Е. М. МАРКУШИН, Л. П. СТУКАЛИН

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ МЕТОДА Н. Н. КРАСОВСКОГО

Известный метод рассмотрения дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, предложенный Н. Н. Красовским, допускает наглядное геометрическое толкование.

Согласно этому методу в качестве элемента траектории системы с запаздыванием

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t) \, (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t)$ — функционалы, определенные на любых кусочно-непрерывных (с разрывами первого рода) функциях $x_i(\vartheta)$ при $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, $X_i(0, \ldots, 0, t) \equiv 0$, принимают на вектор-функцию $(x(t) = \{x_i(x_0(\vartheta_0), t\}$, а вектор-отрезок $x(t+\vartheta) = \{x_i(x_0(\vartheta_0), t+\vartheta\}$, $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. Другими словами, вместе с точкой траектории $x(t)$ рассматривается и предшествующий отрезок траектории $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, соответствующий интервалу запаздывания τ (рис. 1)

При этом решение естественно рассматривать как траекторию в функциональном пространстве, например в пространстве C, а вектор-отрезок $x_t(\vartheta)$ и начальную функцию $x_0(\vartheta_0)$, $(-\tau \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0)$, как элементы пространства $C[-\tau, 0]$.

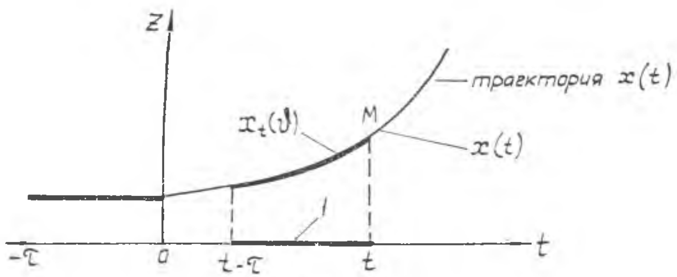

Рис. 1.

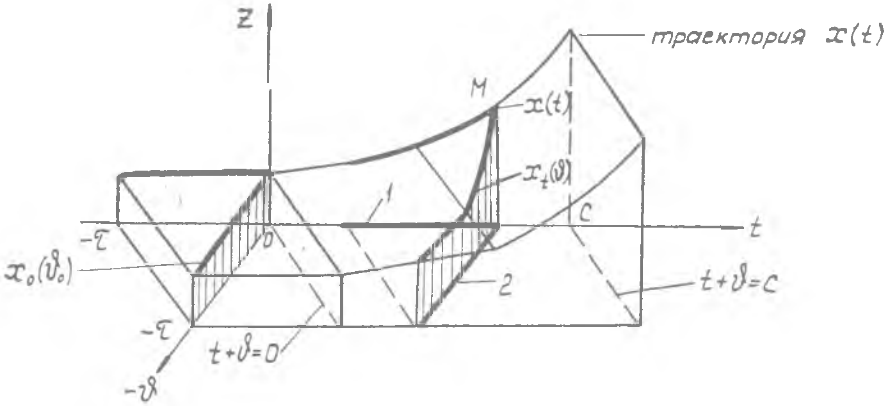

Рис. 2.

Пусть решение (1) продолжимо на все значения $t \geqslant 0$.

Рассмотрим плоскость

$$z = x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$$
$$(-\tau \leqslant t+\vartheta < \infty, \quad -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \tag{2}$$

в пространстве (t, ϑ, z) (рис. 2).

Поверхность (2) является линейчатой, так как в точках $(t, \vartheta, 0)$, лежащих на прямой $t+\vartheta = c$ ($c = \mathrm{const}$, $-\tau \leqslant c \leqslant \infty$) величина z принимает одно и то же значение $z = x(c)$.

Поэтому профиль поверхности (2) на отрезке 1 (рис. 1, рис. 2), т. е. элемент $x_t(\vartheta)$ совпадает с профилем той же поверхности на отрезке 2 (рис. 2). Этот последний можно принять в качестве элемента $x_t(\vartheta)$.

Таким образом, вместе с движением изображающей точки M по траектории системы рассматривается и движение сечения поверхности (2) плоскостью, проходящей через точку M ортогонально оси t.

Геометрически наглядно толкуется и постановка задачи устойчивости для уравнений с последействием по Н. Н. Красовскому.

Решение $x=0$ уравнения (1) называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\| x(x_0)(\vartheta_0), t) \| < \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant 0, \tag{3}$$

если только выполняется неравенство

$$\| x_0(\vartheta_0) \|^{(\tau)} \leqslant \delta, \tag{4}$$

где

$$\| x_0(\vartheta_0) \|^{(\tau)} = \sup(|x_{i0}(\vartheta_0)| \text{ при } -\tau \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0, \ i = 1, \ldots, n)$$

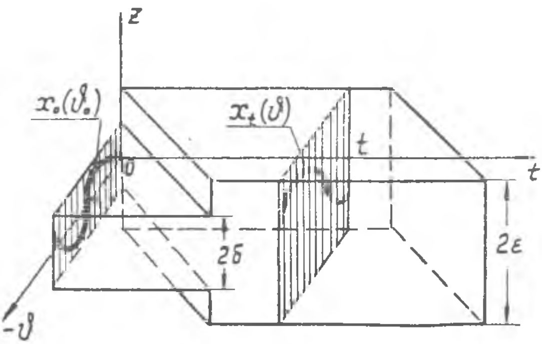

Рис. 3.

