

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Е. Подольский. Некоторые вопросы теплообмена в упорных подшипниках скольжения. *Машиноведение*, 1966, № 4.
2. М. Е. Подольский. К вопросу о температурном поле смазочного слоя в упорных подшипниках скольжения. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки», изд. «Наука», М., 1970.
3. М. Е. Подольский. К гидродинамике неизотермического смазочного слоя. Изв. АН СССР, *Механика*, 1965, № 2.
4. Л. В. Канторович, В. Н. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
5. М. Е. Подольский. Гидродинамическая теория смазки упорных подшипников скольжения, работающих на нестационарных режимах. Канд. дисс., ЛИВТ, 1962.
6. Н. Л. Летков. Натурные испытания подпятника гидрогенератора Волжской ГЭС им. В. И. Ленина. В сб. «Развитие гидродинамической теории смазки применительно к упорным подшипникам скольжения», изд. АН СССР, М., 1959.
7. М. Е. Подольский. Плоская задача гидродинамической теории смазки подпятника с учетом притягивающих сил в слое. Тр. Ленинградского кораблестроительного института, вып. XVIII, 1970.

А. В. КАМСКИЙ, М. Е. ПОДОЛЬСКИЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА ПРИ НАЛИЧИИ КАВИТАЦИИ В МАСЛЯНОЙ ПЛЕНКЕ

Рассматривается задача о расчете смазочной пленки с учетом ее возможного обрыва в диффузорной части зазора. Определение границы обрыва слоя обычно проводится по методу последовательных приближений (см., например, [1]), что связано с большими затратами машинного времени. Ниже предлагается безытеративный способ решения задачи, относительно просто реализуемый на ЭВМ.

Вводя безразмерные переменные (μ_0 — характерная вязкость, h_0 — характерная толщина пленки; остальные обозначения см. на рис. 1 и 2)

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{B}, \quad h = \frac{h^*}{h_0}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}, \quad p = \frac{p^* h_0^3}{\mu_0 U L}, \quad (1)$$

и предполагая, что движение подвижной поверхности происходит в направлении положительных значений x , уравнение для определения безразмерного давления можно записать в виде [2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial p}{\partial z} \right) = f. \quad (2)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{L}{B}, \quad \psi = h^3 \left(S_2 - \frac{S_1^2}{S_0} \right), \quad f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h S_1}{S_0} \right), \quad S_m = \int_0^1 \frac{y^m dy}{\mu(x, y)}. \quad (3)$$

В частности, при постоянной вязкости ($\mu = 1$)

$$\psi = \frac{h^3}{12}, \quad f = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3a)$$

Решение уравнения (2) будем искать в области Ω , ограниченной прямыми $x=0, z=0, z=1$ и кривой Γ , которая представляет собой границу несущей части слоя. Γ , очевидно, лежит в прямоугольнике $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ и, в частности, может совпадать с его границей $x=1$. Граничные условия примем в виде

$$p|_{x=0} = p|_{z=0} = p|_{z=1} = p|_{\Gamma} = 0. \quad (4)$$

Для определения Γ служат условия [4]

$$\frac{\partial p}{\partial \Gamma} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что при $p|_{\Gamma} = \text{const}$ достаточно потребовать выполнения лишь первого из условий (5). Действительно, вычисляя производную

$$\frac{\partial p}{\partial \Gamma} = \cos \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial p}{\partial z},$$

получаем, что условие $\frac{\partial p}{\partial \Gamma} \Big|_{\Gamma} = 0$ есть следствие условий $p|_{\Gamma} = \text{const}$ и $\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = 0$ (если только $\alpha \neq 0$).

Рассмотрим сначала плоскую задачу. В этом случае $\lambda = 0$, и уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial p}{\partial x} \right) = f. \quad (6)$$

Введем сетку $x_i = i \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m; \Delta x = \frac{1}{m}$) и построим разностную аппроксимацию уравнения (6):

$$\psi_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) - \psi_{i-1/2} (p_i - p_{i-1}) = f_i \Delta x^2,$$

что можно еще записать так

$$A_i p_{i+1} - B_i p_i + C_i p_{i-1} = -F_i, \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad (7)$$

где

$$A_i = \psi_{i+1/2}, \quad C_i = \psi_{i-1/2}, \quad B_i = A_i + C_i, \quad F_i = -f_i \Delta x^2. \quad (8)$$

