

Л. В. МАКАРОВА

МЕТОД РАСЧЕТА ВАРАКТОРНЫХ УМНОЖИТЕЛЕЙ ЧАСТОТЫ

В последнее время варакторные умножители частоты (ВУЧ) получили широкое распространение. Высокие требования к стабильности частоты в СВЧ диапазоне приводят к необходимости использовать низкочастотные возбудители, стабилизированные кварцем, а затем умножать частоту вплоть до частот 1÷40 Гц. Расчету варакторных умножителей частоты посвящено много работ. Наибольшее распространение получили схемы параллельного и последовательного умножения. Основным показателем умножителей частоты на варакторах является коэффициент полезного действия, под которым понимается отношение мощности n -ой гармоники в нагрузке P_n к мощности возбуждения $P_{вх}$.

$$\eta = \frac{P_n}{P_{вх}}.$$

В [1] приводится методика расчета режима варактора в параллельной схеме умножителя частоты, причем η умножителя выражается через параметры f (рабочая частота), $f_{пред}$ (предельная частота), $U_{пр}$ (пробивное напряжение) и $U_{исп}$ (испытательное напряжение), приведенные в ТУ для отечественных серийно выпускаемых варакторов. Полученные формулы удобны для инженерных расчетов.

В [2] для параллельной и последовательной схем умножителей проводится исследование динамического режима умножителей на нелинейной емкости и получены зависимости к. п. д. от некоторых параметров диода и колебательных контуров.

Представление вольт-фарадной характеристики известным математическим выражением как в работах [1, 2], так и в большинстве других, существенно затрудняет анализ, когда коэффициент перехода γ изменяется произвольно, что может иметь место, например, при воздействии агрессивной среды на $p-n$ переход.

В данной работе на основе аппроксимации характеристики $C(u)$, заданной графически, степенным полиномом невысокой степени, разработана методика расчета умножителя частоты последовательного типа.

Последовательная схема умножения весьма важна для практики, особенно в СВЧ диапазоне, где параллельными контурами могут служить отрезки коаксиальных или волноводных линий, а выполнение и настройка фильтров в параллельной схеме умножителя затруднена [2].

Коэффициенты аппроксимирующего полинома определяются с помощью метода наименьших квадратов и представляются как функции от области изменения аргумента, что существенно повышает точность расчета при сравнительно низкой степени аппроксимирующего полинома. Выбор в качестве меры точности аппроксимации второй степени отклонений оправдывается теоретико-вероятностными соображениями. При таком выборе степени отклонений случайные погрешности эксперимента и разброс параметров реальных характеристик оказывают наименьшее влияние на аппроксимирующую функцию [5].

Полиномиальная аппроксимация значительно упрощает спектральный анализ при воздействии суммы двух гармонических напряжений на диод. При этом используются результаты работ [4, 5], в которых применяется метод модуляционных характеристик, основанный на аппарате двойных рядов Фурье. Анализ умножителей рассматривается для случая, когда диод полностью используется по мощности, но $p-n$ переход остается закрытым.

Аппроксимация характеристики нелинейного элемента и гармонический анализ составляющих тока через диод. Одной из задач анализа ВУЧ, как и любого другого устройства, содержащего нелинейный элемент (НЭ), является определение гармонического состава тока, для чего, прежде всего, необходимо аппроксимировать вольт-фарадную характеристику диода математическим выражением. В [10]* разработана методика аппроксимации характеристик НЭ, заданных графически, с помощью полиномов Лежандра, которую и будем использовать в данной работе.

На рис. 1 показана зависимость барьерной емкости закрытого $p-n$ перехода от напряжения для кремниевого умножительного диода группы «Д».

Введением новой независимой переменной x участок интерполяции $u_{min} \div u_{max}$ преобразуем в $(-1; +1)$ подстановкой

$$x = 1 - \frac{u}{U_0} \quad (1)$$

где U_0 — середина участка интерполяции.

* Ст. в настоящем сборнике.

