

Высокопроизводительное сравнение сигналов на основе их парного выравнивания для анализа электроэнцефалограмм головного мозга

А.И. Макарова^а, В.В. Сулимова^а

^а Тульский государственный университет, 300012, пр. Ленина, 92, Тула, Россия

Аннотация

Автоматический анализ электроэнцефалограмм является одним из перспективных направлений исследований, результаты которых могут быть использованы, в частности, для построения систем мысленного управления объектами. Для сравнения сигналов, представляющих электроэнцефалограммы, в данной работе используется процедура их парного выравнивания (DTW). Важной особенностью рассматриваемой задачи является необходимость многократного сравнения сигналов на этапе машинного обучения, что требует колоссальных вычислительных затрат. В данной работе предлагается параллельный алгоритм, который был реализован на языке C++ с применением технологии MPI и протестирован с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова. Результаты его исследования на реальных данных показали, что благодаря учету особенностей задачи, предложенный метод позволяет достичь почти линейного ускорения.

Ключевые слова: высокопроизводительные вычисления; сравнение фрагментов электроэнцефалограмм; оптимальное парное выравнивание; технология MPI; суперкомпьютерный комплекс МГУ имени М.В. Ломоносова

1. Введение

Электроэнцефалография (ЭЭГ) представляет собой метод, заключающийся в считывании при помощи электродов, расположенных на коже головы, электрических сигналов, генерируемых головным мозгом в процессе мозговой активности [1,2] и записи их в виде электроэнцефалограмм с целью последующего анализа.

Автоматический анализ электроэнцефалограмм головного мозга является одним из перспективных направлений научных исследований, результаты которых могут использоваться, в частности, для построения систем мысленного управления внешними устройствами, например, компьютером (braincomputerinterface, BCI) [3].

Идея построения такого интерфейса "мозг-компьютер" основывается на факте, что сигналы, генерируемые головным мозгом при воздействии определенных (целевых) раздражителей, соответствующих некоторой конкретной задаче, обычно содержат специфические компоненты, которые, как правило, отсутствуют при воздействии другими раздражителями. Так происходит, в частности, при узнавании объекта заданного типа среди ряда других объектов. Очевидно, что автоматическое определение момента узнавания нужного объекта на основе анализа электроэнцефалограммы играет одну из ключевых ролей при построении системы мысленного управления внешними объектами [4,5], в связи с чем повышение качества ее решения является особенно актуальным.

В данной работе мы ориентируемся на схему экспериментального исследования, принятую в [5], согласно которой испытуемому предъявляются серии изображений маммограмм и ставится задача обнаружения среди них маммограмм, содержащих патологии (так называемых целевых маммограмм). В процессе просмотра изображений регистрируются ЭЭГ-сигналы, поступающие с 66 электродов, закрепленных на различных участках головы испытуемого. Задачей в данном случае является автоматическое определение сигналов, зарегистрированных в процессе просмотра целевых маммограмм. На рисунке 1а изображен процесс снятия электроэнцефалограммы, а на рисунках 1б и 1в - приведены примеры маммограмм с патологией и без, соответственно [5].

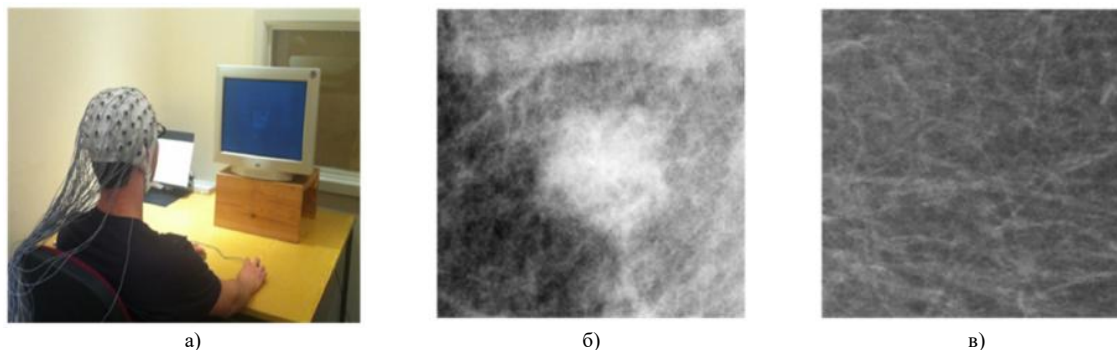


Рис. 1. а) Процесс снятия электроэнцефалограмм, б) пример целевого объекта (маммограммы с патологией), в) пример нецелевого объекта (маммограммы без патологий).

