

17. Подольский А.А., Малыгин Н.А. Прибор для измерения объемной концентрации взвешенных частиц. - В брошюре: "Методы и средства контроля за загрязняющими атмосферу промышленными выбросами". Киев, "Знание", 1976, с. 35-36.

УДК

А.А.Чудинов

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН  
В МОНОКРИСТАЛЛАХ ГЕРМАНАТА ВИСМУТА

Германат висмута - это новый материал акустоэлектроники, который в последнее время привлекает внимание специалистов. Из всех монокристаллических материалов, употребляемых в качестве акустических сред, он обладает самым низким значением скорости акустических поверхностных волн и малым рассеянием энергии при их распространении, что делает его перспективным в таких устройствах акустоэлектроники как линии задержки, фильтры сжатия радиоимпульсов, анализаторы спектра. Получение монокристаллических пластин германата висмута достаточных размеров позволяет ставить вопрос о практической разработке перечисленных устройств.

Анализ условий возбуждения и распространения ультразвуковых поверхностных волн обычно проводится на базе линейной теории упругости с учетом пьезоэлектрических свойств акустической среды. Дифференциальные уравнения движения частиц произвольной анизотропной акустической среды записываются в виде

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - e_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} \quad (1)$$

где  $U_i$  и  $E_k$  - проекции векторов смещения и напряженности электрического поля на оси декартовой системы координат;

$\rho$  - плотность акустической среды;

$C_{ijkl}, e_{ijk}$  - упругие и пьезоэлектрические константы кристалла;

$i, j, k = 1, 2, 3$  Знак суммирования по повторяющимся в сомножителях индексам опущен.

Дальнейший анализ связан с учетом симметрии физических свойств кристаллов германата висмута. Монокристаллы  $Bi_{12}GeO_{20}$  принадлежат к кубической системе, класс (23). В качестве кристаллографической декартовой системы координат выбираются три оси симметрии второго порядка. Матрица упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических констант, отнесенная к кристаллографической системе координат, имеет вид  $|I|$ :

	$U_{11}$	$U_{22}$	$U_{33}$	$U_{23}$	$U_{31}$	$U_{12}$	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$\sigma_{11}$	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{12}$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{22}$	$C_{12}$	$C_{11}$	$C_{12}$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{33}$	$C_{12}$	$C_{12}$	$C_{11}$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{23}$	0	0	0	$C_{44}$	0	0	$e_{14}$	0	0
$\sigma_{31}$	0	0	0	0	$C_{44}$	0	0	$e_{14}$	0
$\sigma_{12}$	0	0	0	0	0	$C_{44}$	0	0	$e_{14}$
$D_1$	0	0	0	$e_{14}$	0	0	$\epsilon_{11}$	0	0
$D_2$	0	0	0	0	$e_{14}$	0	0	$\epsilon_{11}$	0
$D_3$	0	0	0	0	0	$e_{14}$	0	0	$\epsilon_{11}$

Значения этих констант впервые были измерены Оно, Уорнером и Беллманом [2], а затем уточнены Кроутом, Тимманом, Грэхемом и Лимом [3]. В основу дальнейших расчетов будут положены данные, взятые из работы [3]:

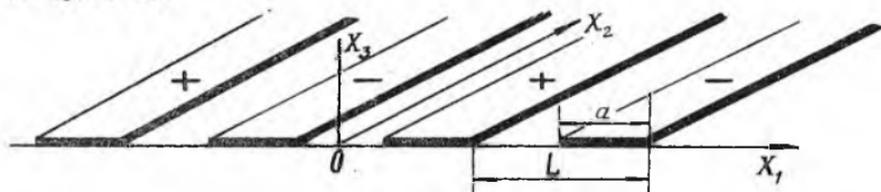
$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (1,2848 \pm 0,0013) 10^{11} \text{ Н/м}^2; & e_{14} &= (0,983 \pm 0,01) \text{ К/м}^2; \\
 C_{12} &= (0,2942 \pm 0,0006) 10^{11} \text{ Н/м}^2; & \epsilon_{11} &= 38 \pm 0,4; \\
 C_{44} &= (0,2552 \pm 0,0003) 10^{11} \text{ Н/м}^2; & e_{14}^2/e_{11} &= (0,0287 \pm 0,0006) 10^{11} \text{ Н/м}^2.
 \end{aligned}$$

