

Обозначив параметры подшипника В32109Б индексом «м», (модельный), а интересующего нас — индексом «н» (натурный), можно записать, что если

$$\frac{P_{\text{ПРН}}}{\delta_{\text{Н}}} = \frac{P_{\text{ПРМ}}}{\delta_{\text{М}}}; \quad (9)$$

$$\frac{q_{\text{Н}}}{V_{\text{Н}}} = \frac{q_{\text{М}}}{V_{\text{М}}}; \quad (10)$$

$$\frac{\mu_{\text{Н}} \cdot V_{\text{Н}} \cdot \delta_{\text{Н}}}{R_{\text{СТН}}^0} = \frac{\mu_{\text{М}} \cdot V_{\text{М}} \cdot \delta_{\text{М}}}{R_{\text{СТМ}}^0}, \quad (11)$$

то справедливо равенство

$$\frac{P_{\text{ГН}}^0}{R_{\text{СТН}}^0} = \frac{P_{\text{ГМ}}^0}{R_{\text{СТМ}}^0}. \quad (12)$$

Для обеспечения равенств (9), (10) и (11) необходимо, чтобы  $\delta_{\text{М}} = 0,429\delta_{\text{Н}}$  и  $\mu_{\text{М}} = 2,329 \mu_{\text{Н}}$ . Подставив значения параметров с индексом «м» в уравнение регрессии (1), можно рассчитать  $P_{\text{ГМ}}^0$  эквивалентного режима, для которого справедливо равенство (12), отсюда можно найти  $P_{\text{ГН}}^0$ .

Применение теории подобия в данном случае позволяет значительно упростить экспериментальные исследования и применять формулу (1) для подобных подшипниковых узлов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер Ю. П. Введение в планирование эксперимента. М., «Металлургия», 1969.
2. Налимов В. В. и др. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М., «Наука», 1965.
3. Алабужев П. М. и др. Теория подобия и размерностей. Моделирование. М., «Высшая школа», 1968.

Н. В. ФРОЛОВ, Б. С. ЦФАС

## ДАВЛЕНИЯ И ТРЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ПАРЕ, РАВНОМЕРНО НАГРУЖЕННОЙ ПО ДЛИНЕ

Строгие решения задачи о давлениях и трении во вращательной цилиндрической паре с малым зазором, нагруженной равномерно по всей длине, осуществляются с помощью теории, разработанной И. Я. Штаерманом [1, 2]. Характеризуются они значительной сложностью и трудоемкостью. В работах [3, 4, 5]

приводятся приближенные, менее точные, но более простые решения.

Однако все такие решения, строгие и приближенные, исходят из неправильной предпосылки, заключающейся в принятии симметричной эпюры нормальных давлений в поперечном сечении работающей пары, одинаковой для неподвижного и вращающегося шипа (рис. 1).

В действительности во время работы вращательной пары эпюра нормальных давлений в ее поперечном сечении несимметрична. Учитывая столь существенное обстоятельство и исходя из простейших допущений, найдем приближенное, несложное, но достаточное по точности для многих практических расчетов, решение задачи о нормальных давлениях и трении в работающей вращательной цилиндрической паре, несущей поперечную нагрузку, равномерно распределенную по длине пары. За исходное для такой неподвижной пары примем простейшее решение [4, 5]), согласно которому радиальная нагрузка вызывает в поперечном сечении пары симметрично распределенные нормальные давления  $\sigma_\varphi$  и нормальные контактные деформации  $\lambda_\varphi$ , распределенные по законам (рис. 1):

$$\sigma_\varphi = \sigma \cdot \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0}; \quad (1)$$

$$\lambda_\varphi = \lambda \cdot \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0}, \quad (2)$$

причем связь между  $\sigma_\varphi$  и  $\lambda_\varphi$  для точки контакта при текущей координате  $\varphi$  выражается по Винклеру,

$$\sigma_\varphi = k_1 \cdot \lambda_\varphi, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  — половина угла контакта пары, шипа и подшипника;

$\sigma$  и  $\lambda$  — максимальные значения  $\sigma_\varphi$  и  $\lambda_\varphi$  при  $\varphi = 0$ ;

$k_1$  — коэффициент жесткости контакта пары, шипа и подшипника, в  $кГ/мм^3$ .