$$\| x(x_0(\vartheta_0),\ t) \| = \sup(\,| x_i(x_0(\vartheta_0),\ t)| \text{ при } t \geqslant 0,\ i = 1, \dots, n)$$

Условие (3) для $t \geqslant \tau$ можно записать в виде

$$\| x_t(\vartheta) \|^{(\tau)} < \varepsilon. \tag{5}$$

Геометрический смысл условий (3)—(5) показан на рис. 3. Лемма (27.1) [1], согласно которой

$$\| x_t(x_0(\vartheta_0), \vartheta) - x_t(x_0^*(\vartheta_0)\,\vartheta) \|^{(\tau)} \leqslant H_0 \exp Lt \text{ при } t \geqslant 0,$$

где

$$x_0(\vartheta_0) = \{ x_{i0}(\vartheta_0) \},$$

$$x_0^*(\vartheta_0) = \{ x_{i0}^*(\vartheta_0) \} —$$

начальные функции, удовлетворяющие условиям,

$$\| x_0(\vartheta_0) \|^{(\tau)} < H, \quad \| x_0^*(\vartheta_0) \|^{(\tau)} < H$$

$$\| x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0) \|^{(\tau)} = H_0$$

геометрически поясняется рисунком 4.

Приведенные геометрические построения могут быть использованы и для пояснения некоторых других вопросов, возникающих при рассмотрении дифференциальных уравнений с запаздыванием времени, например для пояснения задачи о расщеплении функционального пространства.

На рис. 1 и 2 графически изображено решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = ax(t - \tau). \tag{6}$$

(a_1 τ — положительные постоянные) с начальной функцией

$$x_0(\vartheta_0) = 1, \quad -\tau \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0.$$

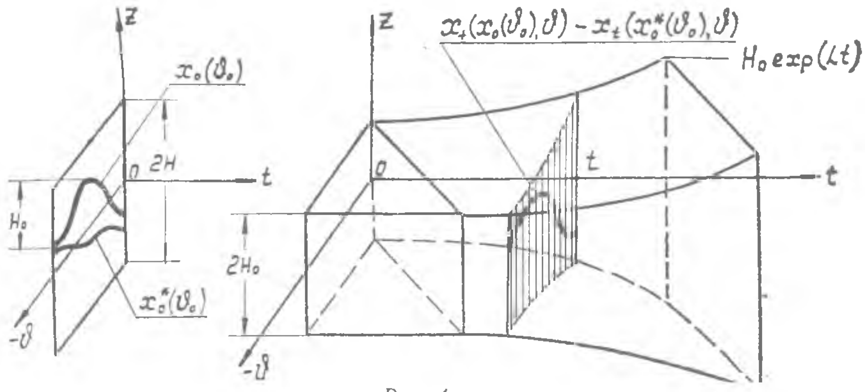

Рис. 4.

Известно [2], что уравнению (6) соответствует операторное уравнение

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta),$$

в котором оператор А определяется следующим образом

$$Ax_t(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_t(\vartheta)}{dt}, & -\tau \leqslant \vartheta < 0. \\ ax(t-\tau), & \vartheta = 0. \end{cases} \tag{7}$$

В силу условия $a\tau e \neq -1$ все корни λ_j ($j = 1, 2, \ldots$) характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda - ae^{-\lambda\tau} = 0$$

простые. Расположим их в порядке убывания действительных частей $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots$, обозначим

$$\widetilde{x_j}(\vartheta) = \frac{1}{\Delta'(\lambda_j)} e^{-\lambda_j\vartheta}, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

собственные функции оператора (7), и элемент $x_t(\vartheta)$ представим в виде ряда

$$x_t(\vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\widetilde{x_j}(\vartheta). \tag{8}$$

След (8) на плоскости (t, z) ($\vartheta = 0$, рис. 2) определяет траекторию

$$x(t) = x_t(0) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t)\widetilde{x_j}(0). \tag{9}$$

Видим, что задача определения траектории $x(t)$ (9) на полубесконечном интервале $0 \leqslant t < \infty$ приводится к задаче о представлении элемента $x_t(\vartheta)$ рядом (8) на конечном интервале $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$.

След (8) на плоскости (ϑ, z) ($t = 0$, рис. 2) представляет собой начальную функцию

$$x_0(\vartheta) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(0)\widetilde{x}_j(\vartheta).$$

В соответствии с расщеплением функционального пространства [2] уравнению (6) эквивалентна система уравнений

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\frac{du_t(\vartheta)}{dt} = Au_t(\vartheta),$$

где

$$u_t(\vartheta) = x_t(\vartheta) - \sum_{j=1}^{N} y_j(t)\widetilde{x}_j(\vartheta).$$

Видим, что задача о расщеплении функционального пространства есть задача о приближенном представлении элемента $x_t(\vartheta) \in c[-\tau, 0]$ путем разложения его в ряд по первым N собственным значениям оператора (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.

2. *Шиманов С. Н.* О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени. ПММ, 24, вып. 1, 1960.