Придавая значкам  $i$ ,  $j$ ,  $k$  в уравнении (I) все возможные значения, учитывая равенство нулю некоторых компонент упруго-пьезоэлектрической матрицы и предполагая зависимость компонент смещения от времени по закону  $e^{-i\omega t}$  получим:

$$\begin{aligned}
 C_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + C_{66} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + C_{33} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 U_1 + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{13} + C_{33}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} = \\
 = e_{63} \frac{\partial E_3}{\partial x_2} + e_{32} \frac{\partial E_2}{\partial x_3};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + C_{66} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + C_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + C_{44} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} + (C_{13} + C_{44}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \rho \omega^2 U_2 = \\
 & = e_{14} \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right); \\
 & C_{55} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) + C_{44} \frac{\partial U_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} + C_{13} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_3} + C_{23} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \\
 & + C_{33} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2 U_3 = e_{14} \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right).
 \end{aligned}$$

В настоящее время найдено [4], что наиболее эффективным способом возбуждения поверхностных волн является применение встречно-штыревых преобразователей, у которых штыри-электроды, подсоединенные к одному полюсу источника радиосигналов, регулярно чередуются со штырями-электродами, подсоединенными к другому полюсу этого источника (рис. I).



Р и с. I

Полагая электроды преобразователя ориентированными вдоль оси  $X_2$  и имеющими бесконечную протяженность, ограничим рассмотрение случаем плоской поверхностной волны, для которой все производные по  $X_2$  от физических величин, характеризующих волну, равны нулю. Также равна нулю компонента  $E_2$  напряженности электрического поля. Волна распространяется вдоль оси  $X_1$ . Учитывая плоскостность волны и равенство между собой некоторых упругих и пьезоэлектрических постоянных, например  $C_{66} = C_{55} = C_{44}$  (что можно установить из вида матрицы), имеем систему уравнений:

$$(C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2) U_1 + (C_{12} + C_{44}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \quad (2)$$

$$C_{44} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) U_2 + \rho \omega^2 U_2 = e_{14} \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_1} + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \right); \quad (3)$$

$$(C_{12} + C_{44}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (C_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2) U_3 = 0. \quad (4)$$

Система уравнений (2) - (4) оказывается распавшейся на две части. В уравнениях (2) и (4) оказываются взаимно связанными смещения  $U_1$  и  $U_3$ . В то же время смещение  $U_2$  входит только в уравнение (3).

Такое распадение системы уравнений используется для классификации волн [5]. Поверхностная волна, описываемая уравнением (3), называется электроакустической. Как установлено, движение частиц в электроакустических волнах направлено по нормали к направлению распространения и происходит параллельно свободной поверхности кристалла, расположенной при  $X_3 = 0$ . Амплитуда смещения частиц убывает с увеличением расстояния от свободной поверхности, а константа спада амплитуды зависит от электрических характеристик среды. Важная особенность электроакустической волны состоит в том, что она проникает вглубь кристалла на значительное расстояние, а это при наличии свободных носителей в кристалле и взаимодействии их с волной через деформационный потенциал приводит к большому затуханию электроакустических волн. Такие волны не эффективны для создания акустоэлектронных устройств.

Волна, описываемая уравнениями (2) и (4), является волной Релея [5]. Распространение вдоль свободной поверхности твердого тела волны Релея вызывает движение приповерхностных частиц по эллиптическим траекториям, плоскости которых параллельны плоскости  $X_1 X_2$ . Дальнейший анализ будет касаться только релеевских поверхностных волн, имеющих сравнительно малое затухание.

