

**А. П. ПОПОВ**

## **РАСЧЕТ НА ИЗЛОМНУЮ ПРОЧНОСТЬ БОЧКООБРАЗНЫХ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ МУФТ**

Существующая практика выбора размеров зубчатых соединений с бочкообразными зубьями, работающих при перекошенных осях сопряженных полумуфт, по контактными напряжениям не отражает физики явлений, так как разрушение зубьев вследствие контактной усталости наблюдается сравнительно редко. Основные причины выхода из строя зубчатых муфт, как следует из [4; 7], — износы рабочих поверхностей и усталостные явления, обусловленные пульсирующим характером нагружения перекошенных зубьев.

Одна из первых попыток теоретического подхода к оценке влияния смазки на износостойкость и работоспособность зубчатых муфт рассмотрена в работе [6], где установлена зависимость толщины масляного слоя между зубьями от нагрузки, размеров муфт и характеристик масла. Полученные при этом зависимости позволяют проектировать муфты, зубья которых работают в режимах полу- или жидкостного трения. Данные по расчетам на усталость зубьев зубчатых муфт являются приближенными и не учитывают характера нагрузки и ее действительного распределения между зубьями.

В работе [1] для пластины трапецидального сечения, которое условно заменяет сечение зуба, при профильном угле  $\alpha \leq 30^\circ$  для отыскания напряжений в опасной точке используется выражение изгибающего момента, полученное для прямоугольной пластины постоянной толщины под действием сосредоточенной нагрузки [10]. Поскольку зависимости для определения изгибающих моментов и прогибов получены в форме несобственных интегралов [10], которые не выражаются в элементарных функциях, то для их вычисления необходимо численное интегрирование, что очень затруднительно. По этой причине автор [10] вынужден был обратиться к замене несобственных интегралов криволинейными для получения рядов их разложения, рассматриваемых в форме вычетов, как разности соответствующих подинтегральных выражений. Однако и при этом использование полученных решений оказалось настолько громоздким и сложным, что авторы [1] при определении

максимальных напряжений в точке галтели зуба, находящейся на некотором расстоянии от заделки [2], в выражение для максимального изгибающего момента, полученное в [10] в численном виде, вынуждены были вводить некоторую поправку.

Учитывая необходимость в отыскании изгибающих моментов и прогибов в любой точке пластины не только под действием сосредоточенной, но и распределенной по линии нагрузки, рассмотрим решение данной задачи. Как следует из [10] и проведенных нами теоретических исследований величина изгибающего момента в точке, отстоящей от нагрузки на расстоянии, примерно, трех вылетов пластины, практически, равна нулю. Поэтому данное решение распространяется на пластины, у которых расстояние от торца до нагрузки  $\geq 3b$ , где  $b$  — вылет пластины. Определение изгибающих моментов и прогибов в пластинах длиной  $l < 3b$  при симметрично действующей или смещенной к торцам нагрузке возможно с использованием метода отображаемых моментов [9].

Итак, рассмотрим пластину в виде конечной полосы шириной  $b$  и толщиной  $t_0$ , которая защемлена вдоль одной из своих параллельных сторон (другая сторона является свободной). Пластина подвержена воздействию сосредоточенной  $P$  или распределенной по линии нагрузки  $q_0 = \frac{P}{2b_0}$ , приложенной произвольно относительно линии защемления (рис. 1, а). Разделим пластину на две области плоскостью, параллельной стороне защемления, и проходящей по линии действия нагрузки. Значения функций в этих областях обозначим индексами 1 и 2.

Запишем уравнения, выражающие граничные условия пластины:

$$y = 0; \quad W_1 = 0; \quad W_{1(y)} = \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$y = b \left\{ \begin{array}{l} M_{2y} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = 0; \quad (2) \\ Q_{2y} = 0 \text{ или } \frac{\partial^3 W_2}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad (3) \end{array} \right.$$

$$W_1 = W_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}; \quad (5)$$

$$y = c \left\{ \begin{array}{l} M_{2y} = M_{1y} \text{ или} \\ \frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2}; \quad (6) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{2y} = Q_{1y} - Q \text{ или} \\ \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W_2}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 W_1}{\partial y^3} = \frac{Q(x)}{D}; \quad (7) \end{array} \right.$$