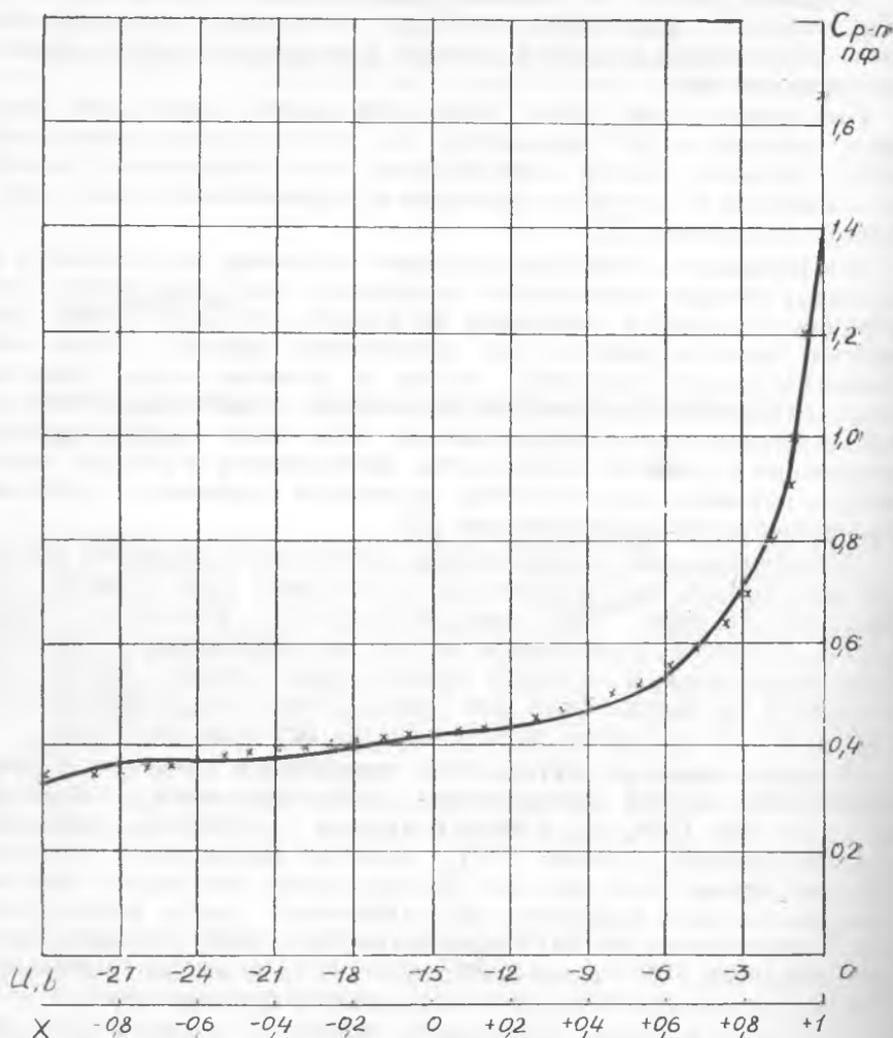


Рис. 1. Зависимость барьерной емкости закрытого $p-n$ перехода от напряжения.

Когда диод полностью используется по пробивному напряжению, то $u_{\text{mla}} = U_{\text{проб}}$, а условие (1) принимает вид:

$$x = 1 - \frac{2u}{U_{\text{проб}}} \quad (2)$$

Теперь представим $C(x)$ в виде:

$$C(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_m P_m(x) + \dots \quad (3)$$

Здесь $P_m(x)$ полиномы Лежандра. Постоянные коэффициенты аппроксимирующего полинома a_m , равные

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} C(x) P_m(x) dx,$$

определяются по обобщенной формуле Симпсона [6, 10]. При решении практических задач встает вопрос о том, как выбирать степень полинома m , аппроксимирующего характеристику НЭ. Этот выбор связан, во-первых, с конкретным видом характеристики НЭ: отличие аппроксимирующей функции от реальной должно быть малым. Во-вторых, степень многочлена должна быть согласована с особенностями изучаемого явления: при исследовании важно не упустить характерных черт, имеющих место при нелинейном взаимодействии синусоидальных компонент.

