КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 61, 1973 г.
Исследования по акустике, электрофизике и радиоэлектронике

А. Д. БОЙКОВ, А. Н. ДМИТРИЕВ, Н. Д. ЕГУПОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время своего завершения достигла корреляционная теория линейных динамических систем с постоянными и переменными параметрами. Существует аппарат, позволяющий рассчитывать математические ожидания и корреляционные функции выходных сигналов линейных систем при воздействии на входе как стационарных, так и нестационарных случайных процессов.

Чрезвычайно трудной является задача определения функций распределения на выходе указанного класса систем, если известными являются соответствующий закон распределения на входе и динамические характеристики исследуемой системы [1]. Этот вопрос просто решается только для нормальных случайных функций, поскольку многомерный закон распределения нормального случайного процесса полностью определяется моментами не выше второго порядка [1].

Решение задачи определения произвольного закона распределения на выходе линейной системы имеет несколько подходов один из которых заключается в следующем.

Произвольный, т. е. отличный от нормального, многомерный дифференциальный закон распределения представляется в виде многомерного ортогонального ряда, основанного на нормальном законе распределения. В качестве базиса обычно выбираются ортогональные функции Чебышева — Эрмита. Известно, что для определения коэффициентов разложения необходимо знать моменты высокого порядка исследуемого случайного процесса, расчет которых для выходного сигнала связан с существенными трудностями. Действительно, момент q-го порядка определяется равенством:

$$\mu_{qx}(t_1, t_2, \dots t_q) = M\{x(t_1)x(t_2)\dots x(t_q)\} =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \ldots x_q W(x_1, x_2 \ldots x_q,\ t_1, t_2 \ldots t_q)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_q. \quad (1)$$

Ниже будут рассматриваться центральные моменты q-го по-ка, для которых справедлива формула:

$$\beta_{qx}(t_1, t_2 \ldots, t_q) = M\{[x(t_1) - \mu_{1x}(t_1)] \ldots [x(t_q) - \mu_{1x}(t_q)]\} =$$

$$= M\{\overset{\circ}{x}(t_1) \ldots \overset{\circ}{x}(t_q)\}, \quad (2)$$

е $\overset{\circ}{x}(t)$ — центрированная случайная функция.

Частным случаем моментов высокого порядка является момент орого порядка или корреляционная функция случайного процес- $x(t)$. Используя интеграл свертки, можно записать зависи-ость для момента q-го порядка выходного случайного процесса (t). Действительно, если $\overset{\circ}{x}(t) = \int\limits_0^{\infty} \kappa(t-\tau)\overset{\circ}{y}(\tau)\, d\tau$,

$$M\{\overset{\circ}{x}(t_1)\ \overset{\circ}{x}(t_2) \ldots \overset{\circ}{x}(t_q)\} =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty} k(t_1-\tau_1)\, k(t_2-\tau_2) \ldots k(t_q-\tau_q)\, M\{\overset{\circ}{y}(\tau_1)\overset{\circ}{y}(\tau_2) \ldots \overset{\circ}{y}(\tau_q)\} \times$$

$$\times d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_q =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\ldots\int\limits_0^{\infty} k(t_1-\tau_1) k(t_2-\tau_2) \ldots k(t_q-\tau_q) \beta_{qy}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q)\, d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_q =$$

$$= \beta_{qx}(t_1, t_2, \ldots, t_q). \quad (3)$$

Очевидными являются те трудности, которые необходимо преодолеть при вычислении β_{qx} $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ с помощью последней формулы, особенно для сложных систем, для которых κ (τ) является довольно громоздкой функцией и процесс вычисления не поддается формализации.

Ниже рассмотрим численно-аналитический способ вычисления моментов β_{qx} $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$, который не требует знания импульсной переходной функции исследуемой системы и легко реализуется на ЦВМ.