На рисунке 2 представлены примеры сигналов, зарегистрированных с двух из 66 электродов при просмотре целевых (сплошные линии) и нецелевых (пунктирные линии) объектов. Приведенные сигналы подвергнуты предварительной

обработке (фильтрация, масштабирование и сглаживание скользящим окном), применяемой нами для повышения качества распознавания целевых объектов.

С математической точки зрения, подлежащие анализу электроэнцефалограммы для каждого из 66 электродов, закрепленных на различных участках головы, представляют собой однокомпонентные дискретные сигналы.

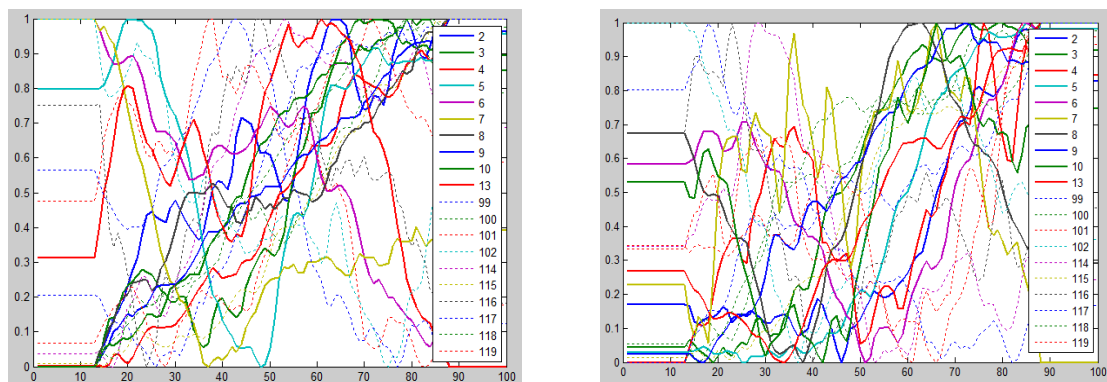


Рис. 2. Примеры сигналов, полученных с двух электродов. Сплошными линиями показаны сигналы, соответствующие целевым объектам, а пунктирными - не целевым.

Очевидно, что анализ электроэнцефалограмм неизбежно должен базироваться на сравнении представляющих их сигналов. Поскольку форма отклика на раздражитель и время его наступления может варьироваться, то в данной работе для сравнения сигналов используется немного адаптированный вариант метода динамического выравнивания временных рядов, известного в англоязычной литературе под названием DynamicTimeWarping (DTW), основанного на поиске оптимального парного выравнивания сравниваемых сигналов путем локальных сжатий и растяжений их осей. Изначально метод DTW был предложен для сравнения речевых сигналов [6], но затем был адаптирован и для многих других областей [7,8].

Задача анализа электроэнцефалограмм в рамках данной работы формулируется в виде двухклассовой задачи распознавания образов, решение которой осуществляется в два этапа - обучение и распознавание [9]. На этапе обучения формируется решающее правило отнесения новых сигналов к классу целевых или не целевых на основе обработки некоторой конечной совокупности сигналов с известной классовой принадлежностью, а на этапе распознавания осуществляется применение построенного решающего правила к новому сигналу. При этом само распознавание может быть осуществлено очень быстро, в то время, как процесс построения хорошего решающего правила, позволяющего с высокой точностью классифицировать новые сигналы, является весьма трудоемким.

Современные методы машинного обучения при построении решающих правил опираются на меры сравнения объектов и даже позволяют автоматически в процессе обучения выбирать наиболее подходящие из них, повышая качество решения задачи [10]. Большая трудоемкость обучения в данном случае оказывается обусловлена в первую очередь необходимостью многократного сравнения достаточно длинных сигналов при вычислении целой серии матриц их парного несходства (для разных электродов, разной предварительной обработки, разных значений параметров алгоритма сравнения), выбрать наиболее подходящие из которых априори не представляется возможным.

