В.М. Барсуков, Ю.П. Щевьев

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ЗВУКОИЗОЛИРУЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЛОСКИЕ СЛОИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

При рассмотрении судовых звукоизолирующих конструкций слоистой композитной структуры приходится сталкиваться с ситуацией, когда один или несколько слоев не могут быть заданы детерминированным образом. Например, образцы одинаковой формы из таких материалов, как стеклопластик, стекловолокно, пенопласт и ряд других, изготовленные по одной технологии, отличаются случайным образом по акустическим свойствам в любом из сечений образца.

В настоящей работе предлагается метод расчета плоских звукоизолирующих конструкций без существенных ограничений на количество детерминированных и содержащих случайные неоднородности слоев.

Пусть в полупространстве I (волновое число K_I) распространяется плоская гармоническая звуковая волна давления (рис.I)

$$p_1 = e^{-ik_1 z + i\omega t} \qquad (I)$$

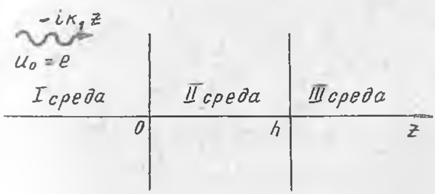

Рис.I. Схема расположения слоев слоистой звукоизолирующей конструкции

Полупространство III полагаем также детерминированным (волновое число Кз). Слой II характеризуется случайной локальной плотностью $\rho_2(z)$ и случайной локальной скоростью звука $c_2(z)$, относительно которых полагаются известными средние значения $\bar{\rho}_2$ и $\bar{c}_2$ (усреднение производится по ансамблю реализаций, а при достаточно большой толщине слоя II и эргодичности - по любой из реализаций). Для отклонений от средних значений $\tilde{\rho}_2(z)$ и $\tilde{c}_2(z)$ полагаем, что

$$\langle\tilde{\rho}_2(z)\rangle = \langle\tilde{c}_2(z)\rangle = 0. \qquad (2)$$

Задачам распространения волн в безграничных средах со случайными параметрами посвящено большое количествой исследований. Пространственно ограниченные задачи менее изучены [1], [2], причем используемый разными авторами аппарат теории случайных функций, как правило, приспосабливается для решения отдельных задач. До настоящего времени не разработана теория расчета, которая единообразно описывала бы распространение волн, в том числе и звуковых, в недетерминированных средах даже простейших конфигураций, например, в плоскослоистой звукоизолирующей конструкции, содержащей слой со случайными неоднородностями.

Точные одномерные уравнения звукового поля в неоднородной среде II, связывающие давление P_2 и скорость звука C_2, представлены в [3] (зависимость от времени для всех величин берется в виде (1)):

$$i\omega P_2 = -\rho_2 c_2^2 \frac{dV_2}{dz}; \quad i\omega V_2 = -\frac{1}{\rho_2}\frac{dP_2}{dz}, \tag{3}$$

где V_2 – скорость частиц среды в звуковой волне.

Вводя нормированное давление $U_2 = P_2/\sqrt{\rho_2}$ и исключая V_2 из уравнений (3), получим для U_2 уравнение волнового типа:

$$\frac{d^2U_2}{dz^2} + k_{II}^2 U_2 = 0, \tag{4}$$

где

$$k_{II}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2\rho_2}\frac{d^2\rho_2}{dz^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{\rho_2^2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2.$$

Волновое число k_{II} зависит от $\rho_2(z)$ и $C_2(z)$, и поэтому является случайной функцией·

$$k_{II}^2 = k_2^2 - \xi(z), \tag{5}$$

где k_2^2 – среднестатистическое значение квадрата волнового числа;

ξ – случайное отклонение от среднего, причем $\langle \xi(z) \rangle = 0$.

Функции $U_i\ (i=1,2,3)$ наряду со среднестатистическими значениями $\langle U_i \rangle = \varphi_i(z)$ содержат также и флуктуирующие добавки $\tilde{U}_i = \psi_i(z)$, т.е.

$$U_i = \langle U_i \rangle + \tilde{U}_i \equiv \varphi_i(z) + \psi_i(z), \tag{6}$$

причем $\langle \tilde{U}_i \rangle = 0$.

