

# Задача оптимального управления для магнитоэлектрического привода

О.В. Видилина<sup>1</sup>, Н.В. Воропаева<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени акад. С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086

**Аннотация.** Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления для сингулярно возмущенной дифференциальной системы, описывающей динамику магнитоэлектрического привода. Построено преобразование координат, осуществляющее расщепление краевой задачи принципа максимума на краевую задачу для медленных переменных и две начальные задачи для быстрых переменных.

## 1. Введение

Рассматривается математическая модель линейного магнитоэлектрического силового привода. Динамика привода описывается сингулярно возмущенной системой дифференциальных уравнений. Наличие разнотемповых переменных делает актуальной проблему декомпозиции системы.

Один из подходов к проблеме разделения быстрых и медленных переменных в сингулярно возмущенных дифференциальных системах базируется на использовании геометрических и асимптотических методов анализа, в частности, теории интегральных многообразий [1-3]. В работах [4-10] метод асимптотической декомпозиции применялся для решения задач оптимального управления для разнотемповых динамических систем различной природы.

Задача оптимального быстрогодействия для линейного магнитоэлектрического привода рассматривалась в работе [2]. Разработан алгоритм построения асимптотики точек переключения.

В настоящей работе рассматривается задача синтеза оптимального управления для линейного магнитоэлектрического привода с квадратичным критерием. Для построения оптимального управления используется подход, основанный на решении краевой задачи принципа максимума. Использование метода асимптотической декомпозиции позволяет расщепить сингулярно возмущенную краевую задачу на краевую задачу для медленных переменных и две регулярные задачи Коши для быстрых переменных с условиями на левом и правом концах рассматриваемого промежутка, решениями которых являются функции типа погранслоя.

## 2. Математическая модель

Рассмотрим систему, состоящую из линейного магнитоэлектрического силового привода и перемещаемого груза. Привод представляет собой катушку, движущуюся в просвете

постоянного магнита. Динамика системы описывается дифференциальными уравнениями [11–13]

$$\begin{aligned} U(t) &= I(t)R + L\dot{I}(t) + K_e v(t) \\ m\dot{v}(t) + Bv(t) &= K_F I(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $U = U(t)$  — входное напряжение,  $I = I(t)$  — сила тока в катушке,  $L$  — индуктивность катушки,  $R$  — сопротивление,  $\bar{E} = K_e v(t)$  — противо-ЭДС,  $m$  — масса нагрузки, включая катушку,  $B$  — коэффициент вязкого трения,  $F = K_F I$  — действующая сила привода (сила Лоренца),  $x = x(t)$  — перемещение движущейся части,  $v = v(t) = \dot{x}(t)$  — линейная скорость.

Учитывая, что в данной системе индуктивность катушки предполагается малой, введем малый параметр  $\varepsilon = L$  и перепишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\mu v + \alpha_1 I, \\ \varepsilon \dot{I} &= -\alpha_2 x_2 - RI + u, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mu = B/m$ ,  $\alpha_1 = K_F/m$ ,  $\alpha_2 = K_e$ . Управляющим воздействием в данной системе является входное напряжение  $u = U(t)$ .

Будем рассматривать задачу минимизации квадратичного функционала

$$J = \int_0^1 (\beta_1 x^2(t) + \beta_2 v^2(t) + \beta_3 I^2(t) + \gamma u^2(t)) dt, \quad \beta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}, \quad \gamma > 0 \quad (3)$$

на траекториях системы (2) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0, \quad I(0) = I_0. \quad (4)$$

В соответствии с принципом максимума оптимальное управление в данной задаче имеет вид

$$u = -\frac{1}{\gamma} q, \quad (5)$$

где сопряженная переменная  $q$  является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\mu v + \alpha_1 I, \\ \dot{p}_1 &= -\beta_1 x, \\ \dot{p}_2 &= -\beta_2 v - p_1 + \mu p_2 + \alpha_2 q, \\ \varepsilon \dot{I} &= -\alpha_2 v - RI - \frac{1}{\gamma} q, \\ \varepsilon \dot{q} &= -\alpha_1 p_2 - \beta_3 I + Rq, \end{aligned} \quad (6)$$

