КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 61, 1973 г.
Исследования по акустике, электрофизике и радиоэлектронике

А. А. ПОДОЛЬСКИЙ, В. И. ТУРУБАРОВ,
Е. И. ПОМИНОВ, Т. С. ГОЛЬДМАН

РАСЧЕТ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ОБТЕКАНИЯ ВОКРУГ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

Колебательное движение аэрозольных частиц весьма распро- ранено в технологических процессах. Например, движение взве- нной частицы в звуковом поле, заряженной частицы в зна- переменном электрическом поле подчиняется периодическому кону. Анализ движения частиц даже при малых числах Рей- льдса ($Re<1$) представляет сложную задачу и включает нахож- ние силы, действующей на частицу, параметров колебательного ижения частицы и поля скоростей обтекания. Определение рвых двух характеристик важно при анализе особенностей ижения изолированной частицы, а третьей — при анализе вза- одействия частиц (например, в процессе коагуляции). В связи ем, что во многих случаях взаимодействием частиц можно пре- бречь, первому вопросу в литературе уделено значительно боль- е внимание. В [1] получены выражения для силы, действующей сферическую частицу при малых числах Re, в случае неустано- вшегося движения в потоке с произвольным профилем скоро- ей. Непосредственно для случая колебаний частиц в колеблю- йся среде выражения для сил и параметров колебательного ижения частицы при $Re \ll 1$ приведены в [2, 3], а при $Re \geqslant 0,5$— [4,5]. В работе [2] показано, что при малых числах Рейнольд- в используемом в аэрозольной технике диапазоне частот (сот- герц — десятки кгц) для частиц размерами доли-единицы мкм иянием нестационарных членов на величину параметров коле- тельного движения можно пренебречь и определять последние, лагая действующую на частицы силу равной силе Стокса.

Значительно сложнее обстоит дело с определением поля ско- стей обтекания среды вокруг колеблющейся частицы. Почти во ех работах по исследованию взаимодействия колеблющихся стиц принято, что поле скоростей вокруг колеблющейся частицы описывается выражениями Стокса, при замене в них посто[...] ной скорости среды U_0 на колебательную скорость $U_0 sin\omega t$:

$$U_r = U_0 V_r \cdot \cos\Theta \cdot e^{-j\omega t} = \frac{1}{2}\left[3\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] U_0 \cdot \cos\Theta \cdot e^{-j\omega t},$$

$$U_\circ = U_0 V_\Theta \cdot \sin\Theta \cdot e^{-j\omega t} = \frac{1}{4}\left[3\frac{R}{r} - \left(\frac{R}{r}\right)^3\right] U_0 \cdot \sin\Theta \cdot e^{-j\omega t}.$$

Здесь R — радиус частицы; r — расстояние от центра час[...] цы до точки наблюдения; Θ — угол между направлением на т[...] ку наблюдения и линией колебаний.

Использование выражений (1) означает, что в уравнени[...] Навье—Стокса опущены нелинейный член $(U\nabla)U$ и нестацион[...] ный член $\frac{\partial u}{\partial t}$. Однако, если пренебрежение нелинейным харак[...] ром обтекания при малых числах Рейнольдса оправдано, то учитывать нестационарность можно лишь при соблюдении усло[...] $r^2\omega \ll \nu$, где ν — кинематическая вязкость [6].

Целью настоящей статьи является определение поля ско[...] стей обтекания вокруг колеблющейся частицы с учетом неста[...] онарного характера движения. Для решения вопроса воспольз[...] ся методикой анализа, изложенной в [7]. Линеаризованная [...] стема уравнений Навье—Стокса для возмущений малой ампли[...] ды в вязкой жидкости имеет вид [8]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\rho_0 c^2 div\vec{U};$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\operatorname{grad} P + \eta\Delta\vec{U} + \left(\xi + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad} div\,\vec{U},$$

где P — звуковое давление; ρ_0 — плотность невозмущенной [...] ды; c — скорость звука в среде; η и ξ — первый и второй ко[...] фициенты вязкости.

