КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 61, 1973 г.
Исследования по акустике, электрофизике и радиоэлектронике

А. Д. БОЙКОВ, А. Н. ДМИТРИЕВ, Н. Д. ЕГУПОВ

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА В ВИДЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Запишем известное выражение

$$W(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\int\limits_0^\infty y(t)\,e^{-st}\,dt}{\int\limits_0^\infty x(t)\,e^{-st}\,dt}, \tag{1}$$

где $s=c+j\omega$.

Представим $e^{-j\omega t}$ в виде ряда Маклорена

$$e^{-j\omega t}=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}(j\omega)^n. \tag{2}$$

Тогда формула (1) запишется так

$$W(c+j\omega)=\frac{Y(c+j\omega)}{X(c+j\omega)}=\frac{\int\limits_0^\infty\left[1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}(j\omega)^n\right]x(t)\,e^{-ct}\,dt}{\int\limits_0^\infty\left[1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!}(j\omega)^n\right]y(t)\,e^{-ct}\,dt}. \tag{3}$$

В формуле (3) возможна перестановка действия интегрирования и суммирования, так как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(j\omega)^n}{n!}\int\limits_0^\infty|\,x(t)\,e^{-ct}\,|\,t^n\,dt \tag{4}$$

сходится абсолютно.

результате сходимости ряда (4) формула (3) принимает вид

$$W(c + j\omega) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (j\omega)^n \gamma_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (j\omega)^n \beta_n}, \tag{5}$$

γ_n ($n=0, 1, 2\ldots \infty$) и β_n выражаются следующими формулами:

$$\gamma_0 = \int\limits_0^{\infty} x(t)\, e^{-ct}\, dt; \qquad \beta_0 = \int\limits_0^{\infty} y(t)\, e^{-ct}\, dt;$$

$$\gamma_1 = -\int\limits_0^{\infty} t x(t)\, e^{-ct}\, dt; \qquad \beta_1 = -\int\limits_0^{\infty} t y(t)\, e^{-ct}\, dt;$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2!}\int\limits_0^{\infty} t^2 x(t)\, e^{-ct}\, dt; \qquad \beta_2 = \frac{1}{2!}\int\limits_0^{\infty} t^2 y(t)\, e^{-ct}\, dt; \tag{6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^{\infty} t^n\, x(t)\, e^{-ct}\, dt; \qquad \beta_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^{\infty} t^n\, y(t)\, e^{-ct} dt.$$

еперь легко получить выражение для передаточной функции бъекта управления в виде

$$W(s) = \int\limits_0^{\infty} k(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}, \tag{7}$$

де $s = j\omega$.

Коэффициенты $\{ a_i \}$ с моментами $\{ \gamma_i \}$ связаны соотношениями:

$$a_n = \gamma_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k c^k;$$

$$a_{n-1} = \gamma_1 - \sum_{k=2}^{n} k a_k c^{k-1}; \tag{8}$$

$$a_{n-2} = \gamma_2 - \sum_{k=3}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k c^{k-2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-m} = \gamma_m - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m} a_k c^{k-m};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 = \gamma_m$$

Аналогичным образом связаны коэффициенты $\{ в_i \}$ с моментами $\{ \beta_i \}$. Таков метод определения передаточной функции объектов управления в виде дробно-рационального выражения, причем в в этом случае объект принимается как «черный ящик» и принадлежит к классу стационарных систем. Коэффициенты передаточной функции определяются через моменты входного и выходного сигналов.

Из сказанного ясно, что описанный метод использует разложение функции $e^{-j\omega t}$ в ряд Маклорена, функцией веса которого является дельта-функция и поэтому достаточно точное приближение указанной функции рядом Маклорена достигается лишь на небольшом интервале времени. Это приводит к тому, что частотные характеристики объекта управления практически без ошибки определяются лишь в узкой полосе частот, далее же ошибки растут. Если объект управления является колебательным звеном, то с достаточной для практики точностью частотные характеристики при $n=5\div8$ определяются в полосе частот, не превышающей частоту среза.

С целью устранения указанных недостатков функцию целесообразно аппроксимировать какой-либо ортогональной системой, функции которой определены в интервале от нуля до бесконечности. Наиболее рациональными ортогональными системами являются ортогональные функции Лягерра, ортогонализированные экспоненциальные функции, так как они по сравнению с другими ортогональными системами обеспечивают одним и тем же числом членов разложения приближение функции $e^{-j\omega t}$ с наименьшей среднеквадратической ошибкой в интервале $[0,\infty)$.

Рассмотрим трансформацию описанного метода, если для аппроксимации $e^{-j\omega t}$ используются функции Лягерра.

