КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 61, 1973 г.
Исследования по акустике, электрофизике и радиоэлектронике

В. Д. КУЗЕНКОВ, А. В. СЕМИГИН

ОРТОГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МНОГОЧЛЕНОВ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕМЕННОГО МЕЙКСНЕРА

Расчет переходных процессов в линейных импульсных систе- представляет собой сложную задачу. Методы расчета, осно-нные на определении оригинала по его изображению, часто зываются затруднительными. Задача может быть упрощена ем разложения оригинала в ряд по ортогональным многочле- дискретного переменного способом, аналогичным применяе-му в теории непрерывных систем.

Задача расчета переходного процесса сводится к решению кретного аналога интегрального уравнения Лапласа вида:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \tag{1}$$

уравнения:

$$F(w) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot \left(\frac{1-w}{1+w}\right)^{k}, \tag{2}$$

$F(z)$; $F(w)$, z и w — изображения искомой функции дискрет- переменного; k — безразмерное целочисленное время.

Для простоты $\bar{z}$— и $\bar{w}$— изображения обозначены одним сим-ом. При использовании ортогонального метода решение ищется иде ряда:

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \varphi_n(k) \tag{3}$$

A_n — коэффициенты разложения;
$\varphi_n(k)$ — ортогональные многочлены дискретного переменного коэффициентов разложения можно написать [3]

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot W(k) \cdot \varphi_n(k) \tag{4}$$

Коэффициенты A_n могут быть определены через момен[т]
комой функции $f(\kappa)$.

В свою очередь, моменты искомой функции определяют
статочно простым способом путем дифференцирования и
жений аналогично тому, как это сделано в [1].

В качестве базиса разложения удобно использовать о
нальные многочлены дискретного переменного Мейкснера.

Выражение этих многочленов, функция веса, свойство о
нальности имеют вид [4]:

$$m_n(k;\ \beta,\ c) = (\beta + k)_n\, F\left(-n,\ -k,\ 1-\beta-n-k,\ \frac{1}{c}\right)$$

$$W(k) = \frac{c^k\,(\beta)_k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} W(k)\, m_n(k;\ \beta,\ c)\cdot m_l(k;\ \beta,\ c) = n!\,(\beta)_n\, c^{-n}\,(1-c)^{-\beta}\cdot\delta_{nl}$$

$$\beta > 0;\quad 0 < c < 1$$

где δ_{nl} — символ кронекера.

Для упрощения задачи желательно сократить число па[р]
ров многочленов. Кроме того, удобно использовать ортонор
ванные, с весом, равным единице, многочлены. Примем в ф
лах (5), (6), (7) $\beta=1$ и представим многочлены в виде:

$$\overline{m}_n(k;\ 1,\ c) = (n!)^{-1}\,(1-c)^{1/2}\, c^{\frac{n+k}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p\, \frac{n!\,(k+n-p)!}{(n-p)!\,(k-p)!}\cdot\frac{c^{-p}}{p!}$$

Для многочленов (8) свойство ортогональности определ
выражением:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{m}_n(k;\ 1,\ c)\cdot\overline{m}_l(k;\ 1,\ c) = \delta_{nl}.$$

На практике для разложения используется не бесконечн
усеченный ряд (4):

$$f_m(k) = \sum_{n=0}^{m} A_n\cdot\varphi_n(k),$$

где $f_m(\kappa)$ — функция, аппроксимирующая функцию $f(\kappa)$.

Вследствие усечения ряда возникает погрешность, ко
определим следующим образом:

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [f(k) - f_m(k)]^2$$

согласно выражениям (3), (4), (9), (10) получим:

$$\varepsilon^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\,.$$

Переходные процессы в автоматических системах со сосредо-енными постоянными представляются выражением вида:

$$f(k) = R_e \sum_{n=0}^{N}{}' a_n \cdot e^{-b_n k + j\Theta_n} \tag{13}$$

где a_n, Θ_n — постоянные
$= \alpha_n + j\beta_n$ — комплексные безразмерные величины.