В связи с вышеизложенным чрезвычайно актуальной задачей является задача повышения производительности сравнения электроэнцефалограмм.

В литературе известен ряд способов ускорения метода поиска оптимального парного выравнивания сигналов, однако они либо не гарантируют нахождения оптимального решения [6,11-14], либо повышение производительности обеспечивается только в каких-либо особенных ситуациях, например, при сравнении близких или информационно разреженных сигналов [15,16], которые при анализе электроэнцефалограмм встречаются достаточно редко. Принципиально другим направлением повышения производительности является применение современных технологий параллельных вычислений. Однако реализации известных параллельных алгоритмов поиска оптимального парного выравнивания (как и аналогичных задач с циклами, имеющими диагональные зависимости) не дают нужного эффекта из-за необходимости частой синхронизации процессов или потоков, а в некоторых случаях могут привести даже к увеличению времени работы по сравнению последовательной версией из-за менее эффективной работы с кэш-памятью [17-21].

В данной работе предлагается достаточно простой параллельный алгоритм, который позволяет существенно повысить производительность вычисления матрицы парных сравнений для любых сигналов, представляющих электроэнцефалограммы, без потери точности вычислений за счет учета особенностей задачи, позволяющей осуществить распараллеливание на более высоком уровне.

Предложенный алгоритм реализован на языке C++ с применением технологии MPI [21] и протестирован с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [23]. Результаты исследования на реальных данных показали, что предложенный метод позволяет достичь почти линейного ускорения и при использовании 128 процессов сократить общее время вычислений с 29 суток до 3,5 часов, что открывает возможности что открывает возможности повышения качества автоматического анализа электроэнцефалограмм.

2. Сравнение фрагментов электроэнцефалограмм на основе парного выравнивания представляющих их сигналов

2.1. Математическая формулировка задачи сравнения двух сигналов

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_x})$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_y})$ - два однокомпонентных дискретных сигнала длин N_x и N_y , соответственно, состоящие из элементов $x_i, y_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$.

Конкретное выравнивание

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \begin{pmatrix} w_{i,1} \\ w_{i,2} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, N_w \right\}, w_{i,1} \in \{1, \dots, N_x\}, w_{i,2} \in \{1, \dots, N_y\}$$

двух сигналов \mathbf{x} и \mathbf{y} однозначно определяет соответствие отсчетов сигналов и имеет длину N_w , равную количеству таких парных соответствий.

Оптимальным будем считать выравнивание, обеспечивающее минимальное значение следующего критерия оптимальности:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}), \quad J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}) = \sqrt{\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^{N_w} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, i)}, \quad (1)$$

где

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, i) = |x_i - y_i| + \begin{cases} 0, & (w_{i,1} = w_{i-1,1} + 1) \text{ и } (w_{i,2} = w_{i-1,2} + 1), \\ \beta, & \left\{ \begin{array}{l} (w_{i,1} = w_{i-1,1} + 1) \text{ и } (w_{i,2} = w_{i-1,2}) \\ (w_{i,1} = w_{i-1,1}) \text{ и } (w_{i,2} = w_{i-1,2} + 1) \end{array} \right\} \text{ или} \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

β - штраф за непараллельные ссылки (локальные сжатия или растяжения осей сигналов при выравнивании).

Оптимальное значение критерия может рассматриваться как несходство сигналов:

$$r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{w}})}.$$

2.2. Последовательный алгоритм вычисления несходства двух сигналов

Минимум критерия оптимальности **Ошибка! Источник ссылки не найден.** можно найти при помощи процедуры динамического программирования [24]. Соответствующий алгоритм удобно представить при помощи ориентированного графа парных выравниваний (рис. 3), в котором узлы соответствуют сопоставлению отсчетов сигналов, представляющих фрагменты электроэнцефалограмм, горизонтальные и вертикальные ребра - локальному сжатию или растяжению осей (при прохождении по ним накладывается штраф β), а диагональные ребра - параллельным ссылкам.