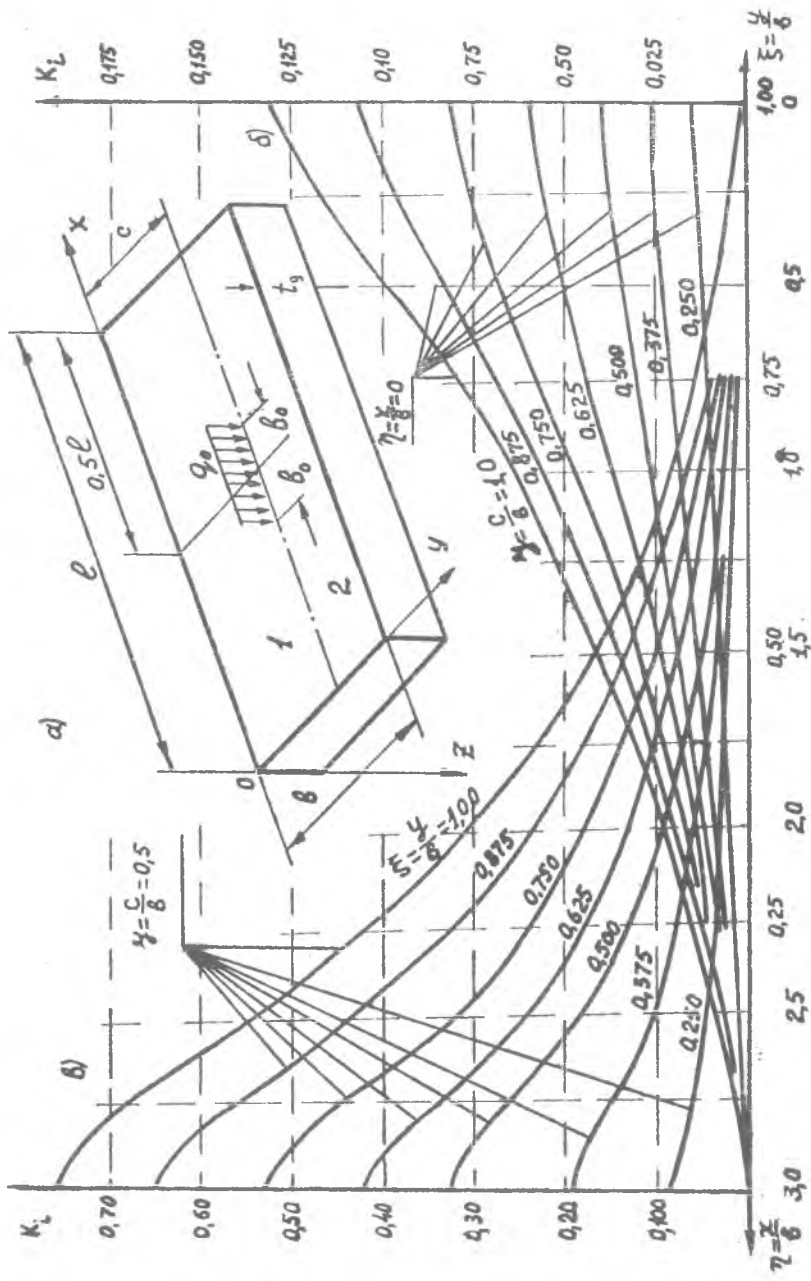


Рис. 1. Расчетная схема плиты (а) и кривые прогибов (б, в).

где  $Q_{1y}$ ,  $Q_{2y}$  — перерезывающие силы;  $W_1$ ,  $W_2$  — прогибы в первой и второй областях пластины;  $M_{1y}$ ,  $M_{2y}$  — изгибающие моменты;  $Q(x)$  — функция изменения нагрузки по оси  $ox$ ;  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластины;  $E$  — модуль упругости материала;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Выражение для прогибов пластины будем искать в виде суммы тригонометрических рядов

$$W_{1,2} = \sum_{n=1}^{\infty} y_{n1,2} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$y_{n1,2} = A_{n1,2} \operatorname{ch} ky + B_{n1,2} ky \operatorname{sh} ky + C_{n1,2} \operatorname{sh} ky + D_{n1,2} ky \operatorname{ch} ky; \quad (8)$$