Кроме того, на рис. 1 обозначены:

$R$  — полная радиальная нагрузка в паре,

$r_n$  и  $r_{ш}$  — радиусы элементов пары, отверстия подшипника и рабочей поверхности шипа.

Во время вращения шипа в подшипнике, пусть такое вращение направлено в сторону вращения часовой стрелки, кон-

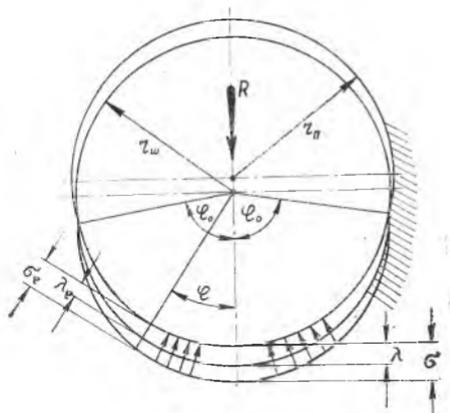


Рис. 1

такт шипа и подшипника можно разделить на два разных по характеру работы участка. На первом из них, входном, контактные деформации в точках поверхности шипа увеличиваются. На втором, выходном, такие деформации убывают. Оба явления носят динамический характер.

Динамичность роста деформаций  $\lambda_\varphi$  на входном участке приводит также к динамическим, увеличенным давлениям  $\sigma_\varphi$  в точках этого участка. Напротив, динамическое уменьшение деформаций  $\lambda_\varphi$  на выходном участке сопровождается запаздыванием восстановления здесь начальной, цилиндрической формы шипа и приводит к понижению давлений  $\sigma_\varphi$ , так учитывая в общих чертах динамическое нагружение и разгрузку материала шипа во время его вращения в подшипнике, можно представить работу вращательной пары.

Основываясь на этом, базирующемся на реальности, представлении, следует для случая вращения шипа признать действительными предыдущие уравнения (1), (2) и (3). Вместо них должны быть приняты новые зависимости, соответствующие такому представлению, например, следующие:

для входного участка

$$\sigma_\varphi = \kappa_1 \cdot \lambda_\varphi + \kappa_2 \left| \frac{d\lambda_\varphi}{dt} \right|; \quad (4)$$

для выходного —

$$\sigma_\varphi = \kappa_1 \cdot \lambda_\varphi - \kappa_3 \left| \frac{d\lambda_\varphi}{dt} \right|, \quad (5)$$

где

$$\frac{d\lambda_\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\lambda_\varphi}{d\varphi} \quad (6)$$

— скорость изменения контактной деформации (когда такая скорость равна нулю, при неподвижном шипе, 4-е и 5-е уравнения трансформируются в предыдущее уравнение (3) Винклера);

$\omega$  — угловая скорость шипа;

$\kappa_2$  — коэффициент динамического роста давлений (напряжений)  $\sigma_\varphi$  на входном участке контакта,  $\kappa \Gamma \cdot \text{сек} / \text{мм}^3$ ;

$\kappa_3$  — коэффициент динамического снижения давлений  $\sigma_\varphi$  на выходном участке,  $\kappa \Gamma \cdot \text{сек} / \text{мм}^3$ .

Как и в работах [4, 5], в первом приближении можно для обоих участков контакта принять за исходное предыдущее выражение (2). Тогда, уравнения (4) и (5) переписутся так:

$$\sigma_\varphi = \lambda \cdot \left( \kappa_1 \cdot \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0} + \kappa_2 \cdot \frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0} \right); \quad (4')$$

$$\sigma_\varphi = \lambda \cdot \left( \kappa_1 \cdot \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0} - \kappa_3 \cdot \frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \sin \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0} \right). \quad (5')$$

При  $\omega = 0$  уравнения (4') и (5') дают одинаковый результат  $\sigma_\varphi = \kappa_1 \cdot \lambda \cdot \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0}$ , соответствующий выражениям (1)÷(3).