Решение системы (2) записывается в виде

$$\vec{U} = rot\,\vec{\psi} + \operatorname{grad}\varphi,$$

где $\vec{\psi}$ — векторный потенциал поля рассеянных вязких во[...] φ — потенциал поля рассеянных звуковых волн.

При исследовании рассеяния плоской звуковой волны на с[...] рической частице в вязкой жидкости удобно представить по[...] циалы падающей (φ_0) и искомых рассеянных (φ, ψ) волн в [...] разложения по сферическим функциям:

$$\varphi_0 = \varphi_r\, e^{-j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (-j)^m (r \cdot m + 1) P_m(\Theta)\, j_m(k_l \cdot r),$$

$$\varphi = e^{-j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\Theta)\, h_m^{(1)}(k_l r),$$

$$\psi = e^{-j\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} b_m P_{m,1}(\Theta)\, h_m^{(1)}(k_t r).$$

десь $P_m(\Theta)$ — полином Лежандра порядка m; $P_{m,1}(\Theta)$ — присоединенный полином Лежандра первого рода порядка m; j_m — сферическая функция Бесселя; $h_{m,1}$ — сферическая функция Ханкеля первого рода; $\varphi_r = j\frac{U_0}{k_l}$; U_0 — амплитуда скорости падающей звуковой волны; $k_l \approx \frac{\omega}{c}$; $k_t = k_{to}(1+j)$; $k_{to} = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$. Поставив (4) в (3) и произведя дифференцирование, найдем выражения для составляющих поля скоростей рассеянных волн:

$$U_r = e^{-j\omega t}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{-\frac{m(m+1)}{r}P_m(\Theta)\,b_m\,h_{m,1}(k_t r) + \right.$$

$$\left. + \frac{a_m k_l}{2m+1}P_m(\Theta)\left[mh_{m-1,1}(k_l r) - (m+1)\,h_{m+1,1}(k_l r)\right]\right\}, \qquad (5)$$

$$U_\Theta = e^{-j\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}P_{m,1}(\Theta)\left\{\frac{a_m}{r}h_{m,1}(k_l\ r) - \right.$$

$$\left. - \frac{b_m k_t}{2m+1}\left[(m+1)\,h_{m-1,1}(k_t r) - mh_{m+1,1}(k_t r)\right]\right\}.$$

Коэффициенты a_m и b_m определяются из граничных условий на поверхности сферы $(U_p+U)_r=0$, $(U_p+U_\Theta)=0$;

$$a_m = (-j)^m(2m+1)\,\varphi_r\,\frac{(2m^2+3m+1)\,j_{m+1}(k_l R)\,h_{m-1,1}(k_t R) + \rightarrow}{(2m^2+3m+1)\,h_{m+1,1}(k_l R)\,h_{m-1,1}(k_t R) + \rightarrow}$$

$$\frac{\rightarrow + (2m^2+m)\,j_{m-1}(k_l R)\,h_{m+1,1}(k_t R)}{\rightarrow + (2m^2+m)\,h_{m-1,1}(k_l R)\,h_{m+1,1}(k_t R)} \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots \qquad (6)$$

$$b_m = \frac{(-j)^m(2m+1)^2 k_l}{k_t}\cdot\varphi_r\cdot\frac{-j_{m+1}(k_l R)\,h_{m-1,1}(k_l R) + \rightarrow}{(2m^2+3m+1)\,h_{m+1,1}(k_l R)\,h_{m-1}(k_t R) + \rightarrow}$$

$$\frac{\rightarrow + j_{m-1}(k_l R)\,h_{m+1,1}(k_l R)}{\rightarrow + (2m^2+m)\,h_{m-1,1}(k_l R)\,h_{m+1,1}(k_t R)};\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots$$

