda L}, \quad T^0 = \frac{\mu U_0 L}{\rho c h_2^2}.$$

Для того чтобы получить решение уравнения (6), рассмотрим интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = f_1, \quad (8)$$

Эти кривые можно рассматривать как своего рода «линии тока», вдоль которых переносится величина Θ . В силу (8), на указанных кривых дифференциал

$$d\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}} d\bar{z} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right) d\bar{x} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\bar{x}} + f_1 \frac{\partial\Theta}{\partial\bar{z}} \right) d\bar{x},$$

так, что на основании (6),

$$\frac{d\Theta}{d\bar{x}} = -f_2 \cdot \Theta + f_3. \quad (9)$$

Таким образом, определив из (8) «линии тока» $\bar{z} = \bar{z}(x)$, на каждой из них для Θ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее Θ как функцию одной лишь переменной x .

Начальные условия при решении уравнений (8) и (9) задаются так. Сначала, в пределах ширины входного сечения слоя (при $\bar{x} = 0$), выбирается величина $\bar{z}_0 = \bar{z}(0)$, выделяющая конкретную «линию тока», на которой изучается изменение температуры. Затем задается значение калориметрической температуры на входе в слой в точке $\bar{x} = 0, \bar{z} = \bar{z}_0$.

Калориметрическая температура определяется формулой

$$T_m = T^0 t_m, \quad t_m = \frac{\int_0^h u t dy}{\int_0^h u dy}, \quad t = \frac{T}{T^0},$$

и, в силу (5) и (3), связана с Θ зависимостью:

$$t_m = t_s \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{7}{30} \varphi_x}{1 - \frac{1}{6} \varphi_x} \Theta \right). \quad (10)$$

Отсюда для $\Theta(\bar{x} = 0)$ имеем

$$\Theta(\bar{x} = 0) = 2 \cdot \left(\frac{t_{m1}}{t_s} - 1 \right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{6} \varphi_x}{1 - \frac{7}{30} \varphi_x} \Big|_{\bar{x}=0}, \quad t_{m1} = t_m \Big|_{\bar{x}=0}. \quad (11)$$

Рассмотрим далее зазор между плоскими пластинами по схеме на рис. 1 В этом случае

$$\bar{h} = k - (k-1)\bar{x}, \quad k = \frac{h_1}{h_2}. \quad (12)$$

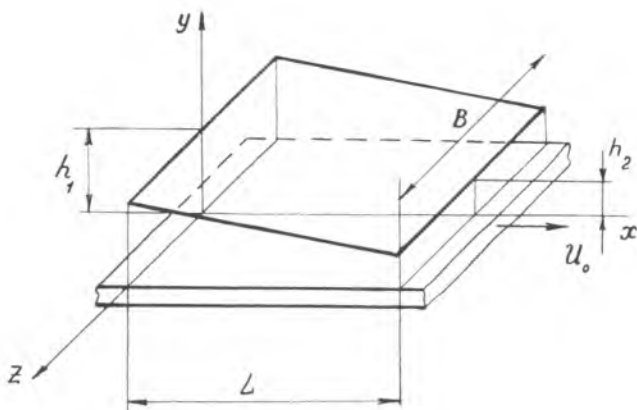


Рис. 1.

Будем искать ρ в виде

$$\rho = \rho_{\infty}(\bar{x}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{z}),$$

где

$$\rho_{\infty}(\bar{x}) = \frac{\mu U_0 L}{h_2^2} \cdot \frac{6}{K^2 - 1} \cdot \frac{(k - \bar{h})(\bar{h} - 1)}{\bar{h}^2}$$

есть решение одномерной задачи (при $\frac{B}{L} \rightarrow \infty$), а $\bar{\varphi}(\bar{z})$ есть функция только \bar{z} . Воспользовавшись методом Л. В. Канторовича [4], получим [5]

$$\bar{\varphi}(\bar{z}) = 1 - \frac{\text{ch } 2\lambda' \bar{z}}{\text{ch } \lambda' L}, \quad \lambda' = \frac{B}{L} \cdot \frac{\psi(k)}{2}, \quad \psi(k) = \sqrt{\frac{2(k^2 - 1)\Phi_1(k)}{1 - k\Phi_2(k)}},$$

$$\Phi_1(K) = 6 \frac{\ln k - 2 \frac{k-1}{k+1}}{(k-1)^2}, \quad \Phi_2(k) = 6 \frac{k^2 - 1 - 2k \ln k}{(k-1)^2 (k^2 - 1)}.$$

Отсюда для функций φ_x и φ_z будем иметь

$$\varphi_x = 6 \frac{\bar{h} - \beta}{\bar{h}} \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \varphi_z = - \frac{6\psi(k)}{k^2 - 1} \cdot \frac{(k - \bar{h})(\bar{h} - 1)}{\text{ch } \lambda' L} \cdot \text{sh } 2\lambda' \bar{z},$$

$$\beta = \frac{2k}{k+1}. \quad (13)$$

Приведенные формулы полностью определяют функции f_1 , f_2 и f_3 . Заметим, что, как ясно из (7) и (13), значение $z_0 = 0$ удовлетворяют уравнению (8).