В средах I и III нормированные давления $U_i\ (i=1,3)$, очевидно, удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\frac{d^2U_1}{dz^2} + k_1^2 U_1 = 0; \tag{7}$$

$$\frac{d^2U_3}{dz^2} + k_3^2 U_3 = 0. \tag{8}$$

Граничные условия для U_i следуют из условий непрерывности скоростей на границах слоя $z = 0, h$ и давлений. С учетом формул (3) граничные условия имеют вид:

$$\sqrt{\rho_1}\, U_1 = \sqrt{\rho_2}\, U_2 \;; \qquad (9)$$

$$U_1' \rho^{-1/2} = \left[U_2' - \frac{1}{2}(\ln\rho_2)' U_2\right]\rho_2^{-1/2} \qquad (10)$$

при $z = 0$

$$\text{и} \quad \sqrt{\rho_2}\, U_2 = \sqrt{\rho_3}\, U_3 \;; \qquad (11)$$

$$\left[U_2' - \frac{1}{2}(\ln\rho_2)' U_2\right]\rho_2^{-1/2} = U_3\, \rho_3^{-1/2} \qquad (12)$$

при $z = h$.

Граничные условия (9), (10), (11), (12) значительно упрощаются, если пренебречь влиянием флуктуаций ρ_2, c_2 на структуру полей U_i в тонких контактных областях среды II при $z \approx 0$ и $z \approx h$, т.е. :

$$\rho_2(z \approx 0, h) \cong \bar\rho_2 = const;$$

$$U_1 = \rho_{21}\, U_2 \;; \qquad (13)$$

$$\rho_{21}\frac{dU_1}{dz} = \frac{dU_2}{dz} \qquad (14)$$

при

$z = 0$ (15)

$$\text{и} \quad U_2 = \rho_{32}\, U_3 \;;$$

$$\rho_{32}\frac{dU_2}{dz} = U_3 \qquad (16)$$

при $z = h$.

В равенства (13), (14), (15), (16) введены обозначения:

$$\rho_{21} \equiv \sqrt{\frac{\bar\rho_2}{\rho_1}}\,, \quad \rho_{32} \equiv \sqrt{\frac{\rho_3}{\bar\rho_2}}\,. \qquad (17)$$

Чтобы получить уравнения, описывающие средние поля в каждой из сред, усредним (4), (7), (8):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_1^2\right)\langle U_1\rangle = 0 \;; \qquad (18)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_2^2\right)\langle U_2\rangle = \langle \xi(z) U_2(z)\rangle = \langle \xi\varphi_2\rangle; \qquad (19)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+K_3^2\right)\langle U_3\rangle=0 \qquad (20)$$

В правую часть уравнения (19) входит неизвестная функция φ_2 - величина флуктуации U_2.

Уравнение для расчета φ_2 представляет собой разность точного уравнения (4) и (19) и, согласно [2], в квазилинейном приближении имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+K_2^2\right)\varphi_2(z)=\xi(z)\langle U_2\rangle\equiv\xi(z)\psi_2(z). \qquad (21)$$

Уравнения (19) и (21) необходимо решать совместно. Если искать лишь среднее поле $\langle U_2(z)\rangle$, то, выражая $\varphi_2(z)$ из уравнения (21) через $\xi(z)$ и $\psi_2(z)$ и подставляя далее в (19), получим одно уравнение, содержащее лишь $\psi_2(z)$.

Формально правая часть уравнения (21) может иметь смысл плотности источников для $\varphi_2(z)$, распределенных в слое II. В отличие от борновского приближения, в котором в правую часть уравнения типа (21) входит первичное, нерассеянное, поле U_2^0, преломленное в слое с волновым числом K_2, в уравнении (21) имеется усредненное в результате рассеяния на неоднородностях значение $U_2(z)$. Таким образом, в (21) учитывается и многократное отражение и рассеяние волны.