Поэтому целесообразно рассмотреть вопросы применимости ода, его точности на примере разложения функции

$$f(k) = R_e\, e^{-bk} \tag{14}$$

$$b = \alpha + j\beta.$$

Определим коэффициенты A_n разложения функции (14) в ряд). Согласно формулам (9), (8), (14) получим:

$$A_n = R_e \left\{ c^{\frac{n}{2}} (1-c)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{c^{-p}}{(n-p)!\,p!} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{k}{2}} e^{-bk} \frac{(k+n-p)}{(k-p)!} \right\} \tag{15}$$

Внутреннюю сумму выражения (15) можно представить в е:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^{\frac{k}{2}} e^{-bk} \frac{(k+n-p)!}{(k-p)!} = e^{-bp} c^{\frac{p}{2}} \frac{d^n}{dq^n} \frac{q^n}{1 - q c^{1/2} e^{-b}} \bigg|_{q=1} \tag{16}$$

Выполнив дифференцирование в (16) и подставив результаты 5) получим:

$$A_n = R_e \left\{ \frac{(1-c)^{1/2}}{1 - c^{1/2} e^{-b}} \cdot \left(\frac{c^{1/2} - e^{-b}}{1 - c^{1/2} e^{-b}} \right)^n \right\}. \tag{17}$$

К этому же результату можно придти, используя свойство иетрии, производящую функцию для многочленов Мейкснера

$$(\beta)_k \cdot m_n(k, \beta, c) = (\beta)_n \cdot m_k(n; \beta, c) \tag{18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_n(k, \beta, c) \cdot \frac{z^n}{n!} = \left(1 - \frac{z}{c}\right)^k \cdot (1-z)^{-k-b}, \tag{19}$$

$|z| < \min(1; |c|)$.

Погрешность зависит как от степени усечения ряда, так и от сходимости. Можно показать, что при разложении в ряд ции (14) существует оптимальное значение параметра C, для рого погрешность минимальна:

$$C^{\frac{1}{2}}_{\text{опт}} = \frac{1 + |e^{-в}|^2 - \sqrt{(1 + |e^{-в}|^2) - 4(\mathrm{R}e e^{-в})^2}}{2\mathrm{R}e e^{-в}}.$$

рактически точное значение оптимального параметра C опре-ь затруднительно, так как параметры функции неизвестны.

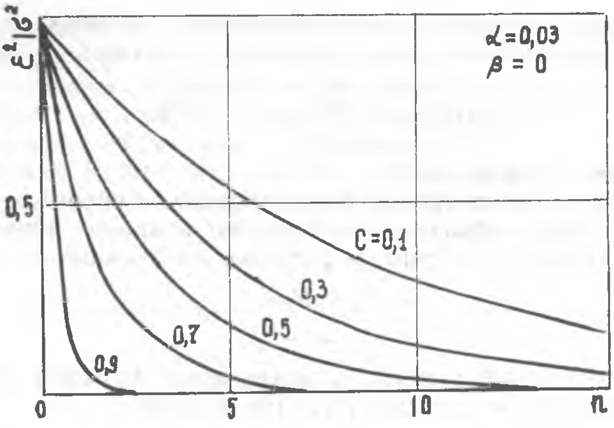

Рис. 1.

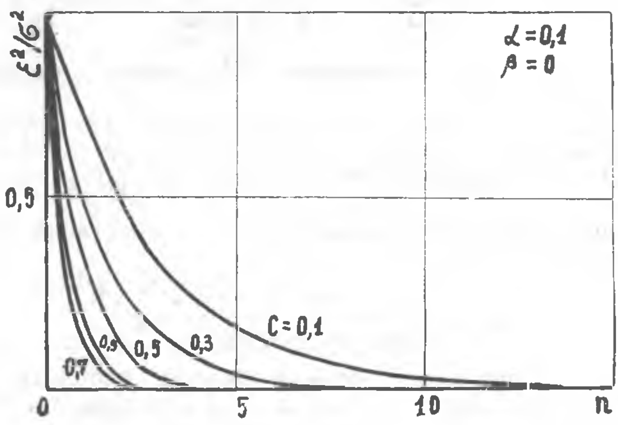

Рис. 2.

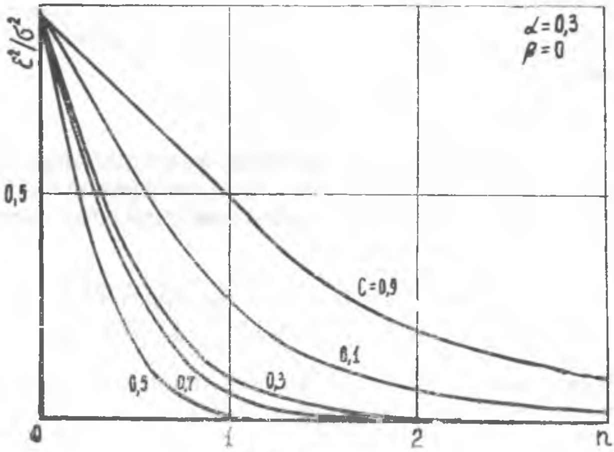

Рис. 3.