Пусть связь между входной и выходной случайными функциями описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i\ \overset{\circ}{x}}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j\ \overset{\circ}{y}}{dt^j}. \quad (4)$$

Выписывая последнюю зависимость для моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_q$, можно получить выражение

$$\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\ldots\sum_{i_q=0}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_q} \frac{d^{i_1}\ \overset{\circ}{x}(t_1)}{dt_1^{i_1}} \frac{d^{i_2}\ \overset{\circ}{x}(t_2)}{dt_2^{i_2}} \ldots \frac{d^{i_q}\ \overset{\circ}{x}(t_q)}{dt_q^{i_q}} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{m}\sum_{j_2=0}^{m}\ldots\sum_{j_q=0}^{m} b_{j_1} b_{j_2} \ldots b_{j_q} \frac{d^{j_1}\ \overset{\circ}{y}(t_1)}{dt_1^{j_1}} \cdot \frac{d^{j_2}\ \overset{\circ}{y}(t_2)}{dt_2^{j_2}} \ldots \frac{d^{j_q}\ \overset{\circ}{y}(t_q)}{dt_q^{j_q}} \quad (5)$$

Осредняя обе части полученного равенства по совокупности и меняя порядок дифференцирования и осреднения, имеем:

$$\sum_{i_1=0}^{n} \dots \sum_{i_q=0}^{n} a_{i_1} \dots a_{i_q} \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_q}}{\partial t_1^{i_1} \dots \partial t_q^{i_q}} \beta_{qx}(t_1, \dots, t_q) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{m} \dots \sum_{j_q=0}^{m} b_{j_1} \dots b_{j_q} \frac{\partial^{j_1+\dots+j_q}}{dt_1^{j_1} \dots dt_q^{j_q}} \beta_{qy}(t_1, \dots, t_q). \quad (6)$$

Введем в рассмотрение многомерное преобразование Лапласа. Тогда очевидна справедливость формул:

$$B_{qx}(s_1, s_2, \dots, s_q) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \beta_{qx}(t_1, t_2, \dots, t_q) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} \dots e^{-s_q t_q} dt_1 dt_2 \dots dt_q,$$

$$B_{qy}(s_1, s_2, \dots, s_q) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \beta_{qy}(t_1, t_2 \dots t_q) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} e^{-s_q t_q} dt_1 dt_2 \dots dt_q,$$

$$L_q \left\{ \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots+j_q}}{\partial t_1^{j_1} \partial t_2^{j_2} \dots \partial t_q^{j_q}} \beta_{qx}(t_1, t_2, \dots, t_q) \right\} = s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_q^{j_q} B_{qx}(s_1; s_2, \dots, s_q). \quad (7)$$

Применяя многомерное преобразование Лапласа к зависимости (6), указанное выражение с учетом формул (7) можно представить в виде:

$$B_{qx}(s_1, s_2, \dots, s_q) = \frac{\prod_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j s_k^j \right)}{\prod_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i s_k^i \right)} \cdot B_{qy}(s_1, \dots, s_q). \quad (8)$$

Если многомерная функция β_{qx} $(t_1, t_2, \dots, t_q)$ является затухающей по всем своим аргументам, т е. для нее справедливо свойство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \beta_{qx}^2(t_1, t_2, \dots, t_q) dt_1 dt_2 \dots dt_q < \infty, \quad (9)$$

то указанную функцию можно представить в виде многомерного ортогонального ряда, т. е. в виде:

$$\beta_{qx}(t_1, t_2, \dots, t_q) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_q=1}^{\infty} C_{i_1 \dots i_q} \varphi_{i_1}(t_1) \dots \varphi_{i_q}(t_q)., \quad (10)$$

где

$$C_{i_1 i_2 \dots i_q} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \beta_{qx}(t_1, \dots, t_q) \varphi_{i_1}(t_1) \dots \varphi_{i_q}(tq) dt_1 \dots dt_q, \quad (11)$$

Для рассматриваемого класса приближаемых функций в качестве базовой ортогональной системы рационально выбрать ортолизированные экспоненциальные функции, общее выражение которых имеет вид

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=0}^{i} \alpha_{ik} e^{-c_k t}, \tag{12}$$