Представим функцию $e^{-j\omega t}$ в виде обобщенного ряда Фурье по ортогональным функциям Лягерра

$$e^{-j\omega t}=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\omega)\,L_k(t), \tag{9}$$

где функции $f_k(\omega)$ вычисляются по формуле

$$f_k(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}\,L_k(t)\,dt. \tag{10}$$

Используя общую формулу для функции Лягерра, легко получить общую формулу для $f_n(\omega)$. Она имеет вид

$$f_n(\omega)=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}}\left[n!\left(\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}}\right)^n-\frac{n^2(n-1)}{1!}\left(\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}}\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)!}{2!}\left(\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}}\right)^{n-2}+\ldots+(-1)^n n!\right]. \tag{11}$$

Применяя (11), получим:

$$f_0(\omega)=\frac{1}{j\omega+\frac{1}{2}};$$

$$(\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^2};$$

$$(\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}} - \frac{2}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^3}; \qquad (12)$$

$$_3(\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{2}} - \frac{3}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{3}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^4}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\overline{a}_0 = \int_0^\infty y(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt; \qquad \overline{b}_0 = \int_0^\infty x(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt;$$

$$\overline{a}_1 = \int_0^\infty t y(t) e^{-\frac{1}{2}t}\, dt; \ (13) \qquad \overline{b}_1 = \int_0^\infty t x(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt; \qquad (14)$$

$$\overline{a}_2 = \int_0^\infty t^2 y(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt; \qquad \overline{b}_2 = \int_0^\infty t^2 x(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{a}_7 = \int_0^\infty t^7 y(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt; \qquad \overline{b}_7 = \int_0^\infty t^7 x(t)\, e^{-\frac{1}{2}t}\, dt.$$

Выражение для передаточной функции при использовании восьми членов разложения функции $e^{-j\omega t}$ по ортогональным функциям Лягерра принимает вид

$$W(s) = \frac{\dfrac{c_7}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^8} + \dfrac{c_6}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^7} + \dfrac{c_5}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^6} + \ldots + \dfrac{c_1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} + \dfrac{c_0}{s+\frac{1}{2}}}{\dfrac{D_7}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^8} + \dfrac{D_6}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^7} + \dfrac{D_5}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^6} + \ldots + \dfrac{D_1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} + \dfrac{D_0}{s+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{7} \dfrac{c_n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}{\sum\limits_{n=0}^{7} \dfrac{D_n}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}, \qquad (15)$$

где коэффициенты $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ связаны следующим образом:

$$c_0 = 8\overline{a}_0 - 28\overline{a}_1 + \frac{56}{2!}\overline{a}_2 - \frac{70}{3!}\overline{a}_3 + \frac{56}{4!}\overline{a}_4 - \frac{28}{5!}\overline{a}_5 + \frac{8}{6!}\overline{a}_6 - \frac{1}{7!}\overline{a}_7;$$

$$c_1 = -28\overline{a}_0 + 140\overline{a}_1 - \frac{322}{2!}\overline{a}_2 + \frac{434}{3!}\overline{a}_3 - \frac{364}{4!}\overline{a}_4 + \frac{188}{5!}\overline{a}_5 - \frac{55}{6!}\overline{a}_6 + \frac{7}{7!}\overline{a}_7$$

$$c_2 = 56\overline{a}_0 - 322\overline{a}_1 + \frac{812}{2!}\overline{a}_2 - \frac{1162}{3!}\overline{a}_3 + \frac{1016}{4!}\overline{a}_4 - \frac{541}{5!}\overline{a}_5 + \frac{162}{6!}\overline{a}_6 - \frac{21}{7!}\overline{a}_7$$

$$c_3 = -70\bar{a}_0 + 434\bar{a}_1 - \frac{1162}{2!}\bar{a}_2 + \frac{1742}{3!}\bar{a}_3 - \frac{1579}{4!}\bar{a}_4 + \frac{865}{5!}\bar{a}_5 - \\ - \frac{265}{6!}\bar{a}_6 + \frac{35}{7!}\bar{a}_7; \qquad (16)$$

$$c_4 = 56\bar{a}_0 - 364\bar{a}_1 + \frac{1016}{2!}\bar{a}_2 - \frac{1579}{3!}\bar{a}_3 + \frac{1479}{4!}\bar{a}_4 - \frac{830}{5!}\bar{a}_5 + \frac{260}{6!}\bar{a}_6 - \frac{35}{7!}\bar{a}_7;$$