Независимость уравнений (2)–(4) от напряженности внешнего электрического поля свидетельствует о том, что релеевские поверхностные волны вдоль кристаллографических направлений типа  $[100]$  не сопровождаются электрическими полями, поэтому не могут быть возбуждены встречноштыревыми преобразователями, изображенными на рис. 1. Вместе с тем, если волна Релея вдоль направления  $[100]$  на плоскости  $(001)$  возбуждена каким-либо иным способом, то из уравнений (2) и (4) можно определить скорость ее распространения, решая однородную систему уравнений.

Невозможность использования пластин, вырезанных вдоль кристаллографических координатных осей германата висмута, для конструирования устройств со встречноштыревыми преобразователями и волнами Релея заставляет обратиться к анализу произвольных направлений, например, в плоскости  $(110)$ .

Поворот осей координат изменяет значения упругих, пьезо- и диэлектрических констант, которые являются компонентами тензоров 4-го, 3-го и 2-го рангов соответственно.

Согласно [1], законы преобразования констант записываются следующим образом:

$$C'_{ppqr} = \alpha_{nl} \alpha_{pk} \alpha_{ql} \alpha_{rm} C_{iklm}; \quad (5)$$

$$e'_{ij,k} = \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kn} e_{lm,n}; \quad (6)$$

$$e'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{je} e_{ke}, \quad (7)$$

где  $\alpha_{ik}$  — направляющие косинусы между старой и новой системами координат;  $i, j, k, l, m, n, p, q, r = 1, 2, 3$ .

Знак суммирования по повторяющимся у множителей индексам опущен. Здесь, как и везде далее, применена упрощенная запись компонент тензоров, при которой  $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 31 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ .

При вращении координатной системы вокруг оси  $X_3$  на угол  $\theta$  таблица направляющих косинусов  $\alpha_{ik}$  между прежними осями координат  $X_1, X_2, X_3$  и новыми  $X'_1, X'_2, X'_3$  имеет вид

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X'_1$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0
$X'_2$	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	0
$X'_3$	0	0	1

Используя конкретные значения направляющих косинусов  $\alpha_{ik}$  из этой таблицы в формулах (5) — (7), можно получить:

$$C'_{11} = C'_{22} = C_{11} - 2(C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta;$$

$$C'_{12} = C_{12} + 2(C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta;$$

$$C'_{14} = C'_{15} = C'_{24} = C'_{25} = C'_{34} = C'_{35} = C'_{36} = C'_{45} = C'_{46} = C'_{56} = 0;$$

$$C'_{16} = -C'_{26} = [C_{11} - C_{12} - 2C_{44} - 2(C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \cos^2 \theta] \sin \theta \cos \theta.$$

$$C'_{66} = C_{44} + 2(C_{11} - C_{12} - 2C_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta;$$

$$C'_{13} = C'_{23} = C_{12}, \quad C'_{33} = C_{11}, \quad C'_{44} = C'_{55} = C_{44};$$

$$e'_{13} = -e'_{23} = -e'_{42} = +e'_{51} = 2e_{41} \sin \theta \cos \theta;$$

$$e'_{41} = e'_{52} = e'_{63} = e_{41} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta); \quad e'_{11} = e'_{12} = e'_{21} = e'_{22} = e'_{31} = e'_{32} = e'_{33} = \\ = e'_{43} = e'_{53} = e'_{61} = e'_{62} = 0.$$

С помощью этих формул для частного случая  $\theta = 45^\circ$  можно получить

$$C'_{33} = C_{11} = 1,2848 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \quad C'_{13} = C'_{12} = 0,2942 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$$

$$C'_{11} = 1,0447 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \quad C'_{44} = C'_{44} = 0,2552 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2.$$