них справедливо свойство ортонормальности

$$\int_0^\infty \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$$

ставляя (12) в (11), получаем:

$$_{i_1 i_2 \ldots i_q} = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \beta_{qx}(t_1, t_2, \ldots, t_q) \sum_{k_1=0}^{i_1} \alpha_{i_1 k_1} e^{-c_{k_1} t_1} \ldots \sum_{k_q=0}^{i_q} \alpha_{i_q k_q} e^{-c_{k_q} t_q} dt_1 \times$$

$$dt_2 \ldots dt_q = \sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} \cdots \sum_{k_q=0}^{i_{q}} \alpha_{i_1 k_1} \ldots \alpha_{i_q k_q} \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \beta_{qx}(t_1, t_2, \ldots, t_q) e^{-c_{k_1} t_1} \times$$

$$\times \; e^{-c_{k_2} t_2} \ldots e^{-c_{k_q} t_q} dt_1 dt_2 \ldots dt_q. \tag{13}$$

Используя методику, изложенную в [1], можно получить зависимость для коэффициентов ортогонального разложения моментов высокого порядка:

$$_{i_1 i_2 \ldots i_q} = \sum_{k_1=0}^{i_1} \cdots \sum_{k_q=0}^{i_q} \alpha_{i_1 k_1} \ldots \alpha_{i_q k_q} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j s_k^j \right)}{\prod_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i s_k^i \right)} \mathrm{B}_{qy}(s_1, \ldots, s_q) \Big|_{\substack{s_1 = c_{k_1} \\ s_q = c_{k_q}}} \tag{14}$$

Вычисления по последней формуле легко осуществляются на ЦВМ. После определения моментов, используя известные методы. можно определить многомерный дифференциальный закон распределения в виде ряда Чебышева-Эрмита.

Пример. На вход системы, передаточная функция которой определена ниже, подан случайный сигнал с нулевой средней и моментом второго порядка вида:

$$R_{yy}(t_1, t_2) = \sigma_y^2 e^{-\beta(t_2 - t_1)}.$$

Задача состоит в определении момента второго порядка выходного сигнала.

Решение.

Сначала найдем

$$S_{yy}(s, s_2) = \mathrm{B}_{2y}(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty R_{yy}(t_1, t_2) e^{-s_1 t_1} e^{-s_2 t_2} dt_1 dt_2.$$

Имеем:

$$S_{yy}(s_1, t_2) = \sigma_y^2 \int_0^\infty e^{-\beta(t_2 - t_1)} e^{-s_1 t_1} dt_1 =$$

$$= \sigma_y^2 \left\{ \int\limits_0^{t_2} e^{-\beta(t_2-t_1)} e^{-s_1 t_1} dt_1 + \int\limits_{t_2}^{\infty} e^{-\beta(t_1-t_2)} e^{-s_1 t_1} dt_1 \right\}.$$

Последнее представление обусловлено тем, что

$$e^{-\beta(t_2-t_1)} = \begin{cases} e^{-\beta(t_2-t_1)} & \text{при } t_2 > t_1, \\ e^{-\beta(t_1-t_2)} & \text{при } t_1 > t_2. \end{cases}$$

Выполним необходимые преобразования:

$$S_{yy}(s_1, t_2) = \sigma_y^2 \left[e^{-\beta t_2} \int\limits_0^{t_2} e^{(\beta - s_1) t_1} dt_1 + e^{\beta t_2} \int\limits_{t_2}^{\infty} e^{-(\beta - s_1) t_1} dt_1 \right] =$$

$$= \sigma_y^2 \left\{ \frac{e^{-\beta t_2}}{\beta - s_1} e^{(\beta + s_1) t_2} - 1 \right] + \frac{e^{\beta t_2}}{\beta + s_1} e^{-(\beta + s_1) t_2} \right\} =$$

$$= \sigma_y^2 \left[\frac{1}{\beta - s_1} (e^{-s_1 t_2} - e^{-\beta t_2}) + \frac{1}{\beta + s_1} e^{-s_1 t_2} \right] =$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{\beta^2 - s_1^2} [2\beta e^{-s_1 t_2} - (\beta - s_1) e^{-\beta t_2}].$$