Качественному совпадению полинома с оригиналом (первый критерий) соответствует условие

$$m \geq M + 2, \quad (4)$$

где M — число точек перегиба функции $C(x)$ на участке интерполяции.

Для сохранения характерных черт изучаемого явления, имеющих место при нелинейном взаимодействии синусоидальных составляющих, степень полинома следует выбирать из неравенства

$$m \geq l_1 + l_2, \quad (5)$$

где l_1, l_2 — числа, характеризующие порядок комбинационных частот [11].

Выбранная степень полинома должна одновременно удовлетворять обоим условиям.

Для примера представим характеристику $C(x)$ кремниевого умножительного диода группы «Д» (рис. 1) выражением

$$C(x) = \sum_{m=0}^{m=5} a_m P_m(x), \quad (6)$$

Коэффициенты a_m были определены по методике [10] и равны:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,51, & a_1 &= 0,24, & a_2 &= 0,21 \\ a_3 &= 0,17, & a_4 &= 0,12, & a_5 &= 0,11. \end{aligned}$$

На рис. 1 аппроксимирующая кривая представлена сплошной линией, а экспериментальные точки — крестиками. Совпадение, как видим, короче.

Подставив в (6) значения полиномов Лежандра, собрав подобные члены и учтя (2), перейдем к представлению емкости в виде полинома по степеням u . Коэффициенты этого полинома будут подобраны таким образом, что сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции от реальной будет наименьшая.

$$C(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5$$

$$\text{Здесь } b_0 = a_0 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{8}a_4; \quad b_1 = a_1 - \frac{3}{2}a_3 + \frac{15}{8}a_5;$$

$$b_2 = \frac{3}{2}a_2 - \frac{15}{4}a_4; \quad b_3 = \frac{5}{2}a_3 - \frac{35}{4}a_5;$$

$$b_4 = \frac{35}{8}a_4; \quad b_5 = \frac{63}{8}a_5;$$

и далее

$$C(u) = B_0 + B_1u + B_2u^2 + B_3u^3 + B_4u^4 + B_5u^5, \quad (7)$$

где

$$B_0 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5;$$

$$B_1 = -\frac{2}{U_{\text{проб}}} (b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5);$$

$$B_2 = \frac{4}{U_{\text{проб}}^2} (b_2 + 3b_3 + 6b_4 + 10b_5);$$

$$B_3 = -\frac{8}{U_{\text{проб}}^3} (b_3 + 4b_4 + 10b_5);$$

$$B_4 = \frac{16}{U_{\text{проб}}^4} (b_4 + 5b_5); \quad B_5 = -\frac{32}{U_{\text{проб}}^5} b_5.$$

Гармонический анализ проводим в предположении, что диод не имеет потерь и работает в чисто емкостном режиме, и к нему приложены напряжения смещения и гармонические напряжения с частотами ω и $n\omega$.

$$u = U_0 + U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + U_n \cos(n\omega t + \varphi_n). \quad (8)$$

где $U_0 = E_{\text{см}} + \varphi$; φ — контактная разность потенциалов. Нелинейной функцией управляющего напряжения является не сам ток, а заряд, запаасаемый в диоде: $q = q(u)$.

Зависимость этого заряда от приложенного напряжения определяет нелинейную емкость перехода. Ток через диод:

$$i = \frac{dq}{dt} = C(u) \frac{du}{dt}. \quad (9)$$

Здесь $C(u)$ — дифференциальная емкость. Таким образом, величина емкости оказывается функцией напряжения, что и обуславливает нелинейность элемента.

При воздействии управляющего напряжения (8) на нелинейный элемент с характеристикой $C(u)$ емкость C периодически изменяется и, следовательно, ее можно представить рядом Фурье. При воздействии двух переменных напряжений на нелинейный элемент очень удобным оказывается метод модуляционных характеристик, основанный на аппарате двойных рядов Фурье [5].