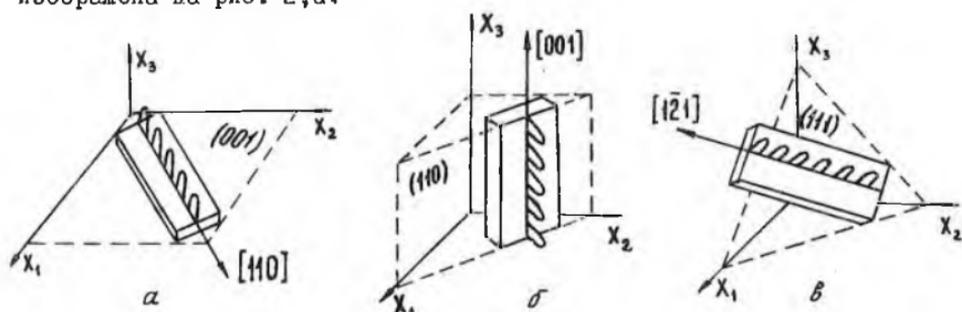
Используя матрицу из новых констант  $C'$ ,  $e'$  и  $\varepsilon'$  для  $\theta = 45^\circ$ , и повторяя процедуру, использованную ранее при выводе уравнений

(2)-(4), можно получить:

$$(C'_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + C'_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho \omega^2) U_1 + (C'_{13} + C'_{44}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} = \varepsilon'_{31} \frac{\partial E_1}{\partial x_3} + \varepsilon'_{13} \frac{\partial E_3}{\partial x_1}; \quad (8)$$

$$(C'_{33} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + C'_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \rho \omega^2) U_3 + (C'_{13} + C'_{44}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_3} = \varepsilon'_{31} \frac{\partial E_1}{\partial x_3}.$$

Согласно классификации волн, приведенной в работе [6], здесь также имеет место вырожденный случай, когда уравнения движения распадаются на связанную систему дифференциальных уравнений для компонент смещения  $U_1$  и  $U_3$ , описывающих волну Релея, и одинокое уравнение для компоненты  $U_2$ , описывающее электроакустическую волну. Уравнения (8) в отличие от уравнений (2) и (4) содержат компоненты напряженности электрического поля, что свидетельствует о возможности возбуждения волны Релея пьезоэлектрически. Ориентация пластинки изображена на рис. 2, а.



Р и с. 2

Общий анализ, проведенный Кэмпбеллом и Джонсом [5], показывает, что существуют еще две плоскости с одним направлением в каждой, где могут распространяться чистые волны Релея, возбуждаемые пьезоэлектрически. Эти направления и плоскости показаны на рисунках 2, б и 2, в. При этом самое сильное возбуждение волн имеет место в случае, изображенном на рис. 2, а и описанном уравнениями (8). Этот случай будет подвергнут числовому расчету.

Система уравнений (8) не является полной, так как содержит четыре неизвестные функции. Из-за явления пьезоэффекта поверхностные волны Релея, распространяющиеся в пьезоэлектрических средах, сопро-

вождаются электрическими полями  $E_1$  и  $E_3$  сложной конфигурации. Поляризация упругой среды, вызванная деформацией, и взаимодействие связанных зарядов могут сильно изменить скорость поверхностной волны. Учет этого влияния проводится путем привлечения волнового уравнения Максвелла

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (9)$$

и уравнений состояния пьезоэлектрической среды

$$D_i = \epsilon_{ijk} U_{jk} + \epsilon_{ij} E_j, \quad (10)$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость акустической среды;  
 $\vec{D}$  - вектор электрического смещения;  
 $U_{jk}$  - тензор деформации.