Таблица 1

f, гц	100	500	1000	5000	10000	Примечание
k_{0t}, $\frac{1}{м}$	$4,75\cdot10^3$	$1,07\cdot10^4$	$1,5\cdot10^4$	$3,36\cdot10^4$	$4,75\cdot10^4$	$\nu=1,4\cdot10^{-5}\ \frac{м^2}{сек}$
$k_{0t}R\cdot10^2$ ($R = 1$ мкм)	0,475	1,07	1,5	3,36	4,75	$c = 340$ м/сек
$k_0 R\cdot10^2$ ($R = 10$ мкм)	4,75	10,7	15	33,6	47,5	
k_l, $\frac{1}{м}$	1,85	9,25	18,5	92,5	185	
$k_l R\cdot10^5$ ($R = 1$ мкм)	0,185	0,925	1,85	9,25	18,5	
$k_l R\cdot10^5$ ($R = 10$ мкм)	1,85	9,25	18,5	92,5	185	

В интервале частот 100—10000 *гц* и диапазоне размеров част 1 — 10 *мкм* величины $k_l R$ и $k_{0t} R$ очень малы (см. таблицу Разлагая сферические функции в степенные ряды, с учетом м лости величин $k_l R$ и $k_{0t} R$ получим следующие приближенн выражения для коэффициентов a_m и b_m:

$$a_0 \simeq -j \frac{(k_l R)^3}{3} \varphi_r;$$

$$a_1 \simeq \frac{3}{2} (k_l R)^3 \varphi_r \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2k_{0t} R} + j \left(\frac{1}{2k_{0t} R} + \frac{1}{2 (k_{0t} R)^2} \right) \right];$$

$$b_1 \simeq \frac{3}{2} k_l R \varphi_r \left\{ 1 + \frac{(k_l R)^2}{2} \left[\left(\frac{1}{2k_{0t} R} - 2 \right) + j \left(\frac{1}{2k_{0t} R} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2 (k_{0t} R)^2} \right] \right\} \cdot e^{k_{0t} R (1-j)}; \qquad ($$

$$a_2 \simeq \frac{5}{9} \frac{(k_l R)^5}{k_{0t} R} \cdot \varphi_r \frac{1 + (k_{0t} R)^{-1} - j \left(1 + 0{,}8 k_{0t} R + \frac{2}{15} (k_{0t} R)^2 \right)}{1 + k_{0t} R - j k_{0t} R};$$

$$b_2 \simeq \frac{5}{9} (k_l R)^2 \varphi_r \frac{k_{0t} R + j k_{0t} R}{j + k_{0t} R + j k_{0t} R} e^{k_{0t} R (1-j)}.$$

Выражения (5) в сочетании с (6) полностью определяют п скоростей обтекания вокруг частицы в звуковой волне.

Описанное выше решение справедливо в случае рассея звуковой волны на неподвижной сферической частице в вяз жидкости. В [6] рассмотрен случай частицы, колеблющейся в подвижной на бесконечности среде, и показано, что поле ско стей вокруг колеблющегося шара при совмещении центра ш с началом системы координат определяется выражением

$$\vec{U} = e^{-j\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f \cdot U_0,$$

функция f находится из дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dr} = a \frac{e^{jk_t R}}{r^2} \left(r - \frac{1}{jk_t} \right) + \frac{b}{r^2};$$

$$a = \frac{3R}{2jk_t R} e^{-jk_t R}; \quad b = \frac{R^3}{2} \left[1 - \frac{3}{jk_t R} - \frac{3}{k_t^2 R^2} \right].$$

Из (7) и (8) нетрудно получить выражения для составляю поля скоростей среды вокруг колеблющегося шара в сферичес системе координат:

$$U_r = e^{-j\omega t} \left\{ 2a \frac{e^{jk_t r}}{r^3} \left(r - \frac{1}{jk_t} \right) + \frac{2b}{r^3} \right\} U_0 \cos\Theta;$$

$$U_\Theta = e^{-j\omega t} \left\{ \left(-\frac{jk_t}{r} \cdot e^{jk_t r} + \frac{e^{jk_t r}}{r^2} - \frac{e^{jk_t r}}{jk_t r^3} \right) a + \frac{b}{r^3} \right\} U_0 \sin\Theta.$$

Выражения (9) с точностью до малых величин порядка ($\left(\frac{k_l}{k_t} \right)$ совпадают с решением, описываемым формулами (5 при $\omega \to 0$ переходят в формулы Стокса (1).