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0, \quad I(0) = I_0, \quad p_1(1) = 0, \quad p_2(1) = 0, \quad q(1) = 0. \quad (7)$$

Представим систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$x_1 = \begin{pmatrix} x \\ v \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & -1 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} I \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -R & -\frac{1}{\gamma} \\ -\beta_3 & R \end{pmatrix}.$$

Краевые условия (7) переписутся в виде

$$x_{1,1}(0) = x_0, \quad x_{1,2}(0) = v_0, \quad x_{1,3}(1) = 0, \quad x_{1,4}(1) = 0, \quad x_{2,1}(0) = I_0, \quad x_{2,2}(1) = 0. \quad (9)$$

### 3. Декомпозиция системы

Система (8) представляет собой линейную сингулярно возмущенную систему. Используя идеи метода асимптотической декомпозиции [2], произведем расщепление этой системы на независимые "медленную" и "быструю" подсистемы. Произведем замену переменных

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 - \varepsilon P x_4, \\ x_4 &= x_2 - H x_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где матрицы  $H = H(\varepsilon)$  и  $P = P(\varepsilon)$  являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon H(A_{11} + A_{12}H) &= A_{21} + A_{22}H, \\ P A_2 &= \varepsilon A_1 P + A_{12}, \end{aligned} \quad (11)$$

$A_1 = A_1(\varepsilon) = A_{11} + A_{12}H$ ,  $A_2 = A_2(\varepsilon) = A_{22} - \varepsilon H A_{12}$ . В результате получается блочно-диагональная система вида

$$\dot{x}_3 = A_1(\varepsilon)x_3, \quad (12)$$

$$\varepsilon \dot{x}_4 = A_2(\varepsilon)x_4 \quad (13)$$

Матрицы  $H = H(\varepsilon)$  и  $P = P(\varepsilon)$  могут быть найдены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \dots, \quad P = P_0 + \varepsilon P_1 + \dots, \quad (14)$$

Подставляя (14) в уравнения (11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$H_0 = \frac{1}{\delta_1} \begin{pmatrix} 0 & \gamma R \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & -\beta_3 \gamma \alpha_2 & 0 & R \gamma \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \delta_1 = \gamma R^2 + \beta_3,$$

$$H_1 = \frac{1}{\delta_1^2} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \gamma (\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) & 0 & -\alpha_1^2 \alpha_2 \gamma \\ 0 & -\gamma \alpha_1 (\beta_2 \delta_1 + \alpha_2^2 \beta_3 \gamma) & -\alpha_1 \gamma & \alpha_1 \gamma (\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) \end{pmatrix},$$

$$P_0 = \frac{1}{\delta_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma R \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 \\ -\beta_3 \gamma \alpha_2 & R \gamma \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \frac{1}{\delta_1^2} \begin{pmatrix} \delta_1 \gamma \alpha_1 & 0 \\ -\gamma \alpha_1 (\mu \delta_1 + 2\gamma R \alpha_1 \alpha_2) & -2\gamma \alpha_2 \alpha_1^2 \\ 0 & 0 \\ -\gamma \alpha_1 (\beta_2 \delta_1 + 2\alpha_2^2 \beta_3 \gamma) & \gamma \alpha_2 (\mu \delta_1 + 2\gamma R \alpha_1 \alpha_2) \end{pmatrix}.$$