Представим правую часть равенства (21) в виде

$$f(z)\equiv\xi(z)\langle U_2(z)\rangle=\int f(z_1)\delta(z-z_1)\,dz_1, \qquad (22)$$

где $\delta(z-z_1)$ - дельта-функция Дирака.

Функцию $\varphi_2(z)$ будем искать в виде

$$\varphi_2(z)=\int G_2(z,z_1)f(z_1)\,dz_1, \qquad (23)$$

где $G_2(z,z_1)$ - функция Грина в среде II.
Тогда для функции Грина в средах II, I и III получаем уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_2^2\right)G_2(z,z_1)=\delta(z-z_1); \qquad (24)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_{1,3}^2\right)G_{1,3}(z,z_1)=0. \qquad (25)$$

Таким образом, в ходе решения поставленной задачи требуется определить (в частности, как это видно из уравнения (24)) поле δ - образного источника, расположенного в некоторой точке z_1 внутри слоя такой же толщины, что и слой II, но с детерминированным волновым числом.

Следовательно, в целом конструкция та же, что и на рисунке, только слой II на данном этапе решения задачи заменен вспомогательным слоем с волновым числом K_2.

Граничные условия для функций Грина G_i аналогичны условиям (13), (14), (15), (16):

при $z=0$

$$G_1 = \rho_{21} G_2 ; \tag{26}$$

$$\frac{dG_1}{dz}\rho_{21} = \frac{dG_2}{dz}, \tag{27}$$

при $z=h$

$$G_2 = G_3 \rho_{32} ; \tag{28}$$

$$\rho_{32}\frac{dG_2}{dz} = G_3 . \tag{29}$$

Исключив из уравнений (19) и (21) величину $\varphi_2(z)$, приходим к одному интегродифференциальному уравнению для $\varphi_2(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_2^2\right)\psi_2(z) + \int_0^h G_2(z,z_1)\langle\varphi(z)\varphi(z_1)\rangle\psi_2(z_1)\,dz_1 . \tag{30}$$

Будем считать далее, что корреляционные функции $B_\varphi(z,z_1)$ и $B_\mu(z,z_1)$ известны:

$$B_\varphi(z,z_1) = \langle\varphi(z)\varphi(z_1)\rangle = k_2^4\langle\mu(z)\mu(z_1)\rangle = k_2^4 B_\mu(z,z_1), \tag{31}$$

где $\mu(z)$ – относительная величина флуктуации k_{II}^2.

Непосредственный анализ уравнения (30) весьма сложен, поэтому целесообразно исходить из того, что во многих физических задачах имеется близость к δ – коррелированности [4], [5] – $B_\mu(z,z_1)$ имеет резкий максимум в точке $z=z_1$. Это обстоятельство позволяет вместо функции $B_\varphi(z,z_1)$ ввести $B_\varphi^{\text{эфф}}(z,z_1)$, такую, что

$$B_\varphi^{\text{эфф}}(z,z_1) = 2\delta(z-z_1)\,F(z_1); \tag{32}$$

$$F(z_1) = \frac{1}{2}\int_0^h B_\varphi(z,z_1)\,dz_1 = \frac{k_2^4}{2}\int_0^h B_\mu(z,z_1)\,dz_1 . \tag{33}$$

Формула (33) по существу служит для определения функции.

Используя равенства (32), (33), перепишем уравнение (30) в следующем виде:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_2^2\right)\psi_2 = 2\int G_2(z,z_1)\psi_2(z_1)F_2(z_1)\delta(z-z_1)\,dz_1 . \tag{34}$$

Наличие в равенстве (34) δ – функции под знаком интеграла позволяет далее записать:

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi_2 + \left[k_2^2 - 2G_2(z,z_1)F_2(z_1)\right]\psi_2(z) = 0 . \tag{35}$$

Таким образом, среднестатистически слой II эквивалентен некоторому неоднородному слою с детерминированными функциями $G_2(z)$ и $F_2(z)$, входящими в волновое число. Важно отметить также, что функцию Грина достаточно знать лишь при совпадающих аргументах $z=z_1$, т.е. в той же точке, где расположен δ – образный источник.