При  $\varphi = 0$ , то есть на границе входного и выходного участков, уравнения (4') и (5') тоже дают одинаковый результат  $\sigma_{\varphi=0} = \sigma = \kappa_1 \cdot \lambda$ , соответствующий выражениям (1)÷(3).

Чтобы воспользоваться уравнениями (4') и (5') для определения числовых значений  $\sigma_\varphi$ , в таких уравнениях должны быть известны  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \varphi_0$  и  $\lambda$ . Величины  $k_1, k_2$  и  $k_3$  могут быть установлены в результате соответствующих экспериментов, поэтому далее будем считать их известными. Величины  $\varphi_0$  и  $\lambda$  определим по приближенным зависимостям, установленным в работе [5],

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{R}{l \cdot r_{ш} \cdot \kappa_1 \cdot \delta}} \cdot (1,21 - 0,26 \cdot \sqrt[3]{\frac{R}{l \cdot r_{ш} \cdot \kappa_1 \cdot \delta}}); \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{\sigma}{\kappa_1} = \frac{R}{l \cdot r_{ш} \cdot \kappa_1} \cdot \frac{\pi^2 - 4\varphi_0^2}{4 \cdot \pi \cdot \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0}, \quad (8)$$

где, кроме вышеназванных,  $l$  — длина подшипника,

$$\delta = r_n - r_{ш}. \quad (9)$$

При использовании таких зависимостей для случая вращающегося шипа следует считаться с величиной трения скольжения в паре. Если оно незначительно, то корректив зависимостей (7) и (8) не требуется. Если же оно существенно, то в них вместо  $R$  следует (согласно рис. 2) ввести нормальную реакцию  $N$ , причем  $N = R \cdot \cos \rho$ ,  $\rho$  — приведенный угол трения скольжения в паре,  $\operatorname{tg} \rho = f_{пр}$  — приведенный коэффициент трения скольжения в паре. Однако и при высоких значениях  $f_{пр}$ , например, таких как 0,3,  $\cos \rho$  мало отличается от 1, и можно с достаточной для практических расчетов точностью принимать  $N \cong R$ .

Итак, все величины, входящие в правые части уравнений (4') и (5'), теперь можем считать известными, а сами уравнения разрешимыми относительно  $\sigma_\varphi$ .

Продолжая анализ этих уравнений, найдем:

при  $\varphi = \varphi_0$  по уравнению (4')

$$\sigma_{\varphi_0} = \kappa_2 \cdot \lambda \cdot \frac{\pi\omega}{2\varphi_0}, \quad (10)$$

то есть, в начальной точке входного участка контакта пары нормальное давление равно нулю при  $\omega = 0$  и оно тем выше, чем больше  $\omega$ ;

при  $\varphi = \varphi_0$  по уравнению (5')  $\sigma_\varphi = -\kappa_3 \cdot \lambda \cdot \frac{\pi\omega}{2\varphi_0}$ , то есть требуется устано-

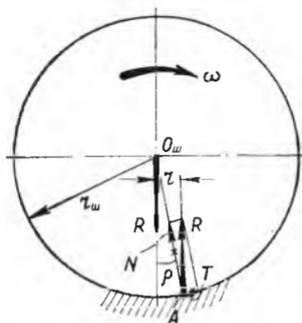


Рис. 2

вить границы значений  $\varphi$ , в которых это уравнение дает реальные результаты.

Для установления таких границ рассмотрим уравнение (5') при  $\varphi = \varphi_2$ , когда  $\sigma_\varphi$  обращается в нуль. Получим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \varphi_2}{2\varphi_0} = \frac{2 \cdot \kappa_1 \cdot \varphi_0}{\pi \cdot \kappa_3 \cdot \omega} \rightarrow \varphi_2 < \varphi_0, \quad (11)$$

откуда следует, что для уравнения (5')  $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$  и что с ростом  $\omega$   $\varphi_2$  убывает.