Если два напряжения с частотами ω и $n\omega$ действуют на нелинейный элемент с характеристикой $C(u)$, то емкость зависит от

их суммы. Считаем одно из напряжений, например u_n , постоянным во времени и разложим $C(u)$ в ряд Фурье по частоте ω :

$$C = \frac{1}{2} C_0(U_0; U_1; u_n) + \sum_{h=0}^{\infty} C_h(U_0, U_1, u_n) \cos h(\omega t + \varphi_1). \quad (10)$$

Здесь емкостные коэффициенты Фурье:

$$C_h = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} C(U_0 + U_1 \cos \tau_1; u_n) \cos h \tau_1 d\tau_1. \quad \tau_1 = \omega t + \varphi_1 \quad (11)$$

Зависимость емкостных коэффициентов Фурье от напряжения u_n по аналогии [5] будем называть модуляционной характеристикой $C_h(u_n)$.

Напряжение u_n изменяется во времени с частотой $n\omega$. Тогда в соответствии с модуляционной характеристикой $C_h(u_n)$ будет изменяться во времени и каждый емкостный коэффициент. Таким образом, представим емкостные коэффициенты рядом Фурье по частоте $n\omega$.

$$C_h = \frac{1}{2} C_{h0} + \sum_{z=1}^{\infty} C_{hz} \cos z(n\omega t + \varphi_n). \quad (12)$$

Здесь

$$C_{hz} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} C_h(U_0, U_1, U_n \cos \tau_2) \cos z \tau_2 d\tau_2. \quad \tau_2 = n\omega t + \varphi_n. \quad (13)$$

Процесс воздействия u_n на модуляционную характеристику $C_h(u_n)$ можно трактовать как амплитудную модуляцию гармоники C_h частотой $n\omega$, тогда как частота $h\omega$ рассматривается в качестве несущей. В результате модуляции емкостные коэффициенты усредняются, а переменные компоненты C_h порождают боковые частоты.

Подставив (12) в (10) и заменив произведение косинусов через косинусы разности и суммы аргументов, получим:

$$C(u) = \frac{1}{4} C_{00} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} C_{h,0} \cos h(\omega t + \varphi_1) + \frac{1}{2} \sum_{z=0}^{\infty} C_{0z} \cos z(n\omega t + \varphi_n) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} C_{hz} [\cos [(h-zn)\omega t + h\varphi_1 - z\varphi_n] + \cos [(h+zn)\omega t + h\varphi_1 + z\varphi_n]] \quad (14)$$

Таким образом, перед нами стоит задача отыскания компонент спектра (14), когда характеристика нелинейного элемента задана полиномом.

Такая задача решалась в работах [7], [8] и [5].

Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, воспользуемся конечными результатами работы [5], относящимися к расчету амплитуд комбинационных гармоник при воздействии на

нелинейный элемент двух напряжений. Напомним, что нелинейный элемент — нелинейная емкость.

Тогда амплитуды комбинационных составляющих запишутся в виде ряда по производным:

$$C_{hz} = 4 \frac{U_1^h U_n^z}{2^{h+z}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{U_1}{2}\right)^{2r} R_r\left(\frac{U_n}{U_1}\right) \frac{d^{h+z+2r} C(U_0)}{dU_0^{h+z+2r}}. \quad (15)$$

Здесь через $R_r(a)$ обозначен конечный полином по степеням $a = \frac{U_n}{U_1}$

$$R_r(a) = \sum_{x=0}^r \frac{a^{2x}}{x!(r-x)!(h+r-x)!(z+x)!}; \quad (16)$$

Естественно, что рядом (15) удобно пользоваться только тогда, когда можно оставить малое число членов, что возможно, если характеристика аппроксимирована полиномом и ряд обрывается на некотором члене, что и имеет место для рассматриваемого вида аппроксимации.