Хотя уравнение (9) линейное и, следовательно, решается в квадратах, однако соответствующие интегралы не удается записать в конечном виде даже при $\bar{z} = 0$. Поэтому для получения окончательных результатов требуется использование численных методов,

κ	pe	\bar{z}	0,00	0,09	0,19	0,28	0,39
β	10	Δt_m	0,66	0,66	0,65	0,65	0,64
		Δt_k	1,27	1,27	1,26	1,26	1,26
	5	Δt_m	0,61	0,60	0,60	0,59	0,58
		Δt_k	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15
	2	Δt_m	0,48	0,48	0,47	0,46	0,46
		Δt_k	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92
	0,5	Δt_m	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23
		Δt_k	0,51	0,51	0,51	0,50	0,48

которые целесообразно применять непосредственно к исходной системе уравнений (8), и (9).

Численное решение проводилось для квадратных в плане пластин ($\frac{B}{L} = 1$) при различных значениях параметров pe и t_s (использовался метод Эйлера, шаг $\Delta \bar{x} = 0,005$). Калориметрическая температура на входе в слой принималась равной нулю. Некоторые результаты расчетов при $\bar{x} = 1$ приведены в таблице 1, из которой следует, что в рассматриваемых условиях приращение температуры по слою (калориметрической Δt_m и на границе с неподвижной пластиной Δt_k) слабо зависит от \bar{z} . На рис. 2 даны построенные при $\bar{z} = 0$ графики для величины $\tau_m = \frac{(t_m - t_{m1})}{\Delta t_m}$, иллюстрирующие характер изменения температуры t_m по длине слоя. На рис. 2 отчетливо прослеживается зависимость формы кривых $\tau_m(x)$ от числа pe . С уменьшением pe они становятся более «полными» и даже идут выпуклостью вверх (за исключением небольшого участка в конце слоя, который однако, большей частью не имеет практического значения, поскольку вблизи выхода из зазора пленка интенсивно охлаждается маслом, омывающим неподвижную пластину). Функция $\tau_k(x) = \frac{(t_k - t_{k1})}{\Delta t_k}$ имеет аналогичный характер.

Полученные результаты позволяют, в частности, объяснить некоторые экспериментальные факты — имеется в виду выпуклая форма кривых температур по длине слоя, полученных в опытах на подпятниках гидрогенераторов [6]. Затем, что решения температурной задачи, основывающиеся на предположении о постоянстве

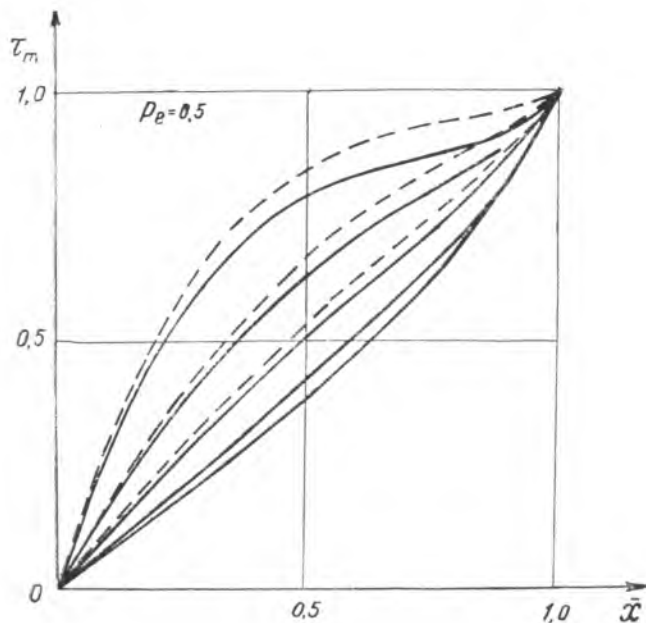


Рис. 2.

температуры по толщине пленки, приводят к кривым, имеющим вогнутую форму. С физической точки зрения отмеченный характер поведения функций $t_m(\bar{x})$ и $t_k(\bar{x})$ объясняется перераспределением тепла по слою посредством подвижной пластины, которая, находясь при постоянной температуре, забирает тепло от более нагретых частей пленки отдаёт его более холодным.