Продолжая анализ, выясним, имеется ли максимум  $\sigma_\varphi$  на входном участке контакта. Для этого возьмем производную по  $\varphi$  от уравнения (4') и приравняем ее нулю. Получим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \varphi_{1к}}{2\varphi_0} = \frac{\pi \cdot \kappa_2 \cdot \omega}{2 \cdot \kappa_1 \cdot \varphi_0} \rightarrow \varphi_{1к} < \varphi_0, \quad (12)$$

где  $\varphi_{1к}$  — значение  $\varphi$ , при котором на входном участке имеется максимум  $\sigma_\varphi$ , (чем выше  $\omega$ , тем больше  $\varphi_{1к}$ ).

Таким образом, уравнения (4') и (5') отвечают установленному в работе [6] сложному характеру относительного движения шипа в подшипнике при стационарном режиме их работы, то есть качению со скольжением.

Имея теперь приближенную теорию, освещающую распределение нормальных давлений в работающей вращательной цилиндрической паре, и будучи стесненными объемом настоящей статьи, не позволяющим привести в ней подробные численные примеры, ограничимся показом характерного вида эпюры таких давлений (рис. 3), базируясь только на данных одного численного примера из работы [5]. Там имелись или были определены: подшипник с бронзовым вкладышем  $2r_{ш} = 60$  мм,  $\delta = 0,3$  мм,  $R =$

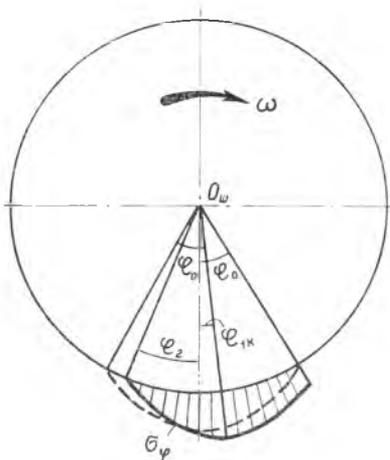


Рис. 3

$= 3840$  кг, шип стальной и шлифованный,  $K_1 = 400$  кг/мм<sup>3</sup>,  $\varphi_0 = 32^\circ$ ,  $\sigma = 2,4$  кг/мм<sup>2</sup>. Теперь определим по формуле (3)  $\lambda = 0,006$  мм. Для продолжения решения необходимо знать числовые значения  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$  и  $\omega$ .

Положим, что  $\omega = 62,8 \frac{1}{\text{сек}}$ ,  $\kappa_2 = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{мм}^3}$ ,  $\kappa_3 = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{мм}^3}$ . Тогда

по формуле (11)  $\varphi_2 = 24^\circ$ , по формуле (10),  $\sigma_{\varphi_0} = 1,1$  кг/мм<sup>2</sup>, по формуле (12)  $\varphi_{1к} = 8^\circ 30'$ , по формуле (4')  $\sigma_{\varphi_{1к}} = 2,6$  кг/мм<sup>2</sup>.

По таким  $\sigma_{\varphi_0}$ ,  $\sigma_{\varphi_{1к}}$  и  $\sigma_{\varphi_2} = 0$  на рис. 3 построена эпюра  $\sigma_\varphi$ .

На этом же рисунке пунктирной линией показана эпюра  $\sigma_\varphi$  для неподвижного шипа, построенная по данным вышеуказанного примера из работы [5].

Сопоставляя вышеприведенные теорию и результаты с работами [1, 2, 3, 4, 5], можно уверенно заключить, что такие теория и результаты гораздо более соответствуют фактической работе вращательной пары.

Получив возможность вычислять по уравнениям (4) и (5) давления  $\sigma_\varphi$  в работающей паре, определим момент сил трения скольжения в ней —  $M_T$ , приведенный угол трения скольжения в паре —  $\rho$ , приведенный коэффициент трения скольжения пары —  $f_{np}$ , радиус круга трения скольжения пары —  $r$ , коэффициент трения качения пары —  $\kappa$ , полный приведенный коэффициент трения пары —  $\varphi_{np}$  и радиус круга трений скольжения и качения пары —  $r_{c-\kappa}$ .

$$M_T = f \cdot r_{ш}^2 \cdot l \cdot \left( \int_0^{\varphi_0} \sigma_\varphi^* \cdot d\varphi + \int_0^{\varphi_2} \sigma_\varphi^{**} \cdot d\varphi \right), \quad (13)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения в текущей точке контакта шипа и подшипника;

$\sigma_\varphi^*$  и  $\sigma_\varphi^{**}$  — давления  $\sigma_\varphi$  соответственно по уравнениям (4') и (5');  $r_{ш}$ ,  $l$ ,  $\varphi_0$  и  $\varphi_2$  — названы выше.