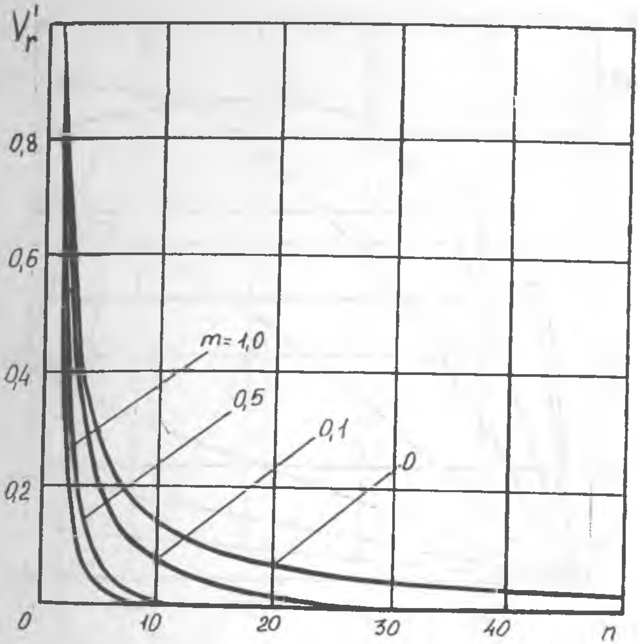

Рис. 1а. Зависимость радиальной компоненты скорости обтекания от расстояния до центра частицы

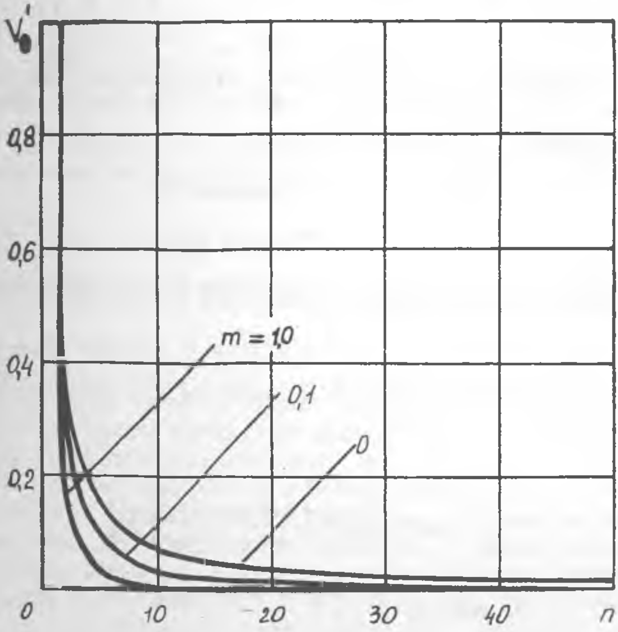

Рис. 1б. Зависимость тангенциальной компоненты скорости от расстояния до центра частицы