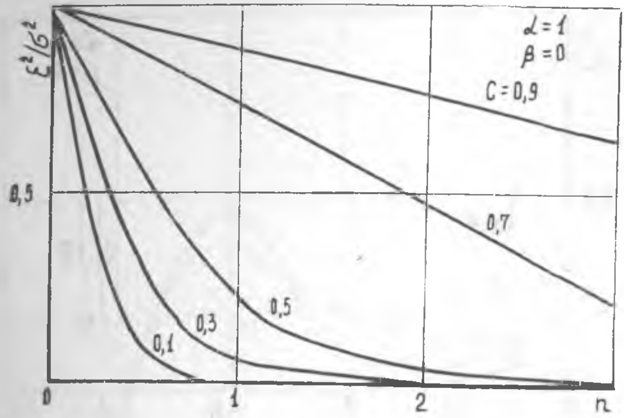

Рис. 4.

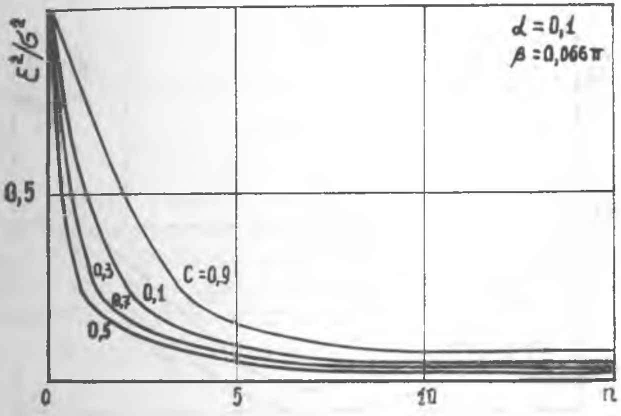

Рис. 5.

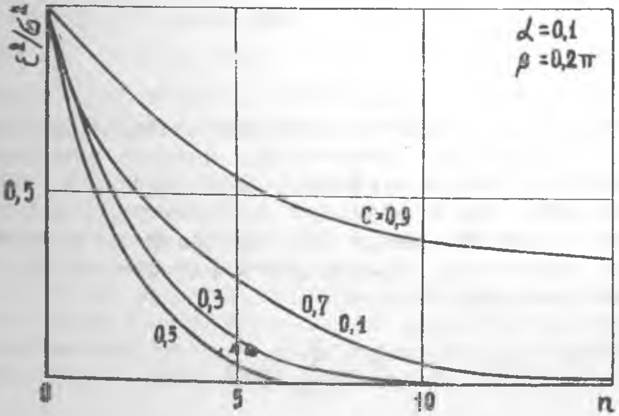

Рис. 6.

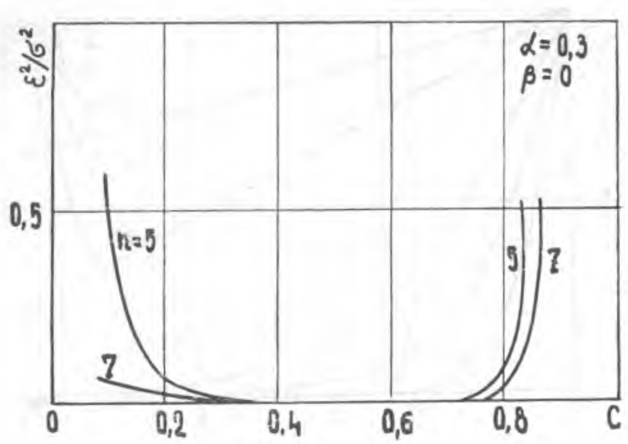

Рис. 7.