$$c_5 = -28\bar{a}_0 + 188\bar{a}_1 - \frac{541}{2!}\bar{a}_2 + \frac{865}{3!}\bar{a}_3 - \frac{830}{4!}\bar{a}_4 + \frac{478}{5!}\bar{a}_5 - \frac{153}{6!}\bar{a}_6 + \frac{21}{7!}\bar{a}_7;$$

$$c_6 = 8\bar{a}_0 - 55\bar{a}_1 + \frac{162}{2!}\bar{a}_2 - \frac{265}{3!}\bar{a}_3 + \frac{260}{4!}\bar{a}_4 - \frac{153}{5!}\bar{a}_5 + \frac{50}{6!}\bar{a}_6 - \frac{7}{7!}\bar{a}_7;$$

$$c_7 = -\bar{a}_0 + 7\bar{a}_1 - \frac{21}{2!}\bar{a}_2 + \frac{35}{3!}\bar{a}_3 - \frac{35}{4!}\bar{a}_4 + \frac{21}{5!}\bar{a}_5 - \frac{7}{6!}\bar{a}_6 + \frac{1}{7!}\bar{a}_7.$$

Аналогичные уравнения связи можно записать для $\{D_n\}$ и $\{в_n\}$.

Очевидно, от формулы для передаточной функции можно легко перейти к следующему выражению:

$$W(s) = \frac{E_n s^n + E_{n-1} s^{n-1} + \ldots + E_1 s + E_0}{F_n s^n + F_{n-1} s^{n-1} + \ldots + F_1 s + F_0}, \qquad (17)$$

где для $n=7$ коэффициенты $\{E_n\}$ связаны с коэффициентами $\{c_n\}$ формулами:

$$E_7 = c_0;$$

$$E_6 = \frac{7}{2} c_0 + c_1; \qquad (18)$$

$$E_5 = \frac{21}{4} c_0 + 3c_1 + c_2;$$

$$E_4 = \frac{35}{8} c_0 + \frac{15}{4} c_1 + \frac{5}{2} c_2 + c_3;$$

$$E_3 = \frac{35}{16} c_0 + \frac{20}{8} c_1 + \frac{5}{2} c_2 + 2c_3 + c_4;$$

$$E_2 = \frac{21}{32} c_0 + \frac{15}{16} c_1 + \frac{5}{4} c_2 + \frac{3}{2} c_3 + \frac{3}{2} c_4 + c_5;$$

$$E_1 = \frac{7}{64} c_0 + \frac{6}{32} c_1 + \frac{5}{16} c_2 + \frac{1}{2} c_3 + \frac{3}{4} c_4 + c_5 + c_6;$$

$$E_0 = \frac{1}{128} c_0 + \frac{1}{64} c_1 + \frac{1}{32} c_2 + \frac{1}{16} c_3 + \frac{1}{8} c_4 + \frac{1}{4} c_5 + \frac{1}{2} c_6 + c_7.$$

Аналогичным образом коэффициенты $\{F_n\}$ выражаются через $\{D_n\}$.

Итак, разложение функции $e^{-j\omega t}$ в ряд по ортогональным функциям Лягерра позволяет получить выражения для передаточной ции в двух видах — (15) или (17), удобных для практиче- использования.

ри использовании данного метода для синтеза аналитиче- самонастраивающихся систем автоматического управления НС) передаточные функции вида (15) и (17) легко реализу- с помощью пассивных RC-цепочек. Один из методов реали- и фильтра (17) рассмотрен в работе [1].

'еализация фильтра (15) не имеет принципиальных отличий, ходимо лишь в структуре фильтра вместо интеграторов по- ить апериодические звенья, которые точно реализуются на элементах.

3 заключение рассмотрим определение передаточных функций же методом, но функция $e^{-jt\omega}$ разлагается в ряд по экспонен- льным функциям.

ак, если:

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \alpha_1^1 e^{-t}; \\
\varphi_1(t) &= \alpha_1^2 e^{-t} + \alpha_2^2 e^{-2t}; \\
\varphi_2(t) &= \alpha_1^3 e^{-t} + \alpha_2^3 e^{-2t} + \alpha_3^3 e^{-3t}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_n(t) &= \alpha_1^n e^{-t} + \alpha_2^n e^{-2t} + \ldots + \alpha_n^n e^{-nt},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ункцию $e^{-j\omega t}$ можно представить в виде

$$e^{-j\omega t} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega)\varphi_k(t),$$

