КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 61, 1973 г.
Исследования по акустике, электрофизике и радиоэлектронике

Ю. С. БЫХОВСКИЙ

# О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

При решении многих технических задач возникает проблема [...]ределения средней по объему температуры в какой-либо опре[...]енный момент времени. В качестве объекта измерения (*ОИ*) [...]кно рассматривать тело, находящееся в поле теплового излу[...]ия нескольких источников со случайной интенсивностью. Объ[...] измерения вращается со случайной скоростью и в случайном [...]равлении. Для измерения температуры используются датчики, [...]ность которых характеризуется $\sigma_g$, а взаимодействие с *ОИ* [...]исходит в пространстве $\Delta r_g = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ и во времени $\Delta t g$.

В настоящей работе рассматривается вопрос о предельно до[...]жимой точности вычисления средней по объему температуры [...]ависимости от количества датчиков, их точности и дисперсии [...]чений температуры $\sigma_T^2$ в различных точках. Температурное по[...] являющееся функцией пространственных и временных пара[...]ров, может быть задано своим $n$-мерным распределением

$$[...] T_1 \ldots T_n\} dT_1 \ldots dT_n = P\{T_\nu \leqslant T(Q_\nu) < T_\nu + dT_\nu, \ \nu = 1, 2 \ldots n\}$$

[...]сь $Q = (t, x, y, z)$ обозначает точку поля. Количество отсчетов [...]ля *ОИ*, ограниченного пространством $V_{ои}$, и при ограниченном [...]рвале времени наблюдения $t_н$ определяется из выражения

$$n = \frac{V_{0и}}{\rho_0} \cdot \frac{t_н}{\tau_0},$$

[...] $\rho_0$ и $\tau_0$ — интервалы корреляции по пространству и по време[...]

[...]емпературное поле внутри *ОИ* может быть описано с помощью [...]ференциальных уравнений, однако неопределенность гранич[...] условий из-за случайной величины и направления теплового [...]чения не дает возможности воспользоваться этим описанием.

[...]68

В качестве первого приближения можно предположить, случайное поле температуры имеет следующую модель

$$T = \overline{T(x, y, z)}(t) + \overset{\circ}{T}(x, y, z)$$

Здесь $\overline{T}(t, y, z)$ — случайное среднее по пространству знач температуры;

$\overset{\circ}{T}(x, y, z)$ — центрированное случайное поле температур.

В частном случае будем считать случайный процесс стацио ным с корреляционной функцией $\sigma^2{}_{\text{т}t} R_{\text{т}}(\tau)$, а случайное поле однородным эргодическим с корреляционной функцией $\sigma^{\circ}_{\text{т}r2}$ R

Истинное значение средней температуры в какой-либо оп ленный момент времени можно представить в виде математич го ожидания, т. е.:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{V_{\text{ои}}} \int\limits_0^{V_{\text{ои}}} T(r)\, dr = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T f[T(r)] dT,$$

где $V_{\text{ои}}$ — пространство, занимаемое объектом измерения;

$T_{\text{r}}$ — температура в точке с координатами $r = x, y, z$;

$f[T(r)]$ — плотность вероятности значений температур в к либо точке *ОИ*.

Задачей настоящего исследования является определение ности вычисления $T_{\text{ср}}$, т. е. средней по пространству *ОИ* тем туры, но не средней по времени $T(t, r)$.

Для определения истинного значения необходимо произв измерения идеальным датчиком, у которого пространство вз действия, время преобразования и погрешности стремя нулю, и отсутствует энергетическое взаимодействие между чиком и *ОИ*. Таких абстрактных датчиков принципиально не может, так как уменьшение времени взаимодействия за собой увеличение полосы пропускаемых частот, а расши полосы частот всегда приводит к увеличению погрешности. этого, нулевое пространство взаимодействия потребует бес но большого количества датчиков, а при отсутствии энерг ского взаимодействия невозможны никакие измерения или образования. Можно предположить, что реальные датчики на выходе сигнал, функционально связанный с истинными ниями температуры в пределах пространства взаимодействи этом выходной сигнал всегда содержит помеху, обусловл чувствительностью датчика не только к измеряемому пара но и к целому ряду мешающих параметров. Поэтому пок реального датчика можно представить в виде

$$T_g = \frac{1}{\Delta t_g} \cdot \frac{1}{\Delta r_g} \int\limits_0^{\Delta t_g} \int\limits_0^{\Delta r_g} F[T(t, r) dt dr + \xi.$$

сь $\Delta t_g$ и $\Delta r_g$ — время и пространство взаимодействия датчика И.