Граничные условия (4) применительно к рассматриваемой задаче будут

$$p_0 = p(0) = 0, \quad p_l = p(l \Delta x) = 0, \quad (9)$$

а условие для определения точки обрыва слоя запишется приближенно в виде

$$\frac{p_l - p_{l-1}}{\Delta x} = 0, \quad \text{или} \quad p_{l-1} = p_l.$$

Для решения системы уравнений (7) воспользуемся методом прогонки [3]. Отыскивая p_i в виде

$$p_i = X_{i+1} p_{i+1} + Y_{i+1} \quad (11)$$

из (7) получим рекуррентные соотношения для определения X_i и Y_i .

$$X_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i X_i}, \quad Y_{i+1} = \frac{(C_i Y_i + F_i)}{(B_i - C_i X_i)}. \quad (12)$$

Пользуясь первым из условий (9) и формулой (11), находим

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad (13)$$

после чего, с помощью (10), определяем последовательно все коэффициенты $X_i, Y_i (i > 1)$. Из (10) и (11) получаем, что если узел $i = l - 1$ соответствует точке обрыва слоя, то

$$p_l = p_{l-1} \frac{Y_l}{(1 - X_l)}.$$

Второе из условий (9) показывает, что в этом случае должно быть $\gamma_l = 0$.

Заметим, что величина λ_i может обратиться в нуль или стать отрицательной только в диффузорной части слоя. Это следует из таких соображений. Коэффициенты A_i, B_i и C_i положительны. Кроме того, $B_i - C_i X_i > 0$ [3]. Поэтому, как ясно из (13) и (12), все $Y_{i+1} > 0$, если $F_i > 0$. Предполагая вязкость постоянной и принимая во внимание (3а) и формулу из (8) для F_i , убеждаемся, что $F_i > 0$, если $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ (конфузор) и $F_i < 0$ при $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ (диффузор), т. е. неравенство $C_i Y_i + F_i \leq 0$, действительно возможно, лишь если $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что зазор имеет не более одной конфузорной области. В этом случае, обозначив через i^* то значение i , при котором функция $F_i = F_{i^*} < 0$, получаем, что при всех $i > i^*$ будет $F_i < 0$. Поэтому, в частности, если $Y_l \leq 0$, то, как ясно из формулы (12) для Y_{i+1} , при $i > l$ все $Y_i < 0$.

Теперь алгоритм расчета давлений в слое можно представить в следующем виде. Сначала, по формулам (10) с учетом (13) вычисляются коэффициенты X_i и Y_i с одновременным контролем знака Y_i . Вычисления продолжаются вплоть до узла $i = l$, где величина Y_i первый раз становится отрицательной (или равной нулю). Если окажется, что при всех $i < m$ коэффициенты $Y_i > 0$, то вычисления заканчиваются в точке $i = l = m$. Затем, полагая, в соответствии с условием (9), во всех случаях $p_l = p_m = 0$, по формулам (11) ведем счет в обратном направлении, определяя последовательно p_{l-1}, p_{l-2}, \dots .

Помимо рассмотренного сейчас способа, можно также, вне зависимости от существования кавитационной зоны, находить прогнозные коэффициенты X_i и Y_i для всего промежутка значений $1 \leq i \leq m$. В этом случае для определения точки обрыва слоя нужно осуществить последовательный перебор значений Y_i (начиная с Y_m) до тех пор, пока не будет $Y_i = Y_{l-2} > 0$. Практически это удобнее сделать, вычисляя давление p_i по формуле (11) (первым подсчитывается $p_{m-1} = X_m p_m + Y_m = Y_m$) и полагая $p_i = 0$, если по результатам расчетов окажется $p_i < 0$. Узел $i = l - 1$, в котором в последний раз

величина $p_i = 0$, принимается приближенно за точку обрыва слоя. Очевидно, что расчеты, выполняемые по указанной сейчас схеме, вполне аналогичны описанным выше.

Заметим, что предлагаемый алгоритм позволяет выполнить весь расчет слоя, включая определение точки обрыва, за одно приближение и не приводит к ощутимому увеличению объема вычислительной работы по сравнению с «безотрывным» случаем фиксированной границы.