де функции $\xi_к(\omega)$ можно вычислить, используя формулу:

$$\xi_k(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t}\varphi_k(t)\,dt;$$

$$k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ n.$$

Очевидно, справедливы равенства:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(\omega) &= \frac{\alpha_1^1}{j\omega+1}; \\
\xi_2(\omega) &= \frac{\alpha_1^2}{j\omega+1} + \frac{\alpha_2^2}{j\omega+2}; \\
\xi_3(\omega) &= \frac{\alpha_1^3}{j\omega+1} + \frac{\alpha_2^3}{j\omega+2} + \frac{\alpha_3^3}{j\omega+3}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n(\omega) &= \frac{\alpha_1^n}{j\omega+1} + \frac{\alpha_2^n}{j\omega+2} + \ldots + \frac{\alpha_n^n}{j\omega+n}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Группируя члены, выражение для $e^{-j\omega t}$ можно переписать в виде

$$e^{-j\omega t}=\left[\frac{A_1^1}{j\omega+1}+\frac{A_2^1}{j\omega+2}+\frac{A_3^1}{j\omega+3}+\ldots+\frac{A_n^1}{j\omega+n}\right]e^{-t}+$$

$$+\left[\frac{A_1^2}{j\omega+1}+\frac{A_2^2}{j\omega+2}+\frac{A_3^2}{j\omega+3}+\ldots+\frac{A_n^2}{j\omega+n}\right]e^{-2t}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{A_1^n}{j\omega+1}+\frac{A_2^n}{j\omega+2}+\frac{A_3^n}{j\omega+3}+\ldots+\frac{A_n^n}{j\omega+n}\right]e^{-nt}, \qquad (21)$$

где $\quad A_i^j=\mathrm{const}$, функции α_k^q, например,

$$A_1^1=(\alpha_1^1)^2+(\alpha_1^2)^2+(\alpha_1^3)^2+\ldots+(\alpha_1^n)^2;$$

$$A_2^1=\overset{2}{\alpha}_1\overset{2}{\alpha}_2+\overset{3}{\alpha}_1\overset{3}{\alpha}_2+\overset{4}{\alpha}_1\overset{4}{\alpha}_2+\ldots+\overset{n}{\alpha}_1\overset{n}{\alpha}_2;$$

$$A_3^1=\overset{3}{\alpha}_1\overset{3}{\alpha}_3+\overset{4}{\alpha}_1\overset{4}{\alpha}_3+\overset{5}{\alpha}_1\overset{5}{\alpha}_3+\ldots+\overset{n}{\alpha}_1\overset{n}{\alpha}_3;$$

$$A_4^1=\overset{4}{\alpha}_1\overset{4}{\alpha}_4+\overset{5}{\alpha}_1\overset{5}{\alpha}_4+\ldots+\overset{n}{\alpha}_1\overset{n}{\alpha}_4;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_k^1=\overset{p}{\alpha}_1\overset{k}{\alpha}_k+\overset{k+1}{\alpha}_1\overset{k+1}{\alpha}_k+\ldots+\overset{n}{\alpha}_1\overset{n}{\alpha}_k.$$

Аналогичные соотношения можно найти и для остальных коэффициентов. Таким образом, после группировки членов, можно записать

$$e^{-j\omega t}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(j\omega)e^{-nt}.$$

Тогда

$$\Phi(js)=\frac{\int\limits_0^\infty y(t)\,e^{-j\omega t}\,dt}{\int\limits_0^\infty x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}G_n(j\omega)\,\mu_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}G_n(j\omega)\,\overline{\mu}_n}, \qquad (22)$$

где

$$\mu_n=\int\limits_0^\infty y(t)\,e^{-nt}\,dt;$$

$$\overline{\mu}_n=\int\limits_0^\infty x(t)\,e^{-nt}\,dt;$$

$$n=1,\ 2,\ 3\ldots$$

ппируя члены в выражении (22), получим

$$\Phi(j\omega)=\frac{\dfrac{k_1}{j\omega+1}+\dfrac{k_2}{j\omega+2}+\dfrac{k_3}{j\omega+3}+\ldots+\dfrac{k_n}{j\omega+n}}{\dfrac{\bar{k}_1}{j\omega+1}+\dfrac{\bar{k}_2}{j\omega+3}+\dfrac{\bar{k}_3}{j\omega+3}+\ldots+\dfrac{\bar{k}_n}{j\omega+n}}, \tag{23}$$

коэффициенты $\{\kappa_n\}$ с помощью элементарных уравнений зи выражаются через коэффициенты $\{\mu_n\}$ и A_1].

В работе предложен метод определения передаточных функй линейных стационарных объектов.

Найденная модель объекта легко реализуется с помощью '-элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д. Ортогоьный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная :ника», вып. 8, Машиностроение, 1968.