$$\frac{\pi n}{l} = k; \quad n = 1; 3; 5; \dots; \infty;$$

$A_{n1,2}$ ,  $B_{n1,2}$ ,  $C_{n1,2}$ ,  $D_{n1,2}$  — коэффициенты уравнений. После подстановки в (8) граничных условий, соответствующих  $y = 0$ , найдем  $A_{n1} = 0$ , а  $C_{n1} = -D_{n1}$ . Тогда окончательные выражения для  $y_{n1}$  и  $y_{n2}$  примут вид

$$y_{n1} = B_{n1} ky \operatorname{sh} ky + C_{n1} (\operatorname{sh} ky - ky \operatorname{sh} ky); \quad (9)$$

$$y_{n2} = A_{n2} \operatorname{ch} ky + B_{n2} ky \operatorname{sh} ky + C_{n2} \operatorname{sh} ky + D_{n2} ky \operatorname{ch} ky. \quad (10)$$

Взяв производные по  $x$  и  $y$  выражений (9) и (10) и подставив их в (2) — (7), получим зависимости для граничных условий пластины при  $y=c$  и  $y=b$  в следующем виде

$$(1-\nu) A_{n2} \operatorname{ch} \varphi + B_{n2} [(1-\nu) \varphi \operatorname{sh} \varphi + 2 \operatorname{ch} \varphi] + C_{n2} (1-\nu) \times \\ \times \operatorname{sh} \varphi + D_{n2} [(1-\nu) \varphi \operatorname{ch} \varphi + 2 \operatorname{sh} \varphi] = 0. \quad (11)$$

$$A_{n2} (\nu - 1) \operatorname{sh} \varphi + B_{n2} [(1+\nu) \operatorname{sh} \varphi - (1-\nu) \beta \operatorname{ch} \varphi] + \\ + C_{n2} (\nu - 1) \operatorname{ch} \varphi + D_{n2} [(1+\nu) \operatorname{ch} \varphi - (1-\nu) \varphi \operatorname{sh} \varphi] = 0; \quad (12)$$

$$(B_{n2} - B_{n1}) \beta \operatorname{sh} \beta + (C_{n2} - C_{n1}) \operatorname{sh} \beta + A_{n2} \operatorname{ch} \beta + \\ + (D_{n2} + C_{n1}) \beta \operatorname{ch} \beta = 0; \quad (13)$$

$$A_{n2} \operatorname{sh} \beta + (B_{n2} - B_{n1}) (\operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta) + (C_{n2} - C_{n1}) \operatorname{ch} \beta + \\ + (D_{n2} + C_{n1}) (\operatorname{ch} \beta + \beta \operatorname{sh} \beta) = 0; \quad (14)$$

$$A_{n2} (1-\nu) \operatorname{ch} \beta + (B_{n2} - B_{n1}) [2 \operatorname{ch} \beta + (1-\nu) \beta \operatorname{sh} \beta] + \\ + (C_{n2} - C_{n1}) (1-\nu) \operatorname{sh} \beta + (D_{n2} + C_{n1}) [2 \operatorname{sh} \beta + (1-\nu) \beta \operatorname{ch} \beta] = 0, \quad (15)$$

где  $\varphi = kb$ ;  $\beta = kc$ ;  $c$  — расстояние от линии защемления пластины до нагрузки.

Характер изменения нагрузки по оси  $ox$  запишем в виде

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin kx,$$

где  $b_n$  — некоторая постоянная, зависящая от характера нагрузки размеров пластины и определяемая из выражения [8]

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0,5l-b_0}^{0,5l+b_0} q_0 \sin kx dx = \frac{4q_0 \sin \frac{\pi n}{2}}{kl} \sin kb_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{4q_0}{kl} \sin kb_0.$$

При  $2b_0 \rightarrow 0$  получим зависимость для  $b_n$  при действии сосредоточенной нагрузки

$$b_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2P}{l}.$$

Обозначим правую часть (7), перенеся из левой  $k_3$  в знаменатель, через

$$G_0 = \frac{Q(x=0,5l)}{k^3 D} = \frac{b_n}{k^3 D}.$$

Тогда в окончательном виде уравнение (7) запишется следующим образом

$$(B_{n2} - B_{n1}) \operatorname{sh} \beta + (D_{n2} + C_{n1}) \operatorname{ch} \beta = 0,5G_0. \quad (16)$$