Дифференцируя по времени (8) и учитывая (9) и (14) найдем спектр тока на выходе нелинейного элемента:

$$i = \sum_{h=1}^{\infty} I_{h,0,l,0} \sin[h(\omega t + \varphi_1)] + \sum_{z=1}^{\infty} I_{0,z,0,p} \sin[z(n\omega t + \varphi_n)] + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{z=1}^{\infty} \{I_{h,z,0,p} - I_{h,z,l,0}\} \sin[(zn - h)\omega t + z\varphi_n - h\varphi_1] + \quad (17)$$

$$+ \{I_{h,z,l,0} + I_{h,z,0,l}\} \sin[(zn + h)\omega t + z\varphi_n + h\varphi_1].$$

$$I_{h,z,l,p} = \frac{1}{4} \omega^n U_1^l U_n^p (C_{h+l,z+p} - C_{h-l,z-p}); \quad (18)$$

$$h + z + 2r = m$$

$l, p = 0, 1$ (или $1, 0$) в соответствии с индексами при амплитудах в (17).

Для численного определения емкостных коэффициентов Фурье и амплитуд тока диода необходимо знать оптимальные значения амплитуд напряжения U_1 и U_n при полном использовании диода по мощности

$$U_0 + U_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + U_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = U_{\text{проб.}}$$

или при

$$U_0 = \frac{U_{\text{нр}}}{2}$$

$$|M_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + M_n \cos(n\omega t + \varphi_n)|_{\text{макс}} = 1 \quad (19)$$

$$M_1 = \frac{U_1}{U_0}; \quad M_n = \frac{U_n}{U_0};$$

Определение максимальной мощности, трансформируемой p - n переходом и оптимальных значений амплитуд U_1 и U_n

Выразим мощности первых шести гармоник P_n , для чего в (17) отберем члены с частотами ω и $n\omega$ и умножим их на соответствующие напряжения. Тогда получим:

$$n = 2$$

$$P_2 = -P_1 = -\frac{1}{4} \omega [U_1 U_2 (C_{10} - C_{30}) - 2U_2^2 (C_{21} - C_{23}) + U_1 U_2 (C_{12} - C_{32}) \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{1}{4} \omega U_0^2 M_1^2 M_2 \left[2b_1 + M_1^2 b_3 + \frac{3}{2} M_2^2 b_3 + \frac{5}{8} M_1^4 b_5 + \frac{5}{2} M_1^2 M_2^2 b_5 + \frac{5}{4} M_2^4 b_5 \right] \sin(2\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$n = 3$$

$$P_3 = -P_1 = -\frac{1}{4} \omega [U_3 U_1 (C_{20} - C_{40}) - 3U_3^2 C_{31} - U_3 U_1 C_{22}] \sin(3\varphi_1 - \varphi_3) = -\frac{1}{4} \omega U_0^2 M_1^3 M_3 \left[b_2 + \frac{3}{4} M_1^2 b_4 - \frac{3}{2} M_3^2 b_4 \right] \sin(3\varphi_1 - \varphi_3);$$

$$n = 4$$

$$P_4 = -P_1 = -\frac{1}{4} \omega [U_4 U_1 (C_{30} - C_{50}) - 4U_4^2 C_{41} + U_4 U_1 C_{32}] \sin(4\varphi_1 - \varphi_4) = -\frac{1}{4} \omega U_0^2 M_1^4 M_4 \left[\frac{1}{2} b_3 + \frac{1}{2} M_1^2 b_5 + \frac{5}{4} M_4^2 b_5 \right] \sin(4\varphi_1 - \varphi_4);$$

$$n = 5$$

$$P_5 = -P_1 = -\frac{1}{4} \omega U_5 U_1 C_{40} \sin(5\varphi_1 - \varphi_5) = -\frac{1}{4} \omega \left[\frac{1}{4} M_1^5 M_5 b_4 U_0^2 \right] \sin(5\varphi_1 - \varphi_5) \quad (20)$$

$$n = 6$$

$$P_6 = -P_1 = -\frac{1}{4} \omega U_1 U_6 C_{50} \sin(6\varphi_1 - \varphi_6) = -\frac{1}{4} \omega \left[-\frac{1}{8} M_1^6 M_6 b_5 U_0^2 \right] \sin(6\varphi_1 - \varphi_6).$$

Из выражений (20) следует, что мощность гармоник будет максимальна при условии:

$$n\varphi_1 - \varphi_n + (-1)^n \frac{\pi}{2} = 0. \quad (21)$$

Так как рассматривается установившийся процесс, то одну из фаз приложенных к диоду напряжений можно принять равной ну-