С точностью до членов порядка  $O(\varepsilon)$  матрицы  $A_1$  и  $A_2$  примут вид  $A_1 = A_1(\varepsilon) = A_1^{(0)} + \varepsilon A_1^{(1)}$ ,  $A_2 = A_2(\varepsilon) = A_2^{(0)} + \varepsilon A_2^{(1)}$ ,

$$A_1^{(0)} = \frac{1}{\delta_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) & 0 & -\alpha_1^2 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_2 \delta_1 + \alpha_2^2 \beta_3 \gamma) & -1 & (\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(1)} = \frac{\gamma \alpha_1 \alpha_2}{\delta_1^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) & 0 & -\alpha_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\beta_2 \delta_1 + \alpha_2^2 \beta_3 \gamma) & -\delta_1 & (\mu \delta_1 + \gamma R \alpha_1 \alpha_2) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -R + \varepsilon \gamma R \delta_2 & -\frac{1}{\gamma} + \varepsilon \delta_2 \\ -\beta_3 + \varepsilon \gamma R \delta_2 & R - \varepsilon \gamma R \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\delta_1}.$$

Принимая во внимание структуру матрицы  $A_2(\varepsilon)$ , приведем быструю подсистему (13) к блочно-диагональному виду при помощи замены переменных вида

$$x_4 = \begin{pmatrix} 1 & K \\ M & 1 + MK \end{pmatrix} z, \tag{15}$$

где  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ,  $M$  и  $K$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} M[a_{11}(\varepsilon) + a_{12}(\varepsilon)M] &= a_{21}(\varepsilon) + a_{22}(\varepsilon)M, \\ KN_2(\varepsilon) &= N_1(\varepsilon)K + a_{22}(\varepsilon), \end{aligned} \tag{16}$$

где  $N_1 = N_1(\varepsilon) = a_{11}(\varepsilon) + a_{12}(\varepsilon)M$ ,  $N_2 = N_2(\varepsilon) = a_{22}(\varepsilon) - Ma_{12}(\varepsilon)$ ,  $a_{ij}(\varepsilon)$  — элементы матрицы  $A_2(\varepsilon)$ . Функции  $M(\varepsilon)$ ,  $K(\varepsilon)$ , могут быть найдены из этих уравнений в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \dots, \quad K = K_0 + \varepsilon K_1 + \dots$$

Получаем

$$M = -R\gamma + \sqrt{\gamma \delta_1} + O(\varepsilon^2), \quad K = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma \delta_1}} + O(\varepsilon^2).$$

В результате система (13) приводится к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_1 &= N_{1(\varepsilon)} z_1, \\ \varepsilon \dot{z}_2 &= N_{2(\varepsilon)} z_2. \end{aligned} \tag{17}$$

$$N_1(\varepsilon) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma \delta_1}} (\delta_1 - \varepsilon \alpha_1 \alpha_2 \gamma) + O(\varepsilon^2) > 0, \quad N_2(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\gamma \delta_1}} (\delta_1 - \varepsilon \alpha_1 \alpha_2 \gamma) + O(\varepsilon^2) < 0.$$

#### 4. Декомпозиция краевых условий

Для расщепления краевых условий применим итоговое преобразование координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \varepsilon D \\ H & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$D = D(\varepsilon) = \begin{pmatrix} D_{11}(\varepsilon) & D_{12}(\varepsilon) \\ D_{21}(\varepsilon) & D_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & K \\ M & 1 + MK \end{pmatrix}, \quad H = H(\varepsilon) = \begin{pmatrix} H_{11}(\varepsilon) & H_{12}(\varepsilon) \\ H_{21}(\varepsilon) & H_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$V = V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} V_{11}(\varepsilon) & V_{12}(\varepsilon) \\ V_{21}(\varepsilon) & V_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix} = (E + \varepsilon HP) \begin{pmatrix} 1 & K \\ M & 1 + MK \end{pmatrix}, \quad w = w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix},$$

$$w_1 = w_1(t) = \begin{pmatrix} w_{1,1}(t) \\ w_{1,2}(t) \end{pmatrix}, \quad w_2 = w_2(t) = \begin{pmatrix} w_{1,3}(t) \\ w_{1,4}(t) \end{pmatrix}, \quad z = z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что  $N_1 < 0$ ,  $N_2 > 0$ , и пренебрегая членами порядка  $O(e^{-1/\varepsilon})$ , можно переписать краевые условия (9) в виде