Решив систему шести уравнений (11) — (16) с шестью неизвестными, сведем рассмотрение задачи к выражениям для коэффициентов

$$A_{n1} = 0; A_{n2} = 0,5G_0(\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta); B_{n2} - B_{n1} = -0,5G_0 \operatorname{sh} \beta;$$

$$C_{n1} = -D_{n1}; C_{n2} = C_{n1} + 0,5G_0(\beta \operatorname{sh} \beta - \operatorname{ch} \beta);$$

$$D_{n2} = -C_{n1} + 0,5G_0 \operatorname{sh} \beta \quad B_{n2} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad D_{n2} = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$\Delta = (1 + \nu)^2 \operatorname{sh}^2 \varphi - (1 - \nu)^2 \varphi^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \varphi;$$

$$\Delta_1 = 0,5G_0(1 - \nu)(A\beta \operatorname{sh} \beta - BC);$$

$$A = (3 + \nu) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \varphi + (1 - \nu) \varphi; \quad B = \beta \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta;$$

$$C = 2 \operatorname{ch}^2 \varphi + (1 + \nu) \operatorname{sh}^2 \varphi;$$

$$\Delta_2 = 0,5G_0(1 - \nu)(AB - C\beta \operatorname{sh} \beta).$$

Изгибающие моменты

$$M_{1,2y} = -D \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 W_{1,2}(x,y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_{1,2}(x,y)}{\partial x^2} \right). \quad (17)$$

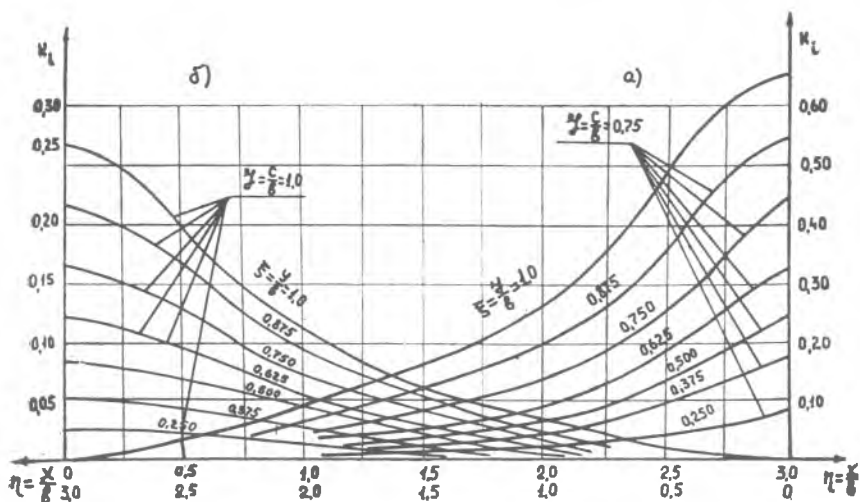


Рис. 2. Кривые прогибов

Зависимости для изгибающих моментов в указанных областях пластины

$$M_{1y} = -k^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \{ B_{n1} [2 \operatorname{ch} ky + (1 - \nu) ky \operatorname{sh} ky] - 2C_{n1} \operatorname{sh} ky \} \sin kx; \quad (18)$$

$$M_{2y} = -k^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \{ (1 - \nu)(A_{n2} \operatorname{ch} ky + C_{n2} \operatorname{sh} ky) + B_{n2} [2 \operatorname{ch} ky + (1 - \nu) ky \operatorname{sh} ky] + D_{n2} [2 \operatorname{sh} ky + (1 - \nu) ky \operatorname{ch} ky] \} \sin kx. \quad (19)$$

Подставив в (18) значение  $y=0$ , получим выражение для момента в заделке пластины

$$M_{1y} = M_{\max} = -2k^2 D \sum_{n=1}^{\infty} B_{n1} \sin kx. \quad (20)$$

На данную задачу была составлена программа решения на ЭЦВМ. При значениях  $n=1; 3; 5; \dots; 13$  сходимость рядов оказалась достаточной при определении прогибов и изгибающих моментов. На рис. 1—2 показаны кривые прогибов в разных точках пластины при различном положении сосредоточенной нагрузки, которые могут быть найдены из выражения

$$W = k_i \frac{Ph^2}{\pi D}, \quad (21)$$

где  $k_i$  — коэффициент прогиба пластины в  $i$ -ой точке при  $\nu = 0,3$ .