$F$ — оператор, характеризующий воздействие температур в личных точках пространства взаимодействия датчика на вы-ной сигнал;

$\xi$ — случайная величина погрешности датчика из-за всевоз-кных факторов. Среднеквадратичное значение этой величины $\overline{\sigma_g}$ определяет погрешность датчика.

Для измерения температур оператор $F$ является функцией странственно временных координат точки относительно про-нственного расположения датчика и начала времени измере- Однако, упрощая рассматриваемую задачу, допустим, что атор $F$ — постоянная величина для всего пространства вза-действия датчиков с $ОИ$, т. е.

$$F[T(t, r)] = 1 \quad \begin{matrix} t \in \Delta t_g \\ r \in \Delta r_g. \end{matrix}$$

допущение будет тем меньше сказываться на результатах вы-ений, чем больше датчиков используется для измерения. етом этого показания датчика будут иметь вид

$$T_g = \frac{1}{\Delta t_g} \cdot \frac{1}{\Delta r_g} \int_0^{\Delta t_g} \int_0^{\Delta r_g} T(t, r) \, dt \, dr + \xi. \qquad (1)$$

м образом, вместо истинных значений реальный датчик поз-ет получить средние по пространству $\Delta r_g$ и времени $\Delta t_g$ зна-я температуры с погрешностью $\sigma_g$. Разность между истинным ением температуры в точке $T$ и $T_g$ будем считать пренебрежи-алой величиной по сравнению с $\sigma_g$.

ля решения задачи о точности определения среднего необ-мо определить дисперсию значений температуры во времени ространстве

$$\overline{[T(t, r) - \overline{T(t, r)}]^2} = \sigma_T^2.$$

неслучайную величину реально можно определить двумя пу-

ервый путь заключается в том, что по показаниям датчиков, ложенных на поверхности $ОИ$, можно с некоторой погреш-ю определить граничные условия, т. е. в этом случае модель тановится детерминированной, и определение флюктуаций ратуры внутри $ОИ$ может производиться аналитически. Этот определения средней температуры и погрешности ее вычис- связан со значительными математическими трудностями. для простейшего случая стационарного воздействия внеш-излучения на сферический объект, нам не удалось обнару- готового решения о распределении температурного поля Л. 2].

Реальная задача значительно сложнее. Необходимо опре[д] поле температуры внутри *ОИ* при переменном случайном н[а]лении и нестационарном случайном воздействии излуча[...] Возможно, такую задачу можно было бы решить для ка[...] типовых случаев, но решение наверняка будет очень сло[...] Кроме того, эффективность этого решения будет очень низ[...] случаев малого количества датчиков, так как граничные [...]вия (температура на поверхности *ОИ*) будут определены с [...]шой погрешностью.

Другой путь заключается в экспериментальном определен[...]ля температур на поверхности и внутри *ОИ*. Эти экспериме[...]ные данные можно получить не только при натурных испыт[...] но и путем моделирования. При статистической обработке [...]шого объема экспериментальных исследований можно опре[...] интересующую нас дисперсию $\sigma_\text{т}^2$

Размещение датчиков по *ОИ*, очевидно, целесообразно [...] таким образом, чтобы каждый из них давал максимальную и[...]мацию о распределении температур. Известно, что этому [...]вию отвечает размещение датчиков на участках с независи[...] значениями температур. Интервал между такими участками [...]деляется интервалом корреляции. В общем случае интерва[...]реляции во времени и в пространстве может быть опреде[...] соотношения [Л. 3.].

$$\overline{T(t, r)\cdot T(t+\tau_0, r+\rho_0)} = \sigma_g^2,$$

где $\tau_0$ и $\rho_0$ — интервалы корреляции во времени и простран[...]
$\sigma_g^2$ — дисперсия показаний датчика, обусловленная е[...]грешностью.