Перейдем теперь к слою конечных размеров. Образую сетку $x_i = i \cdot \Delta x$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$; $\Delta x = \frac{1}{m}$), $z_k = k \cdot \Delta z$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$; $\Delta z = \frac{1}{n}$) и аппроксимируя дифференциальное уравнение (2) системой разностных уравнений, подобно системе (7) получим

$$a_{i+1,k} p_{i+1,k} - (-b_{i,k} p_{i,k-1} + d_{i,k} p_{i,k} - b_{i,k+1} p_{i,k+1}) + a_{i,k} p_{i-1,k} = -F_{i,k}. \quad (14)$$

Здесь

$$a_{i,k} = \psi_{i-1/2,k}, \quad b_{i,k-1/2} = \frac{\lambda^2 \cdot \Delta x^2}{\Delta z^2} \psi_{i,k-1/2},$$

$$d_{i,k} = a_{i+1,k} + a_{i,k} + b_{i,k+1} + b_{i,k}, \quad F_{i,k} = -f_{i,k} \cdot \Delta x^2.$$

Систему [14] с учетом условий (см. (4)) $P|_{z=0} = P_{i,0} = 0$ и $P|_{z=1} = p_{i,n} = 0$ запишем в матричной форме в следующем виде

$$A_i \vec{p}_{i+1} - B_i \vec{p}_i + C_i \vec{p}_{i-1} = -\vec{F}_i. \quad (15)$$

Здесь A_i, B_i, C_i — квадратные матрицы порядка $n-1$; \vec{p}_i, \vec{F}_i — векторы (матрицы-столбцы). Они определяются формулами

$$A_i = \begin{vmatrix} a_{i+1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i+1,2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i+1,n-1} \end{vmatrix}, \quad C_i = A_{i-1},$$

$$B_i = \begin{vmatrix} d_{i,1} - b_{i,2} & 0 & \dots & 0 \\ -b_{i,2} & d_{i,2} - b_{i,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{i,n-1} \end{vmatrix}, \quad \vec{p}_i = \begin{vmatrix} p_{i,1} \\ p_{i,2} \\ \vdots \\ p_{i,n-1} \end{vmatrix}, \quad \vec{F}_i = \begin{vmatrix} F_{i,1} \\ F_{i,2} \\ \vdots \\ F_{i,n-1} \end{vmatrix}.$$

Систему уравнений (16) будем решать методом матричной прогонки [3]. По аналогии с (11) ищем вектор \vec{p}_i в виде

$$\vec{p}_i = X_{i+1} \vec{p}_{i+1} + \vec{Y}_{i+1} \quad (16)$$

где матрицы X_i и векторы \vec{Y}_i находятся по рекуррентным формулам

$$X_{i+1} = (B_i - C_i X_i)^{-1} A_i, \quad \vec{Y}_{i+1} = (B_i - C_i X_i)^{-1} (C_i \vec{Y}_i + F_i) \quad (17)$$

Начальные данные для расчетов по формулам (17), как и выше, находятся с помощью первого из граничных условий (4):

$$X_1 = 0, \vec{Y}_1 = 0$$

Определяя матрицы X_i и векторы \vec{Y}_i для всех $1 < i \leq m$, получаем возможность по формулам (16) найти векторы \vec{p}_i . Порядок расчетов аналогичен здесь рассмотренному выше одномерному случаю. Сначала определяется вектор \vec{p}_{m-1} . Если какой-либо из элементов вектора \vec{p}_{m-1} отрицателен, то соответствующее значение $p_{m-1, k}$ принимается равным нулю. Найденный таким образом вектор \vec{p}_{m-1} используется для определения вектора \vec{p}_{m-2} и т. д. Граница несущей части слоя, как и выше, определяется теми узлами, в которых значения $p_{i, k}$ последний раз обращаются в нуль.

После того как поле давлений определено, находятся интегральные характеристики слоя.

Гидродинамическая реакция

$$P = \frac{\mu_0 UL^2 B}{h_{\min}^2} \Phi_p, \quad \Phi_p = \frac{h_{\min}^2}{h_0^2} \int_{\Omega} p dx dz.$$

Координаты центра давления

$$x_c^* = x_c L, \quad x_c = \frac{\int_{\Omega} x p dx dz}{\int_{\Omega} p dx dz}, \quad z_c^* = z_c B, \quad z_c = \frac{\int_{\Omega} z p dx dz}{\int_{\Omega} p dx dz}.$$

Расход смазки на входе в слой

$$C_1 = BU h_{\min} g_1, \quad g_1 = \frac{h_0}{h_{\min}} \int_0^1 \left(\frac{h}{2} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} dz.$$