В таблице 2 для одного из вариантов расчетов проводится сравнение с результатами вычислений по приближенным формулам из

Таблица 2

	k	2	3	4	5
q		0,470 0,208	0,320 0,024	0,226	0,165
		0,445 0,199	0,307 0,024	0,227	0,176
i_{m2}		0,540 0,807	0,471 0,676	0,407	0,353
		0,538 0,804	0,478 0,721	0,430	0,393
t_s		0,106 0,417	0,104 0,393	0,099	0,094
		0,100 0,400	0,100 0,400	0,100	0,100

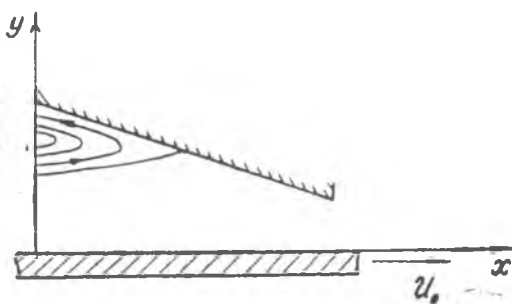


Рис. 3.

[1] и [7] (числитель). Сравнение выполнялось при одном и том же значении безразмерного параметра $\pi_5 = \alpha_5 h_2 / \lambda$, где коэффициент теплоотдачи от подвижной пластины от подвижной пластины в расчетах величины t_s , под считывался по формуле

$$\alpha_s = \frac{1}{LT_s} \int_0^L \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$dx = \frac{2\lambda \bar{Q}}{h_2}, \quad \bar{Q} = \int_0^1 \theta dx$$

Буквой q в таблице 2 обозначена доля тепла, отдаваемого слоем гребню, по отношению к общему количеству тепла, выделяющегося в пленке.

Как видно из таблицы, совпадение между результатами расчетов по разным методам удовлетворительное.

При больших $\kappa = h_1/h_2$ расчет температур в слое связан с определенными трудностями принципиального характера, которые обусловлены тем, что в начальной части слоя вблизи неподвижной пластины образуется рециркуляционная зона (см. рис. 3). Формально математически эти трудности проявляются в том, что в соответствующих точках слоя коэффициент при $\partial T/\partial x$ в уравнении (1) становится отрицательным. Для принятой аппроксимации температур в определенной области значений κ знаменатели в формулах (7) и (11) обращаются при этом в нуль или становятся отрицательными. Аналогичные затруднения характерны и для других методов расчета. Исследование картины тепловых явлений в рециркуляционной зоне представляет собой достаточно сложную задачу, которая требует для своего решения более подробного анализа температурных условий на входе в слой и рассмотрения исходного уравнения баланса тепла в пленке в более полном виде, чем уравнение (1). Вместе с тем для решения вопроса об интегральных тепловых характеристиках слоя целесообразен более грубый подход. Простейшее предложение, которое здесь можно сделать, состоит в том, чтобы в пределах рециркуляционной зоны пренебречь изменением температуры по y и определять ее по величине температуры при подходе из области основного течения. Не останавливаясь на подробностях соответствующих вычислений, заметим только, что для рассмотренных значений параметров расчеты дают результаты, близкие к полученным ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Подольский. Некоторые вопросы теплообмена в упорных подшипниках скольжения. *Машиноведение*, 1966, № 4.
2. М. Е. Подольский. К вопросу о температурном поле смазочного слоя в упорных подшипниках скольжения. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки», изд. «Наука», М., 1970.
3. М. Е. Подольский. К гидродинамике неизотермического смазочного слоя. Изв. АН СССР, *Механика*, 1965, № 2.
4. Л. В. Канторович, В. Н. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
5. М. Е. Подольский. Гидродинамическая теория смазки упорных подшипников скольжения, работающих на нестационарных режимах. Канд. дисс., ЛИВТ, 1962.
6. Н. Л. Летков. Натурные испытания подпятника гидрогенератора Волжской ГЭС им. В. И. Ленина. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки применительно к упорным подшипникам скольжения», изд. АН СССР, М., 1959.
7. М. Е. Подольский. Плоская задача гидродинамической теории смазки подпятника с учетом притягивающих сил в слое. Тр. Ленинградского кораблестроительного института, вып. XVIII, 1970.

А. В. КАМСКИЙ, М. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ПРИ НАЛИЧИИ КАВИТАЦИИ В МАСЛЯНОЙ ПЛЕНКЕ

Рассматривается задача о расчете смазочной пленки с учетом ее возможного обрыва в диффузорной части зазора. Определение границы обрыва слоя обычно проводится по методу последовательных приближений (см., например, [1]), что связано с большими затратами машинного времени. Ниже предлагается безытеративный способ решения задачи, относительно просто реализуемый на ЭВМ.

Вводя безразмерные переменные (μ_0 — характерная вязкость, h_0 — характерная толщина пленки; остальные обозначения см. на рис. 1 и 2)

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{B}, \quad h = \frac{h^*}{h_0}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}, \quad p = \frac{p^* h_0^3}{\mu_0 U L}, \quad (1)$$

и предполагая, что движение подвижной поверхности происходит в направлении положительных значений x , уравнение для определения безразмерного давления можно записать в виде [2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) = f. \quad (2)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{L}{B}, \quad \psi = h^3 \left(S_2 - \frac{S_1^2}{S_0} \right), \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h S_1}{S_0} \right), \quad S_m = \int_0^1 \frac{y^m dy}{\mu(x, y)}. \quad (3)$$