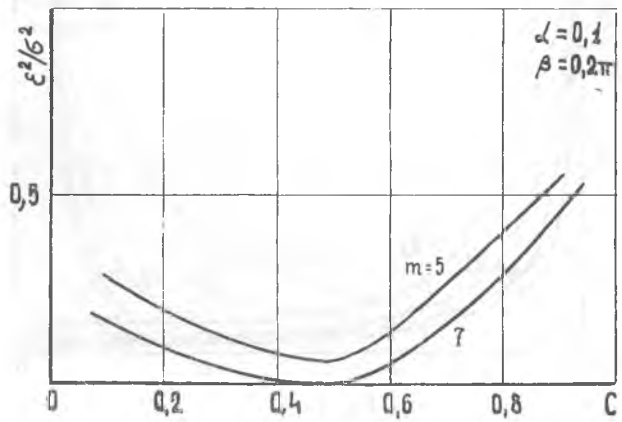

Рис. 8.

Однако часто можно указать некоторый интервал возможных [illegible] чений этих параметров. Представляет интерес определение [illegible] ветствующего интервала параметра многочленов C, обеспечи[illegible] щего достаточно малую величину погрешности разложения. [illegible] определения этого интервала был проделан машинный экс[illegible] мент: были рассчитаны коэффициенты разложения A_n, вел[illegible] нормированной погрешности ε^2/σ^2,

где $$\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} f^2(k)$$

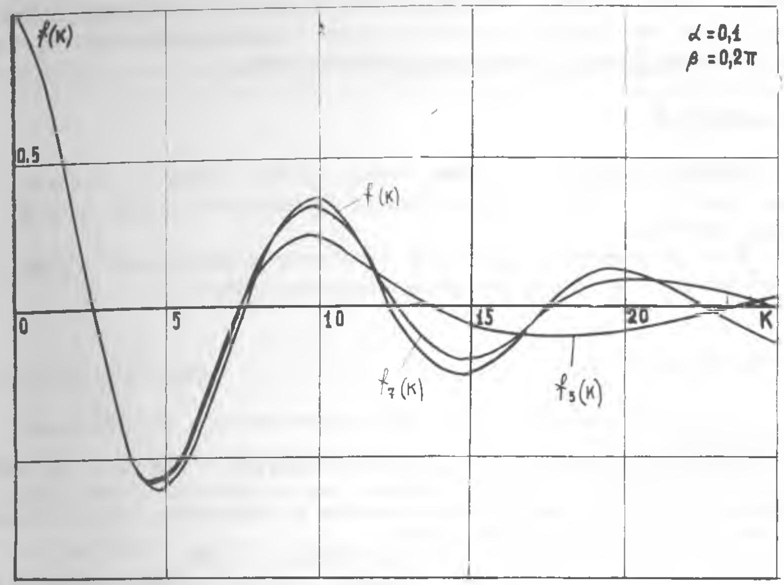

Рис. 9.

ряда значений параметров функции (14), параметра много-
енов C и степени усечения ряда (10).

На рис. 1—6 приведены графики нормированной погрешности
рункции от числа членов в разложении. На этих графиках ве-
иина C принята в качестве параметра.

На рис. 7—8 приведены графики $\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} = f(c)$

$n = 5$ и $n = 7$.

Из приведенных графиков следует, что достаточно высокая точ-
ть аппроксимации может быть достигнута при числе членов
ложения $5 \div 10$, а в некоторых случаях и $3 \div 5$.

Функция $\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} = f(c)$ имеет пологий экстремум, поэтому вы-
параметра C не является критичным. Следует, однако, от-
ить, что при неудачном выборе параметра C возможна заметная
решность.

Для иллюстрации вышесказанного на рис. 9 дается пример
ложения функции $f(к) = c^{-bк}$ в ряд по ортогональным много-
нам Мейкснера для комплексного, при разном числе членов в
роксимирующем ряде: ($m=5$; $m=7$).

Как следует из графиков, эталонная и аппроксимирующая функ-
весьма близки в области «малого» времени, где эти функции
ют существенные значения. В области большого времени функ-
различаются заметным образом, однако это не вносит суще-

ственной погрешности, так как в этой области значения функ малы. При увеличении числа членов разложения область уд летворительной аппроксимации расширяется.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотренный в статье метод может быть с успехом менен для исследования переходных процессов в импульсных нейных системах.

2. Для обеспечения высокой точности желательно иметь бое представление о характере исследуемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, Машиностроение, 1967.

2. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д. О нальный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управ на основе понятия моментов. «Автоматическое регулирование и вычислите техника», вып. 8, Машиностроение, 1968.

3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.

4. Бейтман Г. и Эрдейн. Высшие трансцендентные функции. Н 1966.