Используя значения констант из пьезоэлектрической матрицы для кристаллографического направления (110) в уравнениях состояния (10), получаем:

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{41} U_{31} + \epsilon_{11} E_1 = \epsilon_{41} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) + \epsilon_{11} E_1; \\ D_2 &= \epsilon_{41} U_{21} + \epsilon_{11} E_2 = -\epsilon_{41} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) + \epsilon_{11} E_2; \\ D_3 &= \epsilon_{41} U_{11} + \epsilon_{11} E_3 - \epsilon_{41} U_{22} = \epsilon_{41} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) + \epsilon_{11} E_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Расписывая левую часть уравнения Максвелла в проекциях на оси координат и подставляя уравнения (11) в (9), можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu_0 \epsilon_{41} \omega^2 \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) + \mu_0 \epsilon_{11} \omega^2 E_1 &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2} - \mu_0 \epsilon_{41} \omega^2 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \mu_0 \epsilon_{11} \omega^2 E_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Полная система дифференциальных уравнений, описывающая свободное распространение поверхностных волн, складывается из уравнений (8) и (12). Ищем решения системы уравнений (8) и (12) в виде плоских волн:

$$\begin{aligned} U_1 &= A e^{\alpha k x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}; \\ U_3 &= B e^{\alpha k x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}; \\ E_1 &= \kappa \beta e^{\alpha k x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}; \\ E_3 &= \kappa \gamma e^{\alpha k x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}; \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha$  - безразмерная константа спадаания амплитуды волны с глубиной;

$A, B, \beta, \gamma$  - амплитудные константы, подлежащие определению;

$k$  - волновое число.

Если ввести новые обозначения:  $v_s = \frac{\omega}{K}$  - фазовую скорость поверхностной волны и  $v_c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_{11}}$  - фазовую скорость света в кристалле, то подставляя решения (13) в системы (8) и (12), после сокращения на экспоненты и других несложных преобразований можно получить

$$\begin{aligned} (\rho v_s^2 - C_{11}' + C_{44}' \Omega^2) A + i(C_{13}' + C_{44}') \Omega B - e_{41}' \Omega \zeta - i \ell_{41}' \eta &= 0; \\ i(C_{13}' + C_{44}') \Omega A + (\rho v_s^2 - C_{44}' + C_{33}' \Omega^2) B - i \ell_{41}' \zeta &= 0; \\ 2 \frac{\ell_{41}'}{\epsilon_{11}'} \Omega A + i \frac{\ell_{41}'}{\epsilon_{11}'} B + \zeta - i \Omega \eta &= 0; \\ i \Omega \zeta + \eta &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Полученная система уравнений для амплитудных констант  $A, B, \zeta, \eta$  имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных  $A, B, \zeta$  и  $\eta$ , равен нулю. Раскрывая определитель, можно получить кубическое уравнение относительно  $\Omega^2$ :

$$(\Omega^2)^3 + b(\Omega^2)^2 + c\Omega^2 + d = 0 \quad (15)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{C_{33}' C_{44}'} \left[ \rho v_s^2 (C_{33}' + C_{44}') - C_{33}' (C_{11}' + C_{44}') + C_{13}' (C_{13}' + 2C_{44}') - 4 \frac{\ell_{41}^2}{\epsilon_{11}'} C_{33}' \right]; \\ c &= \frac{1}{C_{33}' C_{44}'} \left\{ (\rho v_s^2)^2 - (C_{11}' + C_{33}' + 2C_{44}') \rho v_s^2 + C_{11}' (C_{33}' + C_{44}') - C_{13}' (C_{13}' + 2C_{44}') + \frac{\ell_{41}^2}{\epsilon_{11}'} [C_{44}' - 4C_{13}' - 4\rho v_s^2] \right\}; \\ d &= \frac{1}{C_{33}' C_{44}'} \left[ \frac{\ell_{41}^2}{\epsilon_{11}'} (\rho v_s^2 - C_{11}') + \rho v_s^2 (C_{11}' + C_{44}') - (\rho v_s^2)^2 - C_{11}' C_{44}' \right]. \end{aligned}$$

Так как на этом этапе скорость поверхностной волны еще не известна, то уравнение (15) приходится решать, многократно задаваясь какими-то разумными значениями скорости. Для каждой скорости  $v_s$  могут быть получены три константы спадания  $\Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2$ . Вопрос о том, какая из принятых скоростей является истинной, решается после рассмотрения граничных условий.