Алгоритм поиска оптимального парного выравнивания заключается в последовательном прохождении по всем вершинам графа, начиная с левой верхней и заканчивая правой нижней, вычисляя в каждой вершине неполное значение критерия оптимальности $\bar{J}_{i,j}$, вычисленное только по начальным частям сигналов $\mathbf{x}_{1..i} = (x_1, \dots, x_i)$, $\mathbf{y}_{1..j} = (y_1, \dots, y_j)$:

$$\begin{aligned} \bar{J}_{1,1} &= |x_1 - y_1|, \\ \bar{J}_{1,j} &= \bar{J}_{1,j-1} + |x_1 - y_j| + \beta, \quad j = 1, \dots, N_y, \\ \bar{J}_{i,1} &= \bar{J}_{i-1,1} + |x_i - y_1| + \beta, \quad i = 1, \dots, N_x, \\ \bar{J}_{i,j} &= |x_i - y_j| + \min \{ \bar{J}_{i-1,j-1}, \bar{J}_{i-1,j} + \beta, \bar{J}_{i,j-1} + \beta \}, \quad j = 2, \dots, N_y, \quad i = 2, \dots, N_x. \end{aligned} \quad (2)$$

Искомое значение несходства двух сигналов: $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\bar{J}_{N_x, N_y}}$

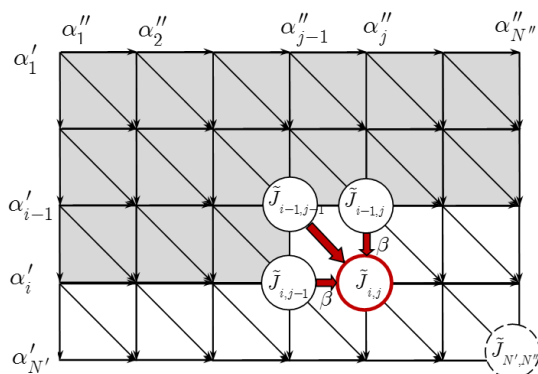


Рис. 3. Граф парных соответствий отсчетов сигналов, представляющих электроэнцефалограммы.

2.3. Вычисление матрицы значений несходства электроэнцефалограмм

Как уже было сказано выше, при анализе электроэнцефалограмм головного мозга, на этапе обучения машинных алгоритмов анализа данных необходимо вычислять матрицы значений несходства для всех пар сигналов, представляющих фрагменты электроэнцефалограмм, из некоторого обучающего множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$.

Матрица парных сравнений, вычисленных в соответствии с алгоритмом, приведенным в разделе 2.2 является симметричной и на диагонали содержит нулевые значения, поэтому достаточно вычислить только значения, принадлежащие верхнему (или нижнему) треугольнику (рис. 4), количество которых может быть определено согласно выражению $K(K-1)/2$.

	x_1	x_2	x_3	...	x_K
x_1	0	$r_{1,2}$	$r_{1,3}$...	$r_{1,K}$
x_2	$r_{1,2}$	0	$r_{2,3}$...	$r_{2,K}$
x_3	$r_{1,3}$	$r_{2,3}$	0	...	$r_{3,K}$
...
x_K	$r_{1,K}$	$r_{2,K}$	$r_{3,K}$...	0

Рис. 4. Матрица значений парного несходства сигналов.

Проблема заключается в том, что количество вычислений в данном случае имеет квадратичную зависимость от числа сравниваемых последовательностей и даже для относительно небольшого объема обучающей совокупности, составляющей в рамках данного исследования $K = 755$ фрагментов электроэнцефалограмм (для каждого электрода), для вычисления одной такой матрицы требуется выполнить 284635 парных сравнений сигналов. Соответственно, для вычисления таких матриц для всех 66 электродов и для трех различных значений штрафа на локальные сжатия и растяжения осей потребуется выполнить 56357730 парных сравнений сигналов. А с учетом того, что время одного парного сравнения требует в среднем 0,045 сек, то на вычисление всех матриц требуется около 29 суток, что делает невозможным проведение экспериментов на реальных данных и требует принятия специальных мер по повышению производительности вычислений.