Легко видеть, что

$$S_{yy}(s_1, s_2) = \int\limits_0^{\infty} R_{yy}(s_1 t_2) e^{-s_2 t_2} dt_2 =$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{\beta^2 - s_1^2} \left[2\beta \int\limits_0^{\infty} e^{-(s_1+s_2)t_2} dt_2 - (\beta + s_1) \int\limits_0^{\infty} e^{-(\beta + s_2)t_2} dt_2 \right] =$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{\beta^2 - s_1^2} \left[2\beta \frac{1}{s_1 + s_2} - \frac{\beta + s_1}{\beta + s_2} \right] = \sigma_y \frac{2\beta + s_1 + s_2}{(s_1 + \beta)(s_2 + \beta)(s_1 + s_2)}$$

Пусть передаточная функция исследуемой системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{0,00036s^5 + 0,006s^4 + 0,04484s^3 + 0,2604s^2 + 0,72s + 2}{0,00000144s^8 + 0,00004271s^7 + 0,0005545s^6 + 0,004637s^5 + 0,027821s^4 + \to}$$

$$\to \overline{+0,116688s^3 + 0,3704s^2 + 0,72s + 1}.$$

В качестве базовых ортогональных функций выбираем:

$\varphi_1(t) = e^{-0,5t}$;

$\varphi_2(t) = \sqrt{3}(-e^{-0,5t} + 2e^{-1,5t})$;

$\varphi_3(t) = \sqrt{5}(e^{-0,5t} - 0,6e^{-1,5t} + 6e^{-2,5t})$;

$\varphi_4(t) = \sqrt{7}(-e^{-0,5t} + 12e^{-1,5t} - 30e^{-2,5t} + 2e^{-3,5t})$;

$\varphi_5(t) = \sqrt{9}(e^{-0,5t} - 20e^{-1,5t} + 90e^{-2,5t} - 140e^{-3,5t} + 70e^{-4,5t})$.

Таблица

i_1	1	2	3	4	5
1	2,742	1,58	—1,93	—1,815	—0,291
2	1,58	0,91	—1,114	—1,048	—0,168
3	—1,93	—1,114	1,36	1,28	0,2055
4	—1,815	—1,048	1,28	1,2	0,193
5	—0,291	—0,168	0,2055	0,193	0,031

Используя изложенный выше метод, сразу же можем записать ражения для коэффициентов $\{C_{i_1 i_2}\}$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \sum_{i_1=1}^{5} \sum_{i_2=1}^{5} C_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2),$$

де

$$C_{i_1 i_2} = \sigma_y^2 \sum_{k_1=1}^{i_1} \sum_{k_2=1}^{i_2} \alpha_{5k_1} \alpha_{5k_2} \frac{\prod_{k=1}^{2} \left(\sum_{j=0}^{5} b_j s_k^j \right)}{\prod_{k=1}^{2} \left(\sum_{i=0}^{8} a_i s_k^i \right)} \cdot \frac{2\beta + s_1 + s_2}{(s_1 + \beta)(s_2 + \beta)(s_1 + s_2)}$$

или, что то же самое

$$C_{i_1 i_2} = \sigma_y^2 C'_{i_1 i_2} \frac{2\beta + s_1 + s_2}{(s_1 + \beta)(s_2 + \beta)(s_1 + s_2)} \Bigg|_{\substack{s_1 = c_{k_1} \ (k_1 = 1, 2, \ldots, i_1) \\ s_2 = c_{k_2} \ (k_2 = 1, 2, \ldots, i_2)}}.$$

Окончательно имеем:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \sum_{i_1=1}^{5} \sum_{i_1=1}^{5} C_{i_1 i_2} \varphi_{i_1}(t_1) \varphi_{i_2}(t_2).$$

В случае, если на вход действует белый шум, то коэффициенты разложения $C_{i_1 i_2}$ имеют значения, приведенные в таблице 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен численно-аналитический метод расчета моментов высокого порядка случайных выходных сигналов сложных линейных динамических систем.

Метод расчета является аналитическим, но он легко поддается формализации и, таким образом, может быть достаточно просто реализован с помощью ЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодовников В. В. (ред.). Техническая кибернетика, т. III. Изд-во «Машиностроение», М., 1969.

2. Лэнинг Д. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического регулирования. Изд-во иностранной литературы, 1958.