Затягивание потери устойчивости в системе с автоколебаниями

Е.В. Щетинина[1]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

Аннотация. В работе рассматривается система с автоколебаниями при условии, что параметр, отвечающий за наличие колебаний и их амплитуду, медленно меняется. Исследуется устойчивость положения равновесия системы и характер возникновения колебаний.

1. Введение

При исследовании математических моделей сложных нелинейных систем в большинстве случаев принято считать, что параметры, описывающие свойства системы, не зависят от состояния системы и являются величинами постоянными. Это делается для упрощения исследования и с целью получить ответы на вопросы о поведении системы. Однако в реальных физических задачах это предположение не оправдывается. И возникает вопрос об изменении характера движения при старении системы. В данной работе проводится исследование поведения системы с автоколебаниями при условии медленного изменения параметра системы, отвечающего за возникновение колебаний. Термин «автоколебания» ввел А.А. Андронов в 1928 году. Он же заложил основы теории автоколебаний (см, например [1]).

Современное определение автоколебаний можно сформулировать следующим образом. Автоколебания − это незатухающие колебания в нелинейной диссипативно системе, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий. В качестве системы с автоколебаниями будем рассматривать классическую модель Ван-дер-Поля. Изучим условия возникновения колебаний, а также характер их появления в зависимости от изменений параметра системы.

2. Исследование автоколебательной системы

Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля, представляющий собой простейший автоколебательный электрический контур. Математическая модель генератора имеет вид [1]:

$$\ddot{x} - (a - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Здесь x − безразмерное напряжение, a − параметр, связывающий между особой основные характеристики электрического контура. Обычное предположение заключается в том, что параметр a является малым. Хорошо известно, что при небольших положительных значениях параметра a в системе устанавливается автоколебательный режим [1].

Изучим фазовый портрет системы. Перепишем уравнение в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = a(1 - x^2)y - x.$$

Система имеет нулевое положение равновесия. Рассматривая систему в малой окрестности положения равновесия и исследуя ее на устойчивость, получаем, что при отрицательных значениях параметра a нулевое положение равновесия является асимптотически устойчивым фокусом, а при положительных значениях параметра a неустойчивым фокусом. Таким образом, при отрицательных значениях параметра колебания, возникающие в системе, являются затухающими, а при положительном значении параметра амплитуда колебаний возрастает.

Предположим, что система в начальный момент времени находилась в невозмущенном состоянии, например a имеет некоторое отрицательное значение, и в дальнейшем управляющий параметр a медленно возрастает. Таким образом, систему можно переписать в виде

$$\dot{a} = \varepsilon,$$
$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = a(1 - x^2)y - x,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Получаем разнотемповую систему с медленной переменной a и быстрыми фазовыми переменными x,y. Рассмотрим быструю подсистему. Она имеет нулевое положение равновесия. В окрестности положения равновесия матрица линеаризации быстрой подсистемы имеет пару комплексно сопряженных корней, зависящих от управляющей переменной a. Собственные числа в некоторый момент времени при $a = a_{cr}$ пересекают мнимую ось слева направо, не проходя через ноль. Нулевое решение в начальный момент времени является притягивающим, а с ростом значения переменной a теряет свою устойчивость. Остальные решения, начинающиеся при $a < a_{cr}$ достаточно быстро приближаются к притягивающему участку нулевого решения. Однако при росте значений управляющей переменной траектории не сразу покидают малую окрестность уже неустойчивого положения равновесия, а двигаются вдоль него некоторое время порядка $O(1)$, а затем резко срываются с него. В системе наблюдается эффект затягивания потери устойчивости [2].

Таким образом, получаем, что при медленном росте значения управляющей переменной в системе возникают автоколебания. Однако в силу эффекта затягивания потери устойчивости рост амплитуды колебаний происходит не плавно, а скачкообразно.

На рисунке 1 показано поведение невозмущенной системы Ван-дер-Поля при различных начальных значениях переменной a. На всех графиках изображена зависимость напряжения от времени при одинаковом начальном значении напряжения и различных начальных значениях a: первый график при $a = -0.4$, второй при $a = -0.8$, третий - при $a = -1.2$. Пунктиром изображена зависимость вещественной части собственных чисел от времени. Видно, что изменение амплитуды колебаний происходит не сразу после потери устойчивости нулевого решения. Заметим, что чем больше времени траектория проводит в малой окрестности устойчивого участка нулевого решения, тем позднее произойдет срыв с неустойчивого участка и переход к автоколебательному процессу [3].

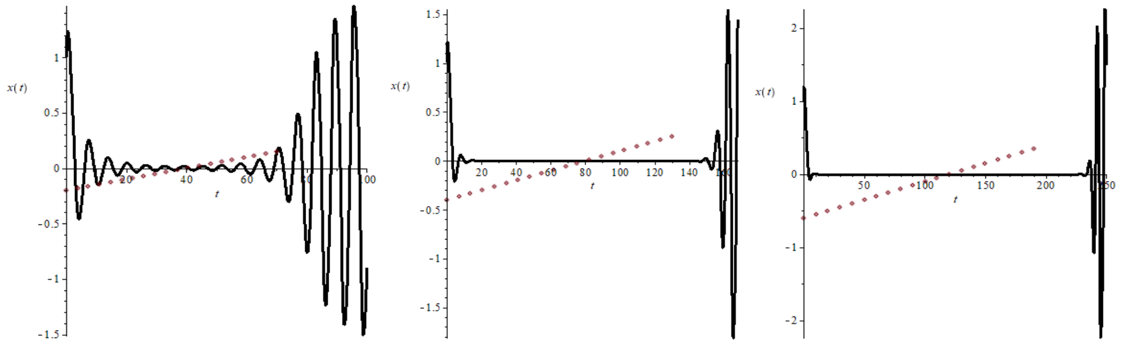

Рисунок 1. Зависимость напряжения от времени при различных начальных значениях управляющей функции.

В силу того факта, что затягивание потери устойчивости наблюдается в аналитических системах, получается, что при наличии внешних возбуждающих сил, при условии аналитичности правых частей системы, рост амплитуды колебаний все равно будет проходить скачкообразно.

3. Литература

[1] Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

[2] Нейштадт, А.И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях / А.И. Нейштадт // Дифференциальные уравнения. – 1987.– Т. 23, № 12. – С. 2060-2067; 1988. – Т. 24, № 2. – С. 226-233.

[3] Щетинина, Е.В. Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости / Е.В. Щетинина // Вестник СамГУ. Естеств.-научн. Сер. – 2010. – Т. 6, № 80. – С.93-105.

Stability loss delay in a system with self-excited oscillations

E.V. Shchetinina[1]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

Abstract. Consider the system with self-excited oscillations under the condition that the existence of oscillations depends on the slowly changing parameter. The dependence of the self-excited oscillations on stability of the steady-state is studied.

Keywords: multi-scale systems, self-excited oscillations, stability loss delay.