Полагая, что функция $\mu(z)$ однородна, т.е. $B_\mu(z,z_1)$ зависит лишь от разности аргументов $\tau = z - z_1$, и учитывая, кроме того, остроту $B_\mu(z, z_1)$, получим далее:

$$F(z) = \frac{k_2^4}{2}\int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(z - z_1)\, dz_1 = \frac{k_2^4}{2}\int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\tau)\, d\tau . \tag{36}$$

В терминах дисперсии $\langle \mu^2 \rangle$ и интегрального масштаба корреляции τ_0 [6] можно записать в виде

$$\tau_0 \equiv \frac{1}{\langle \mu^2 \rangle}\int_{-\infty}^{\infty} B_\mu(\tau)\, d\tau \tag{37}$$

Для $F_2(z)$ получим следующее выражение:

$$F_2(z) = \frac{k_2^4}{2}\tau_0 \langle \mu^2 \rangle . \tag{38}$$

С учетом соотношений (36) и (38) уравнение (35) приобретает вид:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_2^2 \mathcal{E}_0(z)\right]\psi_2(z) = 0, \tag{39}$$

где

$$\mathcal{E}_0(z) \equiv 1 - \langle \mu^2 \rangle k_2^2 \tau_0 G_2(z, z_1). \tag{40}$$

Полученное уравнение следует решать совместно с (I8), (20) и с граничными условиями типа (I3) - (I6). Явный вид функции G_2 входящей в уравнение (35), находится легко и имеет вид:

$$G_2(z, z_1)_{z=z_1} = \delta_G + A_G e^{-2ik_2 z} + B_G e^{2ik_2 z}, \tag{4I}$$

где

$$\delta_G \equiv \frac{e^{-ik_3 h}}{2ik_2}\frac{S_{32}}{\Delta} + \frac{1}{2ik_2} + \frac{1}{S_{21}}\frac{e^{ik_2 h}}{2ik_2\Delta} ; \tag{42}$$

$$A_G \equiv \frac{e^{ik_2 h}}{2ik_2\Delta}, \quad B_G \equiv \frac{S_{32}}{S_{21}}\frac{e^{-ik_2 h}}{2ik_2\Delta} ; \tag{43}$$

$$S_{32} \equiv \frac{\rho_{32} k_2 - k_3}{\rho_{32} k_2 + k_3}, \quad S_{21} \equiv \frac{k_2\rho_{12} + k_1\rho_{21}}{k_2\rho_{12} - k_1\rho_{21}} ; \tag{44}$$

$$\Delta \equiv S_{32} e^{-ik_2 h} - S_{21} e^{ik_2 h} \tag{45}$$

Подставляя равенство (4I) - (45) в уравнение (39) и вводя безразмерную координату $x = 2k_2 z$, получим:

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \left[\frac{1}{4} + \varepsilon\left(\sigma + A e^{-ix} + B e^{ix}\right)\right]\psi_2 = 0; \tag{46}$$

$$\varepsilon = \frac{k_2\tau_0}{4}\langle \mu^2 \rangle = \frac{\pi}{2}\frac{\tau_0}{\lambda_2}\langle \mu^2 \rangle ; \tag{47}$$

$$\sigma \equiv -k_2\delta_G, \quad A \equiv -k_2 A_G, \quad B \equiv -k_2 B_G . \tag{48}$$

Поскольку использована квазилинеаризация, то $\langle \mu^2 \rangle < 1$.

Кроме того, если считать флуктуации мелкомасштабными $(\sigma_0/\lambda_2 \ll 1)$, то $\varepsilon \ll 1$. Наличие же малого параметра $\varepsilon \ll 1$ позволяет решить поставленную задачу до конца.