Из уравнений (14) можно найти следующие соотношения между амплитудными константами:

$$\rho = \frac{B}{A} = -i \Omega D, \quad \zeta = \frac{\eta}{A} = -\frac{\ell_{41}' \Omega (2+D)}{\epsilon_{11}' (1-\Omega^2)}, \quad \eta = \frac{\zeta}{A} = i \frac{\ell_{41}'}{\epsilon_{11}'} \frac{\Omega^2 (2+D)}{1-\Omega^2}, \quad (16)$$

где

$$D = \frac{C_{13}' + C_{44}' + 2 \frac{\ell_{41}^2}{\epsilon_{11}'} \frac{1}{1-\Omega^2}}{\rho v_s^2 - C_{44}' + C_{33}' \Omega^2 - \frac{\ell_{41}^2}{\epsilon_{11}'} \frac{1}{1-\Omega^2}}.$$

Задаваясь определенной скоростью  $v_3$ , из (15) можно найти три константы спадаания  $\Omega_j$ . Используя их поочередно в уравнениях (16), можно получить  $p_j$ ,  $q_j$  и  $z_j$ . Тогда уравнения (13) можно записать через одни и те же неопределенные константы  $A_j$ :

$$U_1 = \sum_{j=1}^3 A_j e^{\Omega_j \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}, \quad E_1 = \kappa \sum_{j=1}^3 q_j A_j e^{\Omega_j \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}; \quad (17)$$

$$U_3 = \sum_{j=1}^3 p_j A_j e^{\Omega_j \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}, \quad E_3 = \kappa \sum_{j=1}^3 z_j A_j e^{\Omega_j \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}.$$

На свободной поверхности пластины, когда  $x_3 = 0$ , напряжения отсутствуют, поэтому  $\sigma_{31(0-)} = \sigma_{33(0-)} = 0$ . Известно также, что тангенциальная компонента электрического поля и нормальная компонента электрического смещения на поверхности раздела не должны испытывать скачков, поэтому  $E_{1(0-)} = E_{1(0+)}$ ,  $D_{3(0-)} = \epsilon_0 E_{3(0+)}$ .

Опираясь на уравнение состояния

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} U_{kl} - \epsilon_{ij, \kappa} E_{\kappa}$$

и матрицу упругих и пьезоэлектрических констант из двух первых граничных условий, можно получить:

$$C_{44} \left( \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right) - \epsilon'_{13} E_1 = 0; \quad C_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + C_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = 0.$$

Подставляя сюда смещения и поля из уравнений (17), получаем

$$(C_{44} \Omega_1 + i C_{44} p_1 - \epsilon'_{13} q_1) A_1 + (C_{44} \Omega_2 + i C_{44} p_2 - \epsilon'_{13} q_2) A_2 + (C_{44} \Omega_3 + i C_{44} p_3 - \epsilon'_{13} q_3) A_3 = 0; \quad (18)$$

$$(i C_{12} + C_{11} p_1 \Omega_1) A_1 + (i C_{12} + C_{11} p_2 \Omega_2) A_2 + (i C_{12} + C_{11} p_3 \Omega_3) A_3 = 0.$$