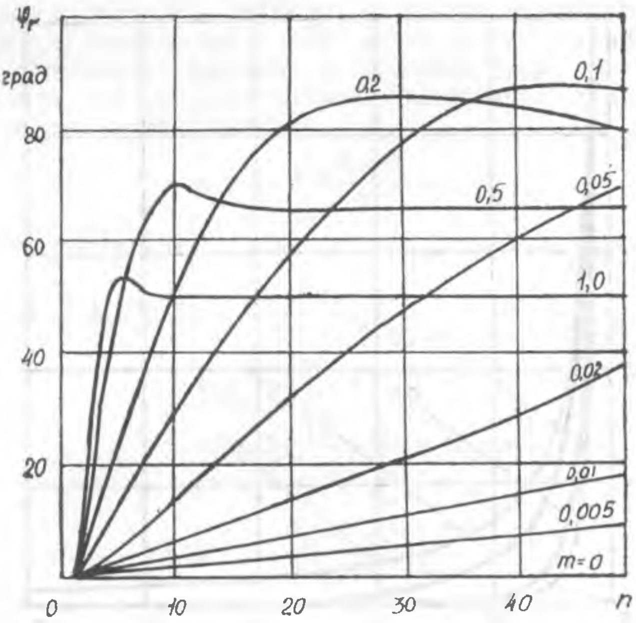

Рис. 2а. Зависимость фазового сдвига радиальной компоненты скорости обтекания от расстояния до центра частицы

Для количественного определения влияния частоты колеба на характер поля обтекания выражения (9) были преобраз ны и представлены в следующем виде:

$$U_r = e^{-j(\omega t-\varphi)} U_0 V_r' \cos\Theta;$$

$$U_\Theta = e^{-j(\omega t-\psi)} U_0 V_\Theta' \sin\Theta;$$

где

$$V_r' = D\sqrt{(A^2+1)e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}[(BA-C)\sin\alpha-(B+AC)\cos d]B^2+C^2}$$

$$V_\Theta' = \frac{D}{2}\sqrt{(A^2+E^2)e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}[(AB-CE)\sin\alpha-(AC+BE)\cos\alpha]+B^2+C}$$

$$\varphi_r = \operatorname{arctg}\frac{C-[A\cdot\cos\alpha+\sin\alpha]e^{-\alpha}}{B+[A\cdot\sin\alpha-\cos\alpha]e^{-\alpha}};$$

$$\varphi_\Theta = \operatorname{arctg}\frac{C-[E\sin\alpha+A\cdot\cos\alpha]e^{-\alpha}}{B+[A\cdot\sin\alpha-\cos\alpha]e^{-\alpha}};$$

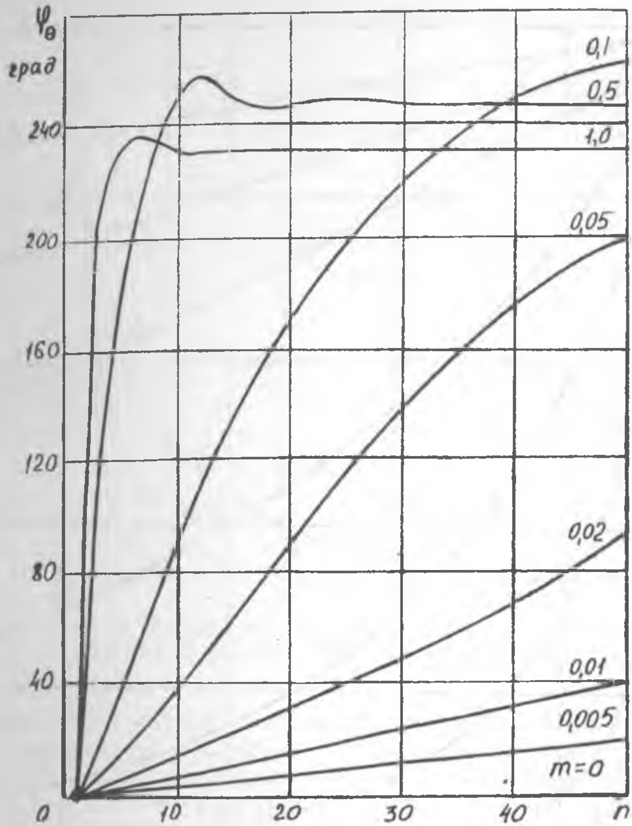

Рис. 2б. Зависимость фазового сдвига тангенциальной компоненты скорости обтекания от расстояния до центра частицы