лю. Полагаем $\varphi_1=0$, тогда в (21) $\varphi_n = (-1)^n \frac{\pi}{2}$ и условие (19) запишется в виде:

$$|M_1 \cos \omega t + (-1)^n M_n \sin n\omega t|_{\max} = 1. \quad (22)$$

Для получения максимальной мощности, необходимо выбрать соответствующие значения M_1 и M_n , удовлетворяющие условию (22). Найдем ряд значений M_1 и M_n , при которых выполняется условие (22). Для этой цели возьмем производную по времени выражения (22) и, приравняв ее нулю, получим:

$$\frac{M_n}{M_1} = (-1)^n \frac{\sin \omega t}{n \cos \omega t}. \quad (23)$$

Используя (22) и (23) можно записать

$$\left| \cos \omega t + \frac{1}{n} \sin \omega t \operatorname{tg} n\omega t \right| = \frac{1}{M_1}, \quad (24)$$

$$|n \cos n\omega t \operatorname{ctg} \omega t + \sin n\omega t| = \frac{1}{M_n}.$$

Имея в виду (22) и то, что $M_1 < 1$, $M_n < 1$, находим, что уравнения (24) будут справедливы в следующих областях ωt : для четных n :

$$\omega t = \left[\pi \div \left(\pi + \frac{\pi}{2n} \right) \right] + 2\xi\pi, \quad \omega t = \left[\left(2\pi - \frac{\pi}{2n} \right) \div 2\pi \right] + 2\xi\pi$$

для нечетных n :

$$\omega t = \left(0 \div \frac{\pi}{2n} \right) + \xi\pi,$$

где $\xi = 0, 1, 2, 3, \dots$

Подставив различные значения ωt одной из этих областей (безразлично какой для заданного n) в выражения (22), определим ряд значений M_1 и M_n . Для нахождения максимального значения мощности гармоники, а следовательно, и оптимального значения M_1 и M_n необходимо полученные значения M_1 и M_n подставить в выражения (20) и построить графически зависимость P_n от M_1 (M_n) [9]. В качестве примера были рассчитаны и построены графики зависимости мощностей второй и третьей гармоник от M_1 (M_n), из которых были определены оптимальные значения амплитуд:

$$M_{1 \text{ opt}} = 0,842; \quad M_{3 \text{ opt}} = 0,24 \quad (n = 3)$$

$$M_{1 \text{ opt}} = 0,8; \quad M_{2 \text{ opt}} = 0,385 \quad (n = 2).$$

Расчет эффективности умножителя частоты

Коэффициент полезного действия варакторного умножителя частоты может быть представлен в виде [1, 3]:

$$\eta_{\text{мн}} = \eta_{\text{д}} \cdot \eta_{\text{вх}} \cdot \eta_{\text{вых}},$$

где η_d — к. п. д. диода в контуре без собственных потерь, $\eta_{вх}$, $\eta_{вых}$ — к. п. д. входного и выходного контуров с идеальным диодом, не имеющим потерь.

К. п. д. диода в умножителях частоты определится соотношением:

$$\eta_d = 1 - \frac{P_{пот}}{P_{вх}} \quad (27)$$

$$P_{вх} = \frac{1}{2} I_{1a} \cdot U_1 + P_{пот} - \text{входная мощность}$$

$$P_{пот} = \frac{1}{2} I_d^2 R_s = \frac{1}{2} (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots) R_s \quad (28)$$

— суммарная мощность потерь, которая теряется на последовательном сопротивлении диода при протекании через диод тока I_d , содержащего гармоники I_1, I_2, I_3, \dots ;

$$R_s = \frac{1}{2\pi C_{исп} \cdot f_{пред}}, \quad (29)$$

последовательное сопротивление потерь диода, выраженное через его предельную частоту и емкость.