Решив уравнение (13), найдем

$$M_T = f \cdot r_{ш}^2 \cdot l \cdot \lambda \cdot \left\{ \frac{2}{\pi} \cdot \kappa_1 \cdot \varphi_0 \cdot \left( 1 + \sin \frac{\pi \varphi_2}{2 \varphi_0} \right) + \omega \left[ \kappa_2 - \kappa_3 \cdot \left( 1 - \cos \frac{\pi \varphi_2}{2 \varphi_0} \right) \right] \right\}. \quad (13')$$

Рассмотрим уравнение (13') при  $\omega = 0$ . В этом случае  $\varphi_2 = \varphi_0$ ,  $f = f_n$ ,

$$M_T = \frac{4}{\pi} \cdot f_n \cdot r_{ш}^2 \cdot l \cdot \sigma \cdot \varphi_0, \quad (14)$$

где  $f_n$  — коэффициент трения скольжения перед началом относительного движения в паре, тогда как в уравнении (13');

$f$  — кинематический коэффициент трения скольжения в паре при данной скорости скольжения  $V = \omega \cdot r_{ш}$ .

Также можем записать

$$M_T = f_{np} \cdot R \cdot r_{ш}, \quad (15)$$

тогда, определив  $M_T$  из уравнения (13'), найдем

$$f_{np} = \frac{M_T}{R \cdot r_{ш}}, \quad (15')$$

а далее, зная, что  $f_{np} = \operatorname{tg} \rho$ , определим  $\rho$ ,

$$\rho = \operatorname{arctg} f_{np}, \quad (16)$$



$$\psi^3 \cdot \left( B + \frac{\pi^3}{8 \cdot \varphi_0^3} \cdot C \right) + \psi^2 \cdot 3 \cdot D - \psi \cdot 6 \cdot \left( B + \frac{\pi}{2\varphi_0} \cdot C \right) - 6 \cdot D = 0, \quad (18'')$$

где

$$B = \frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \kappa_3 \cdot \left( \frac{1 - \cos a\varphi_2}{a} - \frac{1 - \cos b\varphi_2}{b} \right) + \frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \kappa_2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \sin \varphi_0 - \kappa_1 \cdot \left( \frac{\sin a\varphi_2 + \cos \varphi_0}{a} + \frac{\sin b\varphi_2 + \cos \varphi_0}{b} \right); \quad (19)$$

$$C = -\frac{\pi\omega}{\varphi_0} \cdot \kappa_2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right); \quad (20)$$

$$D = -\frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \kappa_3 \cdot \left( \frac{\sin a\varphi_2}{a} - \frac{\sin b\varphi_2}{b} \right) - \frac{\pi\omega}{2\varphi_0} \cdot \kappa_2 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \cdot \cos \varphi_0 - \kappa_1 \cdot \left( \frac{\cos a\varphi_2 - \sin \varphi_0}{a} + \frac{\cos b\varphi_2 - \sin \varphi_0}{b} \right); \quad (21)$$

$$a = 1 + \frac{\pi}{2\varphi_0} \quad (22); \quad b = 1 - \frac{\pi}{2\varphi_0}. \quad (23)$$