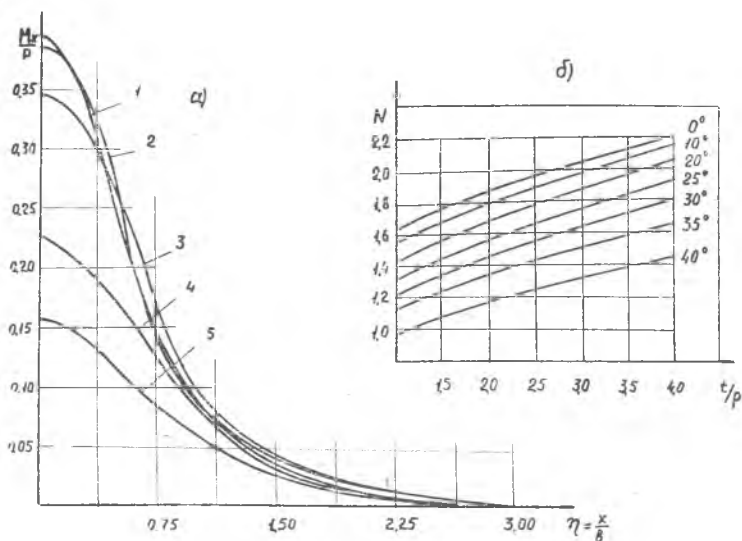


Рис. 3. Кривые изгибающих моментов (а) и концентрации напряжений в галтелях зубьев (б)

Аналогично могут быть получены прогибы при действии распределенных по линии или по площади\* нагрузок.

На рис. 3, а нанесены кривые изгибающих моментов. Кривая 2 для  $\frac{M_x}{P}$ , практически, совпала с кривой 1, построенной по данным [10], при  $y=0$   $c/b=0,588$ . Кривые 3, 4, 5 для  $\frac{M_x}{Q_0}$  построены соответственно при  $y=0$ ;  $0,155 b$ ;  $0,310 b$  и  $\frac{2b_0}{l}=0,15$ ;  $\frac{c}{b}=0,588$ .

Как видно из рис. 3, а (кривая 3) нагрузка, распределенная на длине  $0,15 l$ , примерно на 12% снижает максимальное значение изгибающего момента по сравнению с сосредоточенной нагрузкой (кривая 2).

Анализ полученных зависимостей показал, что различия между изгибающими моментами и прогибами в пластине, которая условно заменяет зуб, при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной на расстоянии  $C_0+0,5b_p$  от заделки, или распределенной по рабочей высоте зуба  $q=\frac{P}{b_p}$ , не превышают

\* При определении прогибов и изгибающих моментов от нагрузки, действующей на площади, необходимо ее представить в виде нескольких нагрузок, распределенных по линиям, и просуммировать составляющие прогибов и изгибающих моментов, найденные по приведенным формулам для каждой полоски.

2—3%, где  $b_p$  — рабочая высота зуба;  $C_0$  — величина радиального зазора между зубьями муфт. С другой стороны, распределенная по площади пятна контакта средняя нагрузка  $P_{cp} = \frac{P}{2b_0 b_p}$ , практически, при определении изгибающих моментов и прогибов может быть заменена нагрузкой, распределенной по линии  $q_0 = \frac{P}{2b_0}$  и находящейся от заделки также на расстоянии  $C_0 + 0,5b_p$ .

Таким образом, при определении прогибов и изгибающих моментов в бочкообразных зубьях нагрузку следует считать приложенной в середине рабочей высоты зуба и распределенной по линии, длина которой определяется из выражения [5]

$$2b_0 = 3,19 \sqrt{\frac{(1-\nu^2) R}{E b_p} P},$$

где  $R$  — радиус бочкообразности.