При размещении датчиков нас интересует прежде всег[...]странственный интервал корреляции $\rho_0$. Временный ин[...] корреляции $\tau_0$ отвечает на вопрос о частоте измерений. Д[...]ределения же температуры в определенный момент времен[...] отношение $\dfrac{\Delta t_g}{\tau_0}$ характеризует ошибку. Чем больше это от[...]ние, тем больше показания датчика могут отличаться от [...]ратуры в конкретный момент времени. Для реальных [...] обычно выполняется условие $\Delta tg << \tau_0$, и погрешностью из[...]стоянной времени датчика можно пренебречь.

Пространственный интервал корреляции $\rho_0$ полностью [...]деляется дисперсией значений температуры по *ОИ* и диспе[...] показаний преобразователя. Число независимых участков *О*[...]дет

$$n_\text{опт} = \frac{V_\text{оп}}{\rho_0}$$

Средняя температура, определенная $n_\text{опт}$ датчиками, распол[...]

ми на некоррелированных участках *ОИ*, определится следую-
м выражением:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{gi} \pm \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

Предельная точность определения средней температуры при $<<\tau_0$ вычисляется из выражения

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_g}{\sqrt{n}} . \tag{5}$$

Выразим $n_{\text{опт}}$ через дисперсию температуры *ОИ* и дисперсию казаний датчика. Дисперсия температуры

$$\sigma_{\text{т}}^2 = \sigma_{\text{т}t}^2 + \sigma_{\text{т}r}^2$$

Здесь $\sigma_{\text{т}}^2$ — дисперсия средней по пространству температуры времени; $\sigma_{\text{т}r}^2$ — дисперсия значений температуры по прост-ству.

Предположим, что функцию корреляции случайного одномер-о поля можно представить в виде

$$\overline{T(t, r)\, T(t+\tau,\ r+\rho)} = \sigma_{\text{т}t}^2 \cdot e^{-\alpha\tau} + \sigma_{\text{т}r}^2\, e^{-\beta\rho} , \tag{6}$$

$\alpha$ — показатель, зависящий как от параметров источников лового облучения, так и от теплофизических свойств *ОИ*;
$\beta$ — показатель, зависящий в основном только от теплофизи-ких свойств *ОИ*.

да в соответствии с 2 и 6

$$\sigma_g^2 = \sigma_{\text{т}r}^2\, e^{-\beta\rho} , \tag{7}$$

тервал корреляции по пространству будет

$$\rho_0 = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sigma_{\text{т}r}^2}{\sigma_g^2} . \tag{8}$$

овательно, число некоррелированных участков *ОИ* будет

$$n_{\text{опт}} = \frac{V_{\text{оп}}}{\rho_0} = \frac{\beta V_{\text{оп}}}{\ln \sigma_{\text{т}r}^2 - \ln \sigma_g^2} , \tag{9}$$

едельная точность определения средней по пространству *ОИ* ературы в какой-либо момент времени

$$\sigma_{\text{ср}} = \sigma_g \sqrt{\frac{\ln \sigma_{\text{т}r}^2 - \ln \sigma_g^2}{V_{\text{оп}}\, \beta}} \tag{10}$$

бласть применения этого выражения ограничена некоторы-отношениями. Очевидно, пространство взаимодействия дат-должно быть меньше пространства корреляции, т. е. $\Delta r_g \leqslant \rho_0$. ичение точности датчика увеличивает пространство корреляции, однако выражение 10 применимо только в случае, если

$$\rho_0 \leqslant V_{\text{оп}}, \text{ т. е. } n_{\text{опт}} = \frac{\beta V_{\text{оп}}}{\ln \sigma_{\text{т}r}^2 - \ln \sigma_g^2} \geqslant 1.$$