3. Параллельное сравнение электроэнцефалограмм

Задача вычисления нескольких матриц парного несходства фрагментов электроэнцефалограмм имеет несколько уровней параллелизма по данным. Независимо друг от друга могут быть вычислены:

- 1) неполные значения критерия (2) **Ошибка! Значение не определено.**, расположенные на одной побочной диагонали,
- 2) все элементы, принадлежащие верхнему (или нижнему) треугольнику матрицы значений парного несходства (рисунок 4),
- 3) все матрицы парного несходства.

Распараллеливание на 1-м уровне требует частого взаимодействия процессов или потоков и связано с затратами на синхронизацию, а также может приводить к неэффективному использованию кэш-памяти [17-21] и, соответственно, не обеспечивает желаемого ускорения вычислений.

Распараллеливание на 3-м уровне, очевидно, имеет смысл только в случае, если количество матриц, которые необходимо вычислить больше количества доступных вычислителей.

Поскольку в данном исследовании мы ориентируемся на вычислительные возможности, предоставляемые суперкомпьютерным комплексом МГУ имени М.В. Ломоносова [23] **Ошибка! Неизвестный аргумент ключа.**, состоящим из более 5000 узлов и более 12000 процессорных ядер, то третий вариант также представляется нецелесообразным.

В связи с этим в рамках данной работы в качестве параллельных задач выделены задачи вычисления элементов одной матрицы парного несходства сигналов, т.е. распараллеливание производится на 2-м уровне. При этом в случае, если необходимо вычислить несколько матриц, то они вычисляются последовательно.

В качестве технологии организации параллельных вычислений выбрана технология MPI **Ошибка! Неизвестный аргумент ключа.**, позволяющая организовать взаимодействие процессов, запущенных на разных вычислительных узлах.

При этом, поскольку даже для суперкомпьютера "Ломоносов" количество элементов каждой вычисляемой матрицы оказывается существенно больше числа процессоров, то производится укрупнение параллельных задач путем одновременного распределения элементов матрицы между процессами.

Для распределения $M = K(K - 1)/2$ элементов между P процессами в данной работе используется следующая схема: первые $M \bmod P$ процессов получают $(M - M \bmod P)/P + 1$ элементов, а оставшиеся $M - M \bmod P$ процессов получают $(M - M \bmod P)/P$ элементов, где \bmod - операция взятия остатка от целочисленного деления.

Такая схема позволяет распределить работу между процессами максимально равномерно. Единовременное равномерное распределение элементов между процессами оказывается наиболее эффективным в рассматриваемой ситуации, поскольку все сравниваемые сигналы имеют одинаковую длину и, соответственно, сравнение любых пар сигналов занимает примерно одинаковое время, в результате чего приведенная схема позволяет обеспечить наиболее эффективное использование ресурсов вычислительной системы.

Графическое представление схемы распределения данных по процессам представлено на рис. 5.

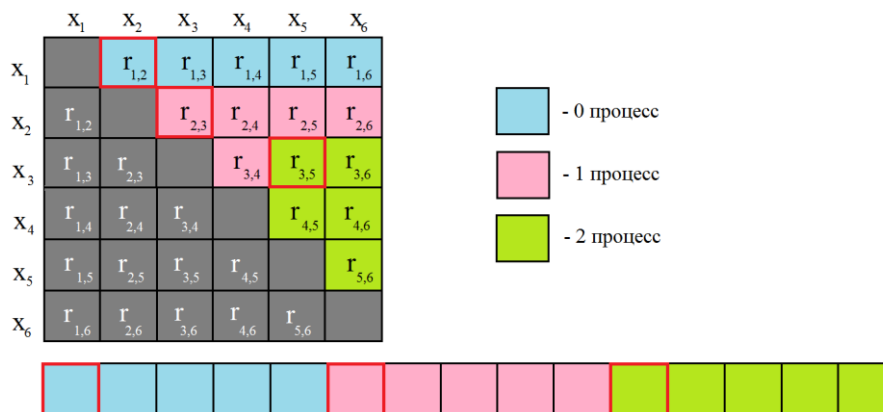


Рис. 5. Схема распределения данных по процессам для трех процессов.