$$1 + \frac{1}{nm}; \quad B = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}m+1\right); \quad C = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{m}\right); \quad D = \frac{3}{2}\,\frac{1}{n^2 m};$$

$$E = 1 + 2mn; \quad \alpha = m(n-1); \quad m = k_0 R; \quad n = \frac{r}{R}.$$

формулам (10) и (11) были произведены расчеты на ЭВМ оминь» в широком интервале значений m и n. Результаты расов в виде графиков представлены на рис. 1 и 2. Из их анализа дует, что при постоянном n с повышением частоты радиальная ангенциальная составляющие скорости обтекания быстро падат, что означает уменьшение размеров области возмущения руг частицы. Функции $\varphi(n, m)$ и $\psi(n, m)$ при малых m мононно растут с увеличением n. При больших m фазовые сдвиги астают с увеличением n значительно быстрее, при неко-

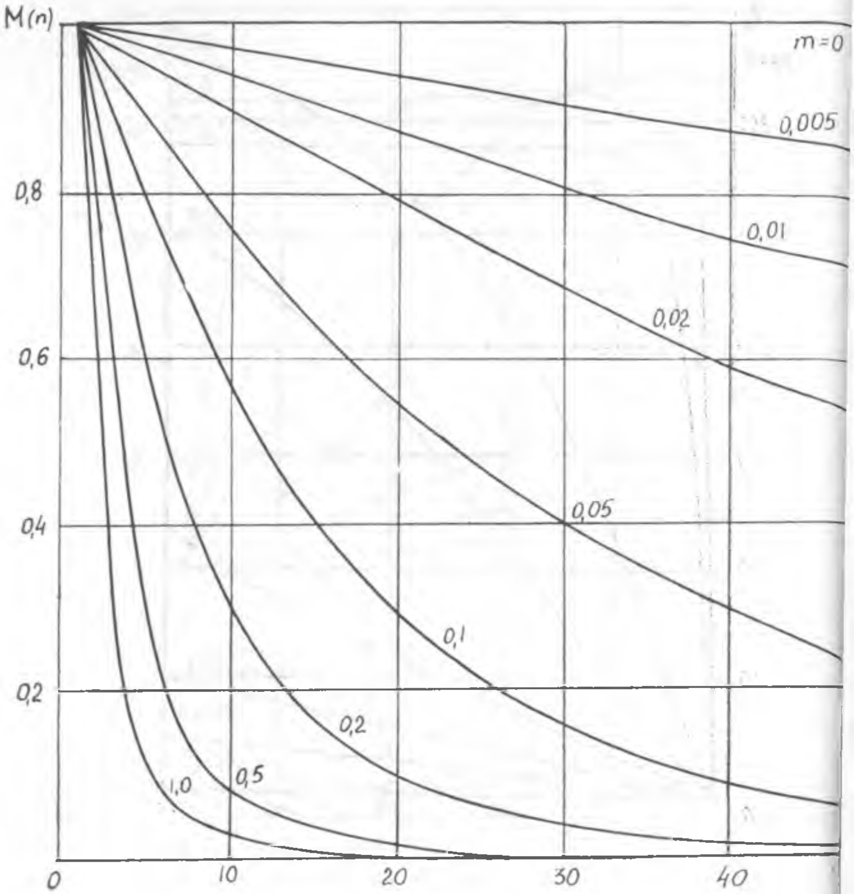

Рис. 3. Зависимость нормированной радиальной компоненты скорости обте
от расстояния до центра частицы

торых значениях n достигают максимума и в дальнейшем изменяются.

При расчетах по взаимодействию частиц использование гр ков зависимостей $V_r'(n)$ и $V_\Theta'(n)$ оказывается неудобным. произведено нормирование функций $V_r'(n)$ и $V_\Theta'(n)$ путем ния их на функции $V_r(n)$ и $V_\Theta'(n)$ соответственно. Семе нормированных радиальной $M(n)$ и тангенциальной $Y(n)$ к нент скорости обтекания для различных m представлен рис. 3 и 4. Для каждого значения m эти графики можно аппр мировать полиномами различной степени и затем представит поненты скорости обтекания в виде произведения стациона компонент V_r и V_Θ на соответствующие полиномы.