Определив из уравнения (18'') величину  $\psi$ , а из уравнения (16) величину  $\rho$ , можно найти величину  $\kappa$ :

$$\kappa \cong r_{ш} \cdot (\psi - \rho), \quad (24)$$

а затем, согласно работе [6], вычислить  $\varphi_{пр}$ :

$$\varphi_{пр} \cong f_{пр} + \frac{\kappa}{r_{ш}} \quad (25)$$

и определить радиус круга трения скольжения и качения  $r_{с-к}$ :

$$r_{с-к} = \frac{f_{пр} \cdot r_{ш} + \kappa}{\sqrt{1 + f_{пр}^2}}, \quad (26)$$

$$\text{или при } f_{пр} \leq 0,3 \quad r_{с-к} \cong f_{пр} \cdot r_{ш} + \kappa. \quad (26')$$

Продолжив рассмотренный численный пример, получим: по формуле (13') при  $f=0,2$ ,  $l=80$  мм,  $M_r=25850$  кг/мм, по формуле (15')  $f_{пр}=0,224$ , по формуле (16)  $\rho=12^\circ 30'$ , по формуле (18''), применив формулу Кардано,  $\psi=14^\circ$ , по формуле (24)  $\kappa=0,8$  мм, по формуле (25)  $\varphi_{пр}=0,251$ .

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренная теория, являясь приближенной, тем не менее гораздо точнее и полнее отражает работу шипа в подшипнике, чем названные выше работы, посвященные этому вопросу. Будучи применимой для подшипников сухого и полусухого трения, она может оказаться полезной и при решении контактно-гидродинамических задач для подшипников полужидкого трения и с гидродинамическим трением

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости ГТИ, 1949.
2. Ромалис Б. Л. Момент от сил трения во вращательной паре. «Вестник машиностроения», 1957, № 6.

3. Гутьяр Е. М. Распределение давлений между шипом и втулкой при малом зазоре между ними. «Доклады МИИСХП», том 1, вып. 5, 1964

4. Цфас Б. С., Фролов Н. В. Давления цилиндрической штанги на опору при малом зазоре между опорой и штангой. «Известия вузов, Машиностроение», 1965, № 2.

5. Цфас Б. С., Фролов Н. В. Давление и трение в цилиндрической вращательной паре, несущей поперечную равномерно распределенную по длине нагрузку. Сборник научных трудов Куйбышевского филиала ВЗИИТ, вып. 1, 1967.

6. Цфас Б. С. О работе шипа в подшипнике. «Известия вузов. Машиностроение», 1971, № 5.

Д. С. КОДНИР

## НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

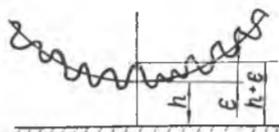
### 1. Соображения о контактной гидродинамике шероховатых поверхностей

До настоящего времени еще не опубликовано ни одного решения контактно-гидродинамической задачи для шероховатых поверхностей. Имеются лишь замечания о важности этого вопроса и решения гидродинамических задач для недеформируемых поверхностей [1, 2]. Приведем статистически-стохастическое рассмотрение влияния шероховатости на контактную гидродинамику по аналогии с работой Кристенсена [1], выполненной ранее для жестких поверхностей.

Будем определять толщину смазочного слоя, как сумму номинальной толщины (соответствующей средней гладкой поверхности) и случайной переменной величины (рис. 1)  $\bar{h}(x) = h(x) + \epsilon$ . Здесь  $\bar{h}(x)$  — суммарная толщина пленки — случайная величина;  $h(x)$  — детерминированная составляющая толщины пленки, ее номинальная величина;  $\epsilon$  — случайная переменная величина — приведенная величина выступа неровностей обеих поверхностей от средней линии.

Предполагается, что  $\bar{h}(x)$  имеет такой вид, при котором допустимо использование уравнения Рейнольдса.

Функцию плотности вероятности высоты шероховатости определим, как Кристенсен и Тондер, с помощью полиномиальной аппроксимации закона Гаусса (рис. 2):



$$f(\epsilon) = \frac{35}{32c_1} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon}{c_1} \right)^2 \right] \text{ при } |\epsilon| \leq c_1.$$

Если же  $|\epsilon| > c_1$ , то  $f(|\epsilon|) = 0$ . Здесь  $c_1$  — половина интервала значения случайной переменной толщины слоя.

Рис. 1. Определение статистической толщины слоя смазки

Для плоской гидродинамической задачи при однородной изотропной шерохо-