Задача оптимального управления интенсивностями процессов с разладками

В.Г. Бурмистрова[1], А.А. Бутов[1], М.С. Явтушенко[1], Б.М. Костишко[1]

[1]Ульяновский государственный университет, Л. Толстого 42, Ульяновск, Россия, 432063

Аннотация. В работе рассматривается постановка задачи об оптимальном управлении процессами с разладками. При этом для одного важного частного формируется и решается задача нахождения оптимального значения параметра, характеризующего интенсивность возникновения разладки. В качестве критерия рассматривается функционал, учитывающий распределение момента первого пересечения фиксированной границы процессом с разладкой с управляемым параметром.

1. Введение

В работе рассматривается постановка задачи об оптимальном управлении процессами с разладками. При этом для одного важного частного формируется и решается задача нахождения оптимального значения параметра, характеризующего интенсивность возникновения разладки. В качестве критерия рассматривается функционал, учитывающий распределение момента первого пересечения фиксированной границы процессом с разладкой с управляемым параметром.

2. Основная часть

В настоящей работе рассматривается простой процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с разладкой [1], происходящей в экспоненциально распределенный момент ς с параметром λ :

$$X_t = \alpha \cdot \int_0^t I\{s > \varsigma\}\, ds + W_t . \tag{1}$$

Здесь предполагается, что $\lambda > 0$ и, не ограничивая общности, броуновское движение является стандартным винеровским процессом с единичным коэффициентом диффузии. Также в задаче для некоторой «границы» $b > 0$ рассматривается момент τ ее первого пересечения (достижения):

$$\tau = inf\{t > 0 : X_t \geq b\} . \tag{2}$$

В постановке (1)-(2) возможны различные варианты оптимизационных задач. Так возможно рассмотрение целевых функций, учитывающей значения α , или b , или λ , или даже тип распределения момента ς .

Здесь мы представляем лишь один частный случай, однако легко допускающий обобщения на случай множественных разладок.

Пусть целевая функция $\varphi(\lambda)$ представляет собой следующую аддитивную формулу:

$$\varphi(\lambda) = E\tau + \gamma \cdot \lambda \,, \tag{3}$$

где увеличение компонента $E\tau$ соответствует естественному «требованию» увеличения срока эксплуатации объекта с разладкой в ς и моментом его «разрушения» в τ. Компонента $\gamma \cdot \lambda$ с $\gamma > 0$ при этом должна также в естественных условиях уменьшаться, поскольку ее увеличение соответствует ослаблению дополнительных воздействий на систему, которые могли бы снизить вероятность возникновения разладки за конечный период времени. Таким образом, решается задача оптимизации

$$\varphi(\lambda^*) = \inf_{\lambda} \varphi(\lambda)\,. \tag{4}$$

Лемма. В предположениях $\alpha > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$ величина $E\tau$ равна

$$E\tau = \frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} + \frac{f(\lambda)}{\alpha}\,, \tag{5}$$

где $f(\lambda) = E(\tau - \varsigma) \cdot I\{\tau - \varsigma < 0\} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \int_0^x \frac{b}{\sqrt{2\pi y}} e^{-b^2/(2y)} dy$.

Теорема. Решение задачи (3)-(4) определяется уравнением трансцендентального типа

$$\frac{\partial \varphi(\lambda)}{\partial \lambda} = 0\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} + \frac{f(\lambda)}{\alpha} + \gamma \cdot \lambda\,, \tag{7}$$

и функция $f(\lambda)$ определяется (5).

Замечание. Очевидные приближения решения (6) определяются приближениями в вычислении (7), как аналитически, так и возможными компьютерными и имитационными способами.

Заметим также в заключение, что в случае иных, отличных от экспоненциального распределений времени наступления разладки (например, с некоторой плотностью вероятность $p_\varsigma(x)$) выражение (5) принимает вид

$$f(\lambda) = \int_0^\infty p_\varsigma(x) \int_0^x \frac{b}{\sqrt{2\pi y}} e^{-b^2/(2y)} dy\,. \tag{8}$$

Также отметим, что обобщение на случай множественной разладки сводится к рассмотрению пуассоновского процесса вместо процесса одного, экспоненциально распределенного скачка [2].

3. Заключение

Модели, приведенные в данной работе, можно применять как в технике, так и в биологии, то есть там, где наблюдаются процессы с изменяющимися показателями в определенный момент.

4. Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ проект № 19-42-730005 р_а.

5. Литература

[1] Ширяев, А.Н. Статистический последовательный анализ – М.: Наука, 1976. – 272 с.
[2] Бутов, А.А. Теория случайных процессов и её дополнительные главы: учебное пособие – Ульяновск: УлГУ, 2016. – 48 с.

The Problem of optimal control of the intensities of processes with change-point

V.G. Burmistrova[1], A.A. Butov[1], M.S. Yavtushenko[1], B.M. Kostishko[1]

[1]Ulyanovsk State University, Lva Tolstogo Street 42, Ulyanovsk, Russia, 432063

Abstract. In the article we conside the formulation of the problem of optimal control of processes with change-point. At the same time, for one important quotient, the problem of finding the optimal parameter value characterizing the intensity of the change-point is formed and solved. As a criterion, we consider a functional that takes into account the distribution of the moment of the first crossing fixed boundary by a process with a change-point with a controlled parameter.