Входное и выходное сопротивления диода определяются соответственно:

$$R_{вх} = \frac{U_1^2}{2P_{вх}}; \quad R_{вых} = \frac{U_n^2}{2P_{вых}}. \quad (30)$$

Ниже будет дан результат расчета на ЭЦВМ эффективности удвоителя и утроителя частоты на кремниевом варакторе группы «Д». Общий же метод расчета заключается в следующем:

1. Выбираем степень аппроксимирующего полинома m , исходя из номера выделяемой гармоники n и учитывая соотношения (4, 5).

2. Определяем коэффициенты аппроксимирующего полинома.

3. Приводим характеристику нелинейной емкости к виду (7).

4. Строим зависимость P_n от M_1 (M_n), используя вышеприведенную методику, и находим оптимальные значения M_1 и M_n .

5. По формулам (15, 16) определяем емкостные коэффициенты Фурье, полагая $h+z+2r=m$, а по формулам (17, 18) — амплитуды гармоник тока.

6. Определяем R_s из (29).

7. По формулам (27) и (28) определяем к. п. д. умножителя.

8. Изменяя величину U_0 , определяем оптимальное значение η для различных номеров выделяемых гармоник.

9. Определяем входное и выходное сопротивления диода.

В порядке иллюстрации к методике были рассчитаны удвоитель и утроитель частоты. В качестве нелинейного элемента был взят

кремниевый умножительный диод группы «Д» со следующими параметрами:

$$f_{\text{пред}} = 60 \text{ ГГц}; U_{\text{проб}} = 30 \text{ в}; R_s = 4 \text{ ом}$$

$$f_{\text{вх}} = 3 \text{ ГГц}; P_{\text{вх ном}} = 500 \text{ мвт.}$$

Основные расчетные данные сведены в табл. 1.

Таблица 1

	$f_{\text{вх}},$ ГГц	$\eta,$ %	$E_{\text{см оп } t},$ в	$R_{\text{вх}},$ ом	$R_{\text{вых}},$ ом
Удвоитель	3	30,8	—5	350	225
Утроитель	3	16,1	—8	650	275

При расчетах к. п. д. колебательной системы принимался равным $\eta_k = 0,75$.

ВЫВОДЫ

1. Для характеристик диодов, заданных графически, разработана методика аппроксимации характеристики нелинейного элемента полиномами Лежандра.

2. Для случая воздействия на нелинейный элемент двух переменных напряжений проводится гармонический анализ тока нелинейного элемента.

3. Приводится методика определения оптимального соотношения амплитуд M_1 и M_n при полном использовании диода и аппроксимации характеристики полиномами Лежандра.

4. Определяется к. п. д. умножителя с учетом протекания через диод всех гармоник тока.

5. Коэффициент перехода емкости γ может быть любым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Табачников И. Я., Фрид И. Р., Каусов С. Ф., Визель А. А. Расчет режима варактора в параллельной схеме умножителя частоты. Сб. «Полупроводниковые приборы и их применение», вып. 23, 1970.

2. Красноголовый Б. Н. Двухконтурные умножители частоты на нелинейной емкости. Сб. «Полупроводниковые приборы и их применение», вып. 11. Изд-во «Сов. радио», 1964.

3. Zverev A. Designing varactor multipliers. The Electronic Engineer, 1967, March.

4. Евтянов С. И. Радиотехника, № 6, 1956.

5. Бруевич Л. Н., Евтянов С. И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. «Сов. радио», М., 1965.

6. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. «Наука», М., 1965.
7. Котельников В. А. О воздействии на нелинейное сопротивление суммы синусоидальных колебаний. Научно-технический сборник, ЛЭИС, № 14, 1936.
8. Басик И. В. Метод определения компонент тока при воздействии на нелинейную систему суммы синусоидальных напряжений. Сборник научных трудов ЦНИИС МС, 1948.
9. Новожилов О. П. Оценка максимальной мощности, трансформируемой полупроводниковым диодом при параметрическом умножении частоты. Радиотехника, т. 23, № 6, 1968.
10. Макарова Л. В. Применение полиномов Лежандра для анализа нелинейных цепей, ст. в наст. сборнике.
11. Петров Б. Е. Спектральный анализ в применении к нелинейным колебательным системам. Радиотехника, № 2, 1964.