Применение граничного условия  $E_{1(0-)} = E_{1(0+)}$  требует для подстановки в левую часть выражения для  $E_1$  из (17), а для подстановки в правую часть — решения уравнения Максвелла (12) для полупространства  $x_3 \geq 0$ . Пространство над пластиной характеризуется отсутствием пьезоэффекта ( $\epsilon_{11} = 0$ ) и акустической среды ( $\epsilon_{11} = \epsilon_0$ ), где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная вакуума). Решения уравнения Максвелла для этого полупространства также разыскиваются в виде бегущих волн, но с другой константой спадаания  $\beta$ . Запишем эти решения в виде

$$E_1 = \kappa \zeta' e^{\beta \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}, \\ E_3 = \kappa \eta' e^{\beta \kappa x_3} e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}. \quad (19)$$

Подставляя предполагаемые решения (19) в уравнения (12), получаем:

$$\left[ \beta^2 + \left( \frac{v_s}{v_{co}} \right)^2 \right] \zeta' - i\beta \eta' = 0; \quad (20)$$

$$i\beta \zeta' + \left[ 1 - \left( \frac{v_s}{v_{co}} \right)^2 \right] \eta' = 0.$$

Из равенства нулю определителя этой системы можно найти константу спадающего поля над пластиной

$$\beta = -\sqrt{1 - \left( \frac{v_s}{v_{co}} \right)^2} \approx -1.$$

Из второго уравнения системы (20) следует связь между  $\zeta'$  и  $\eta'$ .

$$i\beta \zeta' = -\eta'. \quad (21)$$

Возвращаясь к граничному условию  $E_{1(0-)} = E_{1(0+)}$ , с помощью решений (17) и (19) получаем

$$\zeta = \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \eta_3 A_3. \quad (22)$$

Четвертое граничное условие  $D_{3(0-)} = \epsilon_0 E_{3(0+)}$  подразумевает использование в левой части третьего уравнения из системы (II) и  $E_3$  из уравнений (19). Приравнявая их при  $x_3 = 0$ , можно получить

$$i\epsilon_{11} (A_1 + A_2 + A_3) + \epsilon_{11} (z_1 A_1 + z_2 A_2 + z_3 A_3) = \epsilon_0 \eta'. \quad (23)$$

Объединяя (22) и (23) с помощью соотношения (21), имеем

$$(i\epsilon_{41} - i\epsilon_0 \eta_1 + \epsilon_{11} z_1) A_1 + (i\epsilon_{41} + \epsilon_{11} z_2 - i\epsilon_0 \eta_2) A_2 + (i\epsilon_{41} - i\epsilon_0 \eta_3 + \epsilon_{11} z_3) A_3 = 0 \quad (24)$$

Уравнения (18) и (24) можно записать более компактно, а именно:

$$d_{11} A_1 + d_{12} A_2 + d_{13} A_3 = 0;$$

$$d_{21} A_1 + d_{22} A_2 + d_{23} A_3 = 0; \quad (25)$$

где

$$d_{31} A_1 + d_{32} A_2 + d_{33} A_3 = 0;$$

$$d_{1j} = c_{44} \Omega_j + i c_{41} \rho_j - \epsilon_{41} \eta_j;$$

$$d_{2j} = i c_{12} + c_{11} \rho_j \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$d_{3j} = i\epsilon_{41} - i\epsilon_0 \eta_j + \epsilon_{11} z_j. \quad (26)$$

Для того чтобы существовало нетривиальное решение системы (25), нужно чтобы детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных, равнялся нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (27)$$

Из любых двух уравнений системы (25) можно найти отношение констант, определяемое как  $a_{21} = A_2 / A_1$  и  $a_{31} = A_3 / A_1$ .

Равенство определителя нулю означает, что скорость  $v_s$  выбрана правильно. Если определитель (27) не равен нулю, то выбирается новая скорость и расчет повторяется снова до тех пор, пока оба уравнения (15) и (27) не будут удовлетворены одновременно.

Таким образом были произведены все расчеты и по результатам расчетов строился график зависимости величины определителя (27) от скорости  $v_s$ . Из графика было найдено значение скорости, при котором определитель равнялся нулю. Это позволило определить скорость с точностью до пятого знака. Она оказалась равной 1680,8 м/с. Полученный результат с точностью до 0,06% совпадает с данными, приведенными в работе [3].