Решение уравнения (46) очевидно, т.е. функция должна содержать этот малый параметр в явном виде. Учитывая это замечание и следуя методу двухпараметрического разложения, подробно изложенному в работе [7], полагаем:

$$\psi_2(x,\varepsilon) = F_0(x,\tilde{x}) + \varepsilon F_1(x,\tilde{x}) + \varepsilon^2 F_2(x,\tilde{x}) + \dots \qquad (49)$$

В такой форме сразу учитывается зависимость ψ_2 не только от быстрой переменной X, но и от медленной переменной $\tilde{x} = \varepsilon x$. Подстановка разложения (49) в уравнение (46) и приравнивание членов, содержащих одинаковые степени ε , приводит к рекурентной цепочке уравнений для F_i . Причем для F_0 имеем

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{4} F_0 = 0 .$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$F_0 = M(\tilde{x}) e^{ix/2} + N(\tilde{x}) e^{-ix/2} = \psi_2(x,\varepsilon) + O(\varepsilon),$$

где

$$M(\tilde{x}) = b_2 e^{-i\gamma\tilde{x}}, \quad N(\tilde{x}) = a_2 e^{i\gamma\tilde{x}} .$$

Здесь a_2 и b_2 - константы. Под γ подразумевается тот из комплексных корней " дисперсионного" уравнения

$$\gamma^2 = \sigma^2 - AB , \qquad (50)$$

для которого $\operatorname{Im}\gamma > 0$.

Таким образом, общее решение уравнения (46) с точностью до $O(\varepsilon)$ имеет вид:

$$\psi_2(x) = a_2 e^{-ik_2(1-2\gamma\varepsilon)z} + b_2 e^{-ik_2(1-2\gamma\varepsilon)z} . \qquad (51)$$

Или, что то же

$$\psi_2(x) = a_2 e^{-i\varkappa_2 z} + b_2 e^{i\varkappa_2 z}, \qquad (52)$$

где $\varkappa_2 \equiv k_2(1-2\gamma\varepsilon)$.

Как видно из соотношений (51) и (52), $\varkappa_2$ играет роль эффективного волнового числа, в общем случае комплексного даже при вещественном ε среднестатистического слоя II.

Среднестатистическая функция нормированного давления удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \varkappa_2^2 \psi_2 = 0 . \qquad (53)$$

С учетом равенства (53), легко получить выражение для средних коэффициентов отражения $\langle R \rangle$ и прохождения $\langle T \rangle$ методом, изложенным в работе [3].

Выводы

1. Предложенная методика может применяться при изучении распространения звуковых волн в плоскослоистых конструкциях с произвольным количеством детерминированных и случайных слоев.

2. Увеличение числа слоев не вносит принципиальных трудностей, однако окончательные формулы усложняются и для получения численных результатов могут потребоваться расчеты на ЭВМ.

3. Среднестатистически случайный слой эквивалентен некоторому неоднородному слою с волновым числом, являющимся комплексной периодической функцией пространственной координаты.

4. Общая теория уравнений с периодическими коэффициентами не позволяет получать решение в виде, удобном для практического расчета. Поэтому в работе использован метод двухпараметрического разложения, позволяющий получить приближенное решение этих уравнений.

Литература

1. Рыжов Ю.А. Распространение в одномерной случайно неоднородной среде в приближении марковского диффузионного процесса. Труды VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, т.I, с.116. Отдел научных изданий ВНИИРИ, Ереван, 1973.
2. Rosenbaum S. On the coherent wave motion in bounded randomly fluctuating regions Radio Science, vol 4, 1969, N8, p 709-719.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., "Наука", 1973.
4. Татарский В.И. Некоторые методы решения дифференциальных уравнений. "Радиофизика" т. XVII, 1974, №4, с.570.
5. Кляцкин В.И., Татарский В.И. Приближение диффузионного случайного процесса в некоторых нестационарных задачах физики. УФН т.110, 1973, № 4, с. 499.
6. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., "Наука", 1967.
7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., "Мир", 1972.
8. Чернов Л.А. Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. М., АН СССР, 1958.