$$\begin{aligned} w_1(0) + \varepsilon D_{11} z_1(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \\ H_{11} w_1(0) + H_{12} w_2(0) + V_{11} z_1(0) &= I_0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w_2(1) + \varepsilon D_{22} z_2(1) &= 0, \\ H_{21} w_1(1) + H_{22} w_2(1) + V_{22} z_2(1) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражая  $z_1(0)$ ,  $z_2(1)$  из (19), (20), получаем краевую задачу для медленных переменных

$$\begin{aligned} \dot{w} &= A_1 w, \\ w_1(0) + \varepsilon D_{11} (V_{11})^{-1} [I_0 - H_{11} w_1(0) - H_{12} w_2(0)] &= \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \\ -\varepsilon D_{22} (V_{22})^{-1} H_{22} w_1(1) + (E - \varepsilon D_{22} (V_{22})^{-1} V_{22}) w_2(1) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

и две начальные задачи для быстрых переменных

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_1 &= N_1 z_1, \\ z_1(0) &= (V_{11})^{-1} [I_0 - H_{11} w_1(0) - H_{12} w_2(0)], \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z}_2 &= N_2 z_2, \\ z_2(1) &= -(V_{22})^{-1} [H_{21} w_1(1) + H_{22} w_2(1)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, при помощи линейного преобразования (18) сингулярно возмущенная краевая задача (6), (9) расщепилась на регулярно возмущенную краевую задачу (21) и две сингулярно возмущенных начальных задачи (22) (23).

Краевые условия задачи (21) точностью до членов порядка  $O(\varepsilon)$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 w_{1,1}(0) &= x_0, \\
 w_{1,2}(0) - \varepsilon \frac{\sqrt{\gamma}\alpha_1}{\sqrt{\delta_1^3}} (\delta_1 I_0 + R\gamma\alpha_2 w_{1,2}(0) + \alpha_1 w_{1,4}(0)) - v_0 &= 0, \\
 w_{1,3}(1) &= 0, \\
 w_{1,4}(1) + \varepsilon\alpha_2(\alpha_2\beta_3 w_{1,2}(1) - \alpha_1 R w_{1,4}(1)) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу для следующих характерных значений параметров системы:

$$R = 2, \quad L = 0.001, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = 10, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \gamma = 0.1$$

На рисунках 1-3 изображены оптимальная траектория и оптимальное управление в рассматриваемой задаче.

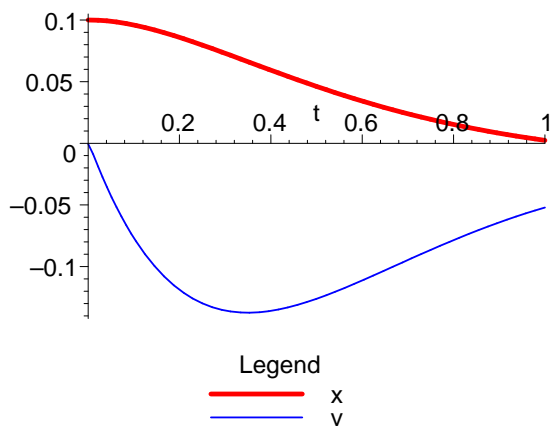


Рисунок 1.  $x(t)$ ,  $v(t)$ .

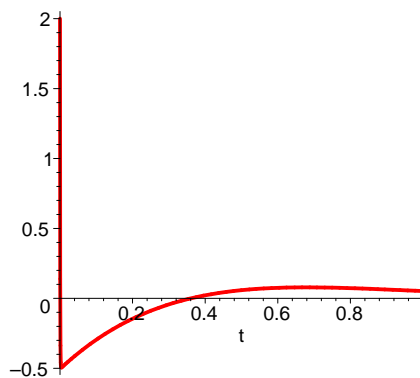


Рисунок 2.  $I(t)$ .