Вычисленному значению скорости соответствуют константы спада-ния:

$$\Omega_1 = 1,714$$

$$\Omega_2 = 0,175$$

$$\Omega_3 = 0,796$$

и амплитудные константы

$$p_1 = -0,235$$

$$q_1 = 0,0553$$

$$z_1 = -0,0947$$

$$p_2 = -7,11$$

$$q_2 = -0,228$$

$$z_2 = 0,040$$

$$p_3 = -0,760$$

$$q_3 = -0,187$$

$$z_3 = 0,149$$

$$a_{21} = -0,353$$

$$a_{31} = 0,525$$

$$p_{21} = \frac{p_2}{p_1} a_{21} = -10,7$$

$$p_{31} = \frac{p_3}{p_1} a_{31} = 1,68$$

Если подставить значения амплитудных констант в формулы (17), то получатся решения в численном виде, например:

$$U_1 = A_1 (c^{1,714kx_3} - 0,353c^{0,175kx_3} + 0,523e^{0,796kx_3}) e^{i(kx_1 - \omega t)};$$

$$U_3 = -0,235i A_1 (c^{1,714kx_3} - 10,7e^{0,175kx_3} + 1,68e^{0,796kx_3}) e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

Мнимость амплитуды смещения  $U_3$  свидетельствует о сдвиге фаз между  $U_1$  и  $U_3$  на  $\pi/2$ .

Полученные результаты предполагается использовать для расчета мощности акустического потока и эквивалентного электрического сопротивления излучателя.

## Л и т е р а т у р а

И. Н а й Дж. Физические свойства кристаллов. М., "Мир", 1967.

2. О п о е М., Warner A.W. and Ballman A.A., *Elastic and Piezoelectric Characteristics of Bismuth Germanium Oxide  $Bi_{12}GeO_{20}$* . *IEEE Trans. of sonics and ultrasonics*, v. SU-14, no 4, pp.165-167, oct.1969

3. Kraut E.A., Tittman B.R., Graham L.J. and Lim T.C., *Acoustic surface waves on metallized and unmetallized  $Bi_{12}GeO_{20}$* . *Appl. Phys. Letters*, v. 17, no 7, pp. 271-272. oct. 1970.

4. У а й т М. Поверхностные упругие волны. Обзор. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике т. 58, № 8, 1970, с. 68-100.

5. Campbell J.J. and Jones W.R., *Propagation of piezoelectric Surface Waves on Cubic and Hexagonal Crystals*. *Journ. Applied Phys.* v. 41, no. 7, pp. 2796-2801, June 1970.

6. Chin Chong Tseng and White R.M., *Propagation of piezo-electric and elastic surface waves at the Basal Plane of Hexagonal Piezoelectric Crystals*. *Journ. Appl. Phys.* v. 38, no 11, pp. 4274-4280. 1967

УДК 621.396.969

В.И.Чекин

УЧЕТ КРАЕВЫХ ЭФФЕКТОВ

ПРИ МАШИННОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАГРАММ ВТОРИЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ  
ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Задачи радиолокации требуют знания как диаграмм вторичного излучения тел сложной формы, так и производных от этих диаграмм — эффективной поверхности рассеяния и средней эффективной поверхности рассеяния. Однако число проблем, решаемых методом записи дифференциального радиолокационного сечения в зависимости от координат с последующим решением волнового уравнения с разделением переменных, очень ограничено. Строгие решения получены лишь для тел достаточно простой геометрической формы (сфера, сфероид, диск) или для тел, все или некоторые размеры которых малы по сравнению с длиной волны (тонкий провод). Но для ряда прикладных задач требуемая точность в 3 дБ позволяет перейти от строгих методов к приближенным или асимптотическим, в частности, к методу представления отраженного от предмета поля в виде суммы полей от отдельных его элементов [1].