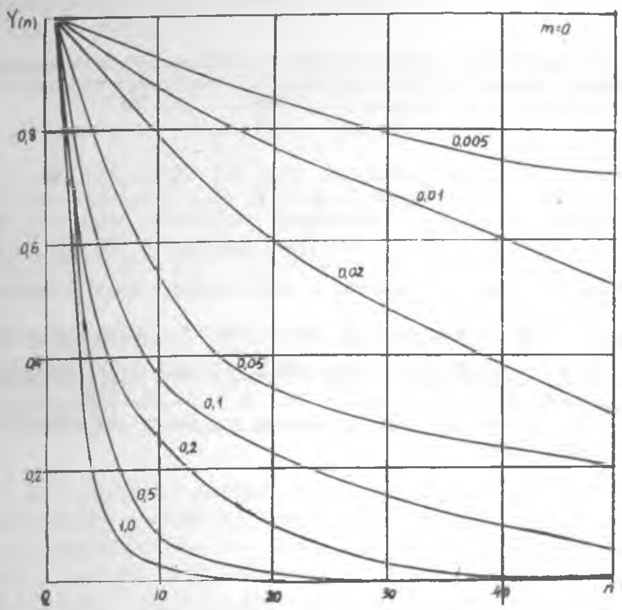

Рис. 4. Зависимость нормированной тангенциальной компоненты от расстояния до центра частицы

В заключение отметим следующее. Пренебрежение нестацио-ным характером движения колеблющихся частиц допустимо ько в той области значений n, в которой $M(n)$ и $Y(n)$ незначи-ьно отличаются от единицы. Положив $M(n)=Y(n)=0{,}7$, с по-дью графиков рис. 3 и 4 получим граничные значения $n_{\text{гр}}$, при орых можно рассчитывать поле скоростей обтекания по фор-ам (1). Значения $n_{\text{гр}}$ приведены в таблице 2.

Таблица 2

m	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	1,0
$n_{\text{гр}}$ $M=0{,}7$	30,7	16	9,8	4,8	3,2	2,0	1,6	1,3
$n_{\text{гр}}$ $Y=0{,}7$	8,0	4,7	2,3	1,8	1,5	1,3	1,2	1,1

ВЫВОДЫ

. Проведены расчеты полей обтекания вокруг колеблющих-астиц.

. Определены границы области, в которой допустимо исполь-ние формул (1) для расчета нестационарных полей обтека-

ЛИТЕРАТУРА

1. Верещагин И. П. Уравнение движения шарообразных частиц в по воздуха при малых числах Рейнольдса. Сб. «Сильные электрические поля в нологических процессах», изд. «Энергия», М. 1969 стр. 60—79.

2. Медников Е. П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозо Изд. АН СССР, М., 1963.

3. Фукс Н. А. Механика аэрозолей. Изд. АН СССР, М., 1955.

4. Подольский А. А., Турубаров В. И. О зависимости степени текания аэрозольных частиц от амплитуды звукового поля при числах нольдса $0,5 \leqslant Re_1' \leqslant 1$. Труды ЛИАП, вып. 45, Л., 1965, стр. 60—63.

5. Дианов Д. Б., Подольский А. А., Турубаров В. И. Ко тельное движение аэрозольных частиц в акустическом поле. Коллоидны т. 29, вып. I, 1967, стр. 69—74.

6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, ГИ М., 1953.

7. Epstein P. S., Carhart R. R. The absorption of sound in suspension emuesions. I. Acoust. Soc. Amer, 1953, v 25, № 3, p 553—565.

8. Коненков Ю. К. О волнах в вязкой жидкости. Акустический Ж, вып. 3, 1962, стр. 320—324