Расход смазки на выходе из слоя

$$G_2 = BU h_{\min} g_2, \quad g_2 = \frac{h_0}{h_{\min}} \int_0^1 \left(\frac{h}{2} - \frac{h^3}{12} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} dz$$

или

$$g_2 = \frac{h_0}{h_{\min}} \int_0^1 \frac{h}{2} \Big|_{x=x_1} dz.$$

Расход смазки в виде боковых утечек, соответственно на границах $z=0$ и $z=1$

$$G_3 = BU h_{\min} g_3, \quad G_4 = BU h_{\min} g_4,$$

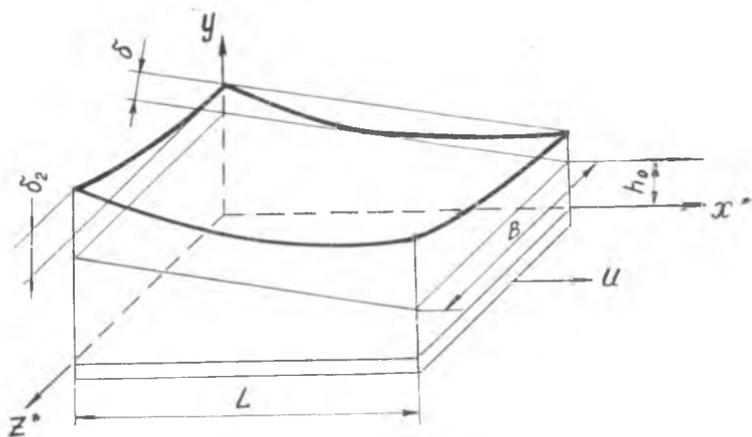


Рис. 1.

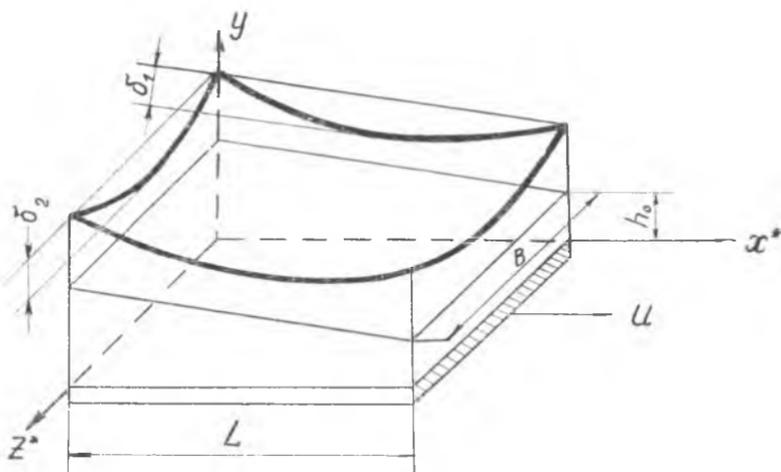


Рис. 2.

$$g_3 = \frac{h_0}{h_{\min}} \int_0^1 \frac{h^3}{12} \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} dx, \quad g_4 = \frac{h_0}{h_{\min}} \int_0^1 \frac{h^3}{12} \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=1} dx.$$

Рассмотренный алгоритм реализован в виде программы на языке АЛГОЛ-60 применительно к транслятору ТА-1М для машины типа М-20. Обращение матриц осуществлялось при помощи стандартной программы по методу Жордана с выбором главного элемента.

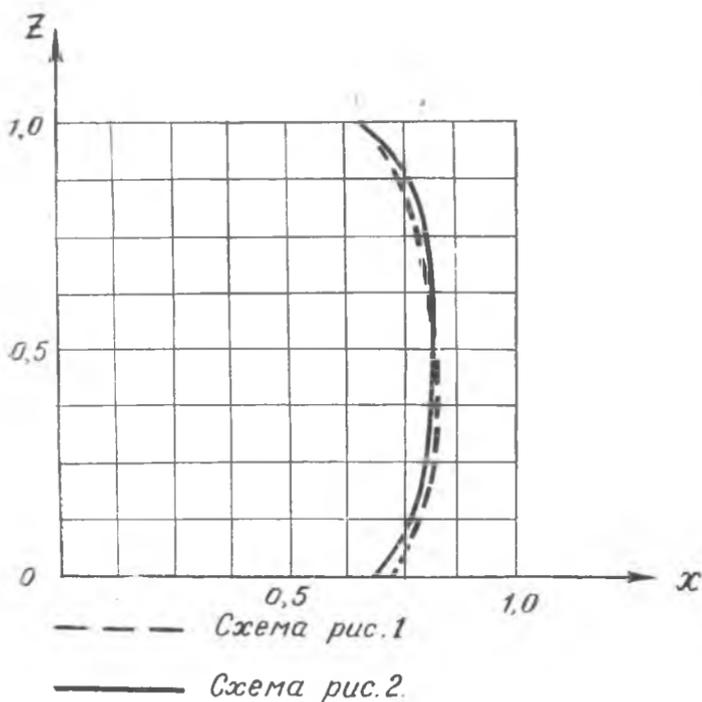


Рис. 3.