Согласно предлагаемой схеме параллельных вычислений, каждый процесс независимо от других:

- 1) читает исходные сигналы, представляющие фрагменты электроэнцефалограмм из входного файла,
- 2) определяет количество элементов, которые он должен обработать и линейный индекс начального элемента, принадлежащего его диапазону, согласно приведенному выше принципу равномерного распределения элементов между процессами,
- 3) по найденному линейному индексу вычисляет номер строки и столбца, определяющих положение данного элемента в матрице,
- 4) осуществляет последовательный перебор подряд идущих элементов матрицы, принадлежащих верхнему треугольнику, начиная с элемента, определенного в пункте 2, осуществляя при этом для каждого элемента сравнение сигналов с соответствующими номерами (согласно описанному в разделе 2.2 последовательному алгоритму) и сохраняя вычисленные значения в своей копии матрицы несходства. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет обработано вычисленное в пункте 2 количество элементов.

После того, как каждый процесс вычислит свои элементы матрицы несходства, производится объединение всех результатов на процессе с номером 0 при помощи функции MPI_Reduce.

4. Экспериментальные исследования

Для исследования предложенного алгоритма использовались электроэнцефалограммы головного мозга, полученные в ходе исследования, описанного в работе [5].

Всего требуется вычислить по три матрицы (для разных значений параметра) парного несходства 755-ти сигналов для каждого из 66 электродов. Т.е. всего требуется вычислить 198 матриц. Однако, поскольку все сигналы имеют одинаковую длину (1100 отсчетов), то вычисление всех матриц несходства занимает примерно одинаковое время. В связи с этим тестирование производительности достаточно произвести для одной из матриц.

Исследование производительности осуществлялось с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [23]. Для выявления возможных особенностей поведения предложенного алгоритма тестирование проводилось для разных размеров матриц и разного числа процессов. Результаты замеров времени при вычислении одной матрицы парного несходства сигналов приведены в таблице 1.

На основе данных таблицы 1, для каждого случая было вычислено полученное ускорение как отношение времени последовательного вычисления к времени вычисления на P процессорах. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 1. Время вычисления матрицы парного сравнения сигналов для разных размеров матриц и разного числа процессов

Число сигналов	Время работы алгоритма (сек)							
	Число процессов							
	1	2	4	8	16	32	64	128
10	2,14918	1,12535	0,701826	0,48118	0,21083	0,191736	0,205418	0,353755
20	9,04609	4,61894	2,38828	1,15214	0,619012	0,381232	0,297953	0,392734
40	37,1698	18,7533	9,42092	4,82778	2,34974	1,26236	0,822015	0,615929
100	232,34	117,278	58,3369	29,1305	14,696	7,72897	4,09282	2,46599
200	943,653	472,307	238,218	117,96	59,0047	30,2108	15,3994	8,34048
300	2124,3	1083,46	541,713	268,855	133,068	67,1879	34,5807	17,4532
500	5912,42	3010,1	1498,6	736,2	371,859	185,836	93,3412	49,3313
755	13675,7	6864,46	3418,42	1700,52	847,277	422,34	212,281	106,928

Таблица 2. Ускорение, полученное при вычислении матрицы парного сравнения сигналов для разных размеров матриц и разного числа процессов

Число сигналов	Ускорение работы алгоритма							
	Число процессов							
	1	2	4	8	16	32	64	128
10	1	1,909788	3,062269	4,466478	10,1939	11,20906	10,46247	6,075335
20	1	1,958477	3,787701	7,851554	14,61376	23,72857	30,3608	23,03363
40	1	1,98204	3,945453	7,69915	15,81869	29,44469	45,21791	60,34754
100	1	1,981105	3,982728	7,975833	15,80974	30,06093	56,76771	94,21774
200	1	1,997965	3,9613	7,999771	15,99284	31,23562	61,27856	113,1413
300	1	1,960663	3,921449	7,901285	15,96402	31,6173	61,43022	121,7141
500	1	1,964194	3,945296	8,030997	15,89963	31,81526	63,34202	119,8513
755	1	1,992247	4,000591	8,042069	16,14077	32,38078	64,42263	127,8963

На рисунке 5 представлены графики, иллюстрирующие данные из таблиц 1 и 2.