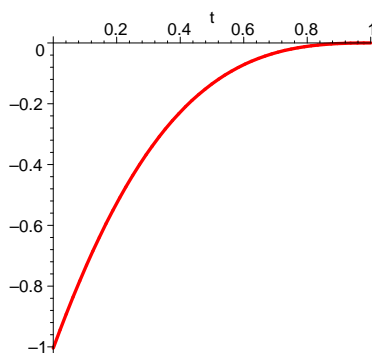


Рисунок 3. Оптимальное управление  $U(t)$ .

### 5. Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Самарской области в рамках научного проекта N 16-41-630524 и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности Самарского университета (2013–2020).

## 6. Литература

- [1] Sobolev, V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems / V.A. Sobolev // Syst. & Control Lett. — 1984. — Vol. 5. — P. 169–279.
- [2] Voropaeva, N.V. Geometric decomposition of singularly perturbed systems / N.V. Voropaeva, V.A. Sobolev. — Moscow: Fizmatlit, 2009. [in Russian]
- [3] Shchepakina, E. Singular Perturbations: Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell. — Springer Lecture Notes in Mathematics, Cham: Springer International Publishing, 2014. - 225 p.
- [4] Voropaeva, N.V. Decomposition of a linear-quadratic optimal control problem with fast and slow variables / V. Voropaeva, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. — 2006. — Vol. 67(8). — P. 1185–1193.
- [5] Voropaeva, N.V. Decomposition of problems of optimal control and estimation for discrete systems with fast and slow variables / N.V. Voropaeva // Automation and Remote Control. — 2008. — Vol. 69(6). — P. 920-928.
- [6] Sobolev, V.A. Singular perturbations in linearly quadratic optimal control problems / V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. — 1991. — Vol. 52(2). — P. 180–189.
- [7] Vidilina, O.V. The construction of the observers for dynamic systems with fast and slow variables / O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Vol. 1638. — P. 750–758. DOI: 10.18287/1613-0073-2016-1638-754-762.
- [8] Osintsev, M.S. Dimensionality Reduction in Optimal Control and Estimation Problems for Systems of Solid Bodies with Low Dissipation / M.S. Osintsev, V.A. Sobolev // Automation and Remote Control. — 2013. - Vol. 74(8). - P. 121–137.
- [9] Mortell, M.P. Singular Perturbation and Hysteresis / M.P. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V. Sobolev. — Philadelphia: SIAM, 2005. — 358 p.
- [10] Vidilina, O.V. Reduction of flexible joint manipulator mathematical model / O.V. Vidilina, N.V. Voropaeva // CEUR Workshop Proceedings. — 2017. — Vol. 1904. — P. 249–253.
- [11] Novotny, D.W. Vector Control and Dynamics of AC Drivers / D.W. Novotny, T.A. Lipo. — New York: Oxford, 1996.
- [12] Brown, C.J. Time-optimal Control of a Moving-Coil Linear Actuator // C.J. Brown, J.T. Mo // IBMRes.Develop. — 1968. — P. 372–379.
- [13] Christiansen, B. Control of a Voice-Coil-Motor with Coulombic Friction / B. Christiansen, H. Maurer Zim // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008. — P. 1557–1562. DOI:10.1109/CDC.2008.4739025.

# The optimal control problem for magnetoelectric actuator

O.V. Vidilina<sup>1</sup>, N.V. Voropaeva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086

**Abstract.** The linear-quadratic optimal control problem for a singularly perturbed differential system describing the dynamics of a magnetoelectric actuator is considered. A coordinate transformation that performs the decomposition of the boundary value problem of the maximum principle to the boundary value problem for slow variables and two initial problems for fast variables is constructed.

**Keywords:** magnetoelectric actuator, singularly perturbed differential system, boundary value problem, decomposition.