В качестве примера для случая $\mu=1$ было рассмотрено движение смазки в зазоре по схеме на рис. 1 с законом изменения толщины слоя

$$h = 1 + (K - 1)(1 - x) + \frac{\delta_1}{h_0}(1 - 2x)^2 + \frac{\delta_2}{h_0}z^2$$

и по схеме на рис. 2 с законом изменения толщины слоя

$$h = 1 + (K - 1)(1 - x) + \frac{\delta_1}{h_0}(1 - 2x)^2 + \frac{\delta_2}{h_0}(1 - 2z)^2.$$

Параметр k принимался равным 2, параметр $\lambda=1$. Результаты вычислений представлены в таблице 1. Границы зоны отрыва показаны на рис. 3. Число узлов сетки применительно к задаче по рис. 1 было $m=40$, $n=10$, для схемы по рис. 2 $m=32$, $n=16$ (с учетом симметрии задачи).

В таблице 1 приведены кроме того данные для хорошо исследованного случая недеформированных поверхностей трения $\delta_1=0$, $\delta_2=0$ ($m=40$, $n=10$). Для сравнения в таблицу 1 помещены также данные из работ [5] и [6] (знаменатель).

$\frac{S_1}{h_0}$	$\frac{\delta_2}{h_0}$	Φ_p	x_c	z_c	$2g_1$	$2g_2$	$2g_3$	$2g_4$	Примечания
0	0	0,0691	0,582	0,500	1,692	1,182	0,246	0,246	Недеформированные поверхности трения
0	0	0,0689	0,582	0,500	1,694	—	0,246	0,246	То же по данным [5]
1	0	0,0569	0,377	0,500	1,427	1,079	0,164	0,164	Схема по рис. 2
1	0	0,06	0,4	0,5	—	—	—	—	То же по данным [6]
1	1	0,0371	0,370	0,444	1,690	1,290	0,148	0,198	Схема по рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Полтавский Ю. Д., Квитницкий Е. И., Герасимова Г. М., Беляева М. А. Определение границы протяженности несущего масляного слоя опорных подшипников скольжения. *Машиноведение*, № 3, 1970.

2. Регирер С. А. Об учете зависимости вязкости от температуры в гидродинамической теории смазки. *Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение*, № 2, 1959.

3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем, «Наука», М., 1971.

4. Jakobsson B., Floberg L. The Finite Journal Bearing, Considering Vaporisation, *Trans. of Chalmers University of Technology*, № 190, 1957, Gothenburg, Sweden.

5. Jakobsson B., Floberg L. The Rectangular Plane Pad Bearing, *Trans. of Chalmers University of Technology*, № 203, 1958, Gothenburg, Sweden.

6. Raimondi A. A. The Influence of Longitudinal and Transverse Profile, on the Load Capacity of Pivoted Pad Bearing, *Trans. ASLE*, Vol. 3, № 2.

К. И. ЗАБЛОНСКИЙ, С. И. ФИЛИПОВИЧ, Ю. А. КОТОВ, М. М. МУХА

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ НА УЧАСТКАХ КОНТАКТНЫХ ЛИНИЙ В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Работоспособность зубчатых передач существенно зависит от состояния смазочного слоя между зубьями, так как разрушение этого слоя обычно приводит к усиленному износу или заеданию рабочих поверхностей. Ввиду неодинаковых условий для образования масляного слоя вдоль контактных линий целесообразно исследовать его несущую способность на характерных участках. Вид трения на участках зависит от высоты микронеровностей поверхностей, толщины масляного слоя и его несущей способности. Можно полагать, что жидкостное трение имеет место при толщине слоя h , большем средней высоты неровностей сопряженных поверхностей [8]

$$h > \frac{R_{z1} + R_{z2}}{2} \quad (1)$$