Уменьшение точности датчика приводит к уменьшению пр ранства корреляции, но это пространство не должно быть ме ше пространства взаимодействия датчика, т. е. $\rho_0 \geqslant \Delta r_g$ и

$$n_{\text{макс}} = \frac{V_{\text{оп}}}{\Delta r_g}.$$

Оптимальное число датчиков определяется числом некоррел ванных участков, зависит от чувствительности датчика и ле в интервале от

$$n_{\text{мин}} = \frac{\beta V_{\text{оп}}}{\ln \sigma_{\text{т}r}^2 - \ln \sigma_{g\,\text{мин}}^2} = 1.$$

$$n_{\text{макс}} = \frac{\beta V_{\text{оп}}}{\ln \sigma_{\text{т}r}^2 - \ln \sigma_{g\,\text{макс}}^2} = \frac{V_{\text{оп}}}{\Delta r_g}.$$

При использовании оптимального количества датчиков ность вычисления среднего определяется выражением 10.

В реальных условиях число датчиков обычно значите меньше $n_{\text{опт}}$, и располагаются они не по всему объему *ОИ*, а т ко по поверхности. Естественно, максимальная погрешность о деления средней температуры будет при отсутствии датчиков, при $n = 0$. В этом случае $\sigma_{\text{ср}} = \sigma_{\text{т}} = \sqrt{\sigma_{\text{т}t}^2 + \sigma_{\text{т}r}^2}$ полно определяется априорной информацией, полученной в резул статистической обработки ранее проведенных эксперименто

При увеличении числа датчиков погрешность определения него уменьшается в соответствии с выражением 5. Однако шем случае увеличение числа датчиков неодинаково влияе составляющие дисперсии температур $\sigma_{\text{т}}^2$. Так, при $n=1$ диспе температуры во времени уменьшается до дисперсии да $\sigma_{\text{т}t}^2 = \sigma_g^2$, а дисперсия температуры в пространстве *ОИ* $\frac{\sigma_{\text{т}r}^2}{n} = \sigma$ изменяется. При $1 < n < n_{\text{опт}}$ погрешность практически оп ляется выражением

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\sigma_g^2 + \sigma_{\text{т}r}^2}{n}}$$

конечно, при условии, что датчики установлены на нек лированных участках *ОИ*.

Если в результате обработки большого количества экспер тальных данных дисперсию температуры элементарных уча можно представить в виде $\sigma_{\text{т}}^2 = \sum_j \sigma_j^2$, то точность опреде среднего будет зависеть не только от количества и точност чиков температуры, но и от точности определения различ раметров. Например, неопределенность средней температуры жет быть сведена к минимуму, если для определенного момента емени $t_0$ будут известны координаты *ОИ*, его ориентация, интенвность и направление излучения источников тепла. В этом слуе определение средней температуры, по косвенным данным, жеть иметь достаточно высокую точность.

Таким образом, рассмотрена модель объекта, у которого значия температур элементарных участков имеют случайный хактер во времени и в пространстве. Для этой модели получено ражение для предельной точности вычисления средней темпераоы в зависимости от дисперсии значений температур *ОИ*, дисэсии показаний датчика и теплофизических свойств *ОИ*.

Рассмотрено влияние числа датчиков на точность определения эдней температуры.

Для практического использования полученных результатов эбходимо, на базе экспериментальных исследований, рассчитать нкции корреляции температур элементарных участков во времи и в пространстве. Точность определения средней температу- может быть увеличена, если определить корреляцию темпера- элементарных участков с параметрами *ОИ*, например, скотью и направлением вращения *ОИ*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Д. Г. Основы теплообмена излучением. Госэнергоиздат, 1962.
2. Фаворский О. Н., Каданер Я. С. Вопросы теплообмена в космосе, ательство «Высшая школа», 1967.
3. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Издательство ука», 1966.