Под сосредоточенной силой  $P$  в приведенных выражениях применительно к зубчатым муфтам следует понимать максимальную нагрузку, действующую на наиболее перекошенную сопряженную пару зубьев.

В работе [7] получен закон распределения нагрузки между перекошенными бочкообразными зубьями, который с достаточной точностью подтвердится экспериментальной проверкой.

Для определения местных напряжений изгиба в опасной точке галтели зуба воспользуемся зависимостью [2], вводя в нее поправку  $(1-\nu^2)$ , которая учитывает сложноподвиженное состояние нагруженных зубьев

$$\sigma_{из} = \frac{\kappa_M M_{из}}{(1-\nu^2) t^2} N, \quad (22)$$

где  $\kappa_M$  — коэффициент изгибающего момента, учитывающий конечные размеры пластины и смещение нагрузки к торцу; определяется методом отображаемых моментов;

$M_{из}$  — изгибающий момент в точке действия опасных напряжений, определяемый по формуле (18);

$N$  — коэффициент концентраций напряжений в галтели зуба, определяемый по кривым (рис. 3, б) при известном значении угла  $\alpha_1$ , заключенного между касательной к галтели в точке нахождения напряжений и осью симметрии сечения зуба [2];

$t$  — полутолщина зуба в опасном сечении.

Коэффициент запаса по пределу выносливости материала зубьев, учитывая пульсирующий характер их нагружения, находится из выражения [3; 5].

$$K_v = \frac{\sigma_0}{\sigma_{из} (k_B)_0}, \quad (23)$$

где  $\sigma_0$  — предел выносливости круглого лабораторного образца при



пульсирующем нагружении;  $\sigma_{и}$  — максимальные напряжения изгиба;  $(K_{в})_o$  — коэффициент выносливости, характеризующий чувствительность материала к виду нагружения зубьев и их поверхностному упрочнению. На основании данных [3; 5] и многочисленных экспериментов по зубчатым передачам рекомендуется при  $20^\circ$  зацеплении для термоулучшенных зубьев  $(K_{в})_o=1,7$ , для азотированных —  $(K_{в})_o=1,5$  и для цементированных —  $(K_{в})_o=1,25$ . При наличии у зубьев специальной подвнутренней выкружки принимать для термоулучшенных зубьев  $(K_{в})_o=1,45$ , для азотированных —  $(K_{в})_o=1,25$  и для цементированных —  $(K_{в})_o=0,95$ . В качестве допустимого коэффициента запаса по пределу выносливости по данным работоспособности зубчатых муфт необходимо принимать.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Заблонский К. И., Цецорин Н. А.* Исследование напряженного состояния и расчет на изломную прочность зубьев выпукло-вогнутого круговинтового зацепления. Киев, 1963.
2. *Верховский А. В.* Гипотеза ломаных сечений и ее применение к расчету стержней сложной конфигурации. «Изв. Томского политехн. ин-та», 1947, т. 61.
3. *Кудрявцев В. Н.* Упрощенные расчеты зубчатых передач. Изд. «Машиностроение», Л., 1967.
4. *Макридин И. П., Хохлов О. А.* Исследование зубчатых муфт. «Исследование узлов и деталей ПТМ». Труды ВНИИПТМаш, 1961, вып. 4 (15).
5. *Петрусевич А. И.* Детали машин. Под ред. Ачеркана Н. С. Машгиз, М., 1953.
6. *Попов А. П.* К вопросу определения толщины масляного слоя в зубчатых муфтах с бочкообразными зубьями. Сб. трудов КуАИ «Применение контактно-гидродинамической теории смазки к исследованию деталей машин». Куйбышев, 1969, № 40.
7. *Попов А. П.* Исследование работоспособности компенсирующих муфт в условиях перекоса осей соединяемых агрегатов. Автореф. канд. дисс., М., 1971.
8. *Тимошенко С. П., Войновский — Кригер С.* Пластины и оболочки. ГИФМЛ, М., 1963.
9. *Wellauer N. I., Seireg A.* Bending strength of Gear Teeth by Cantilever—Plate Theory. Paper ASME, 1950, A50.
10. *Iaromillo T. J.* Deflection and Moments due to Concentrated Load on a Cantilever—Plate. Journal of Applied Mechanics, March, 1950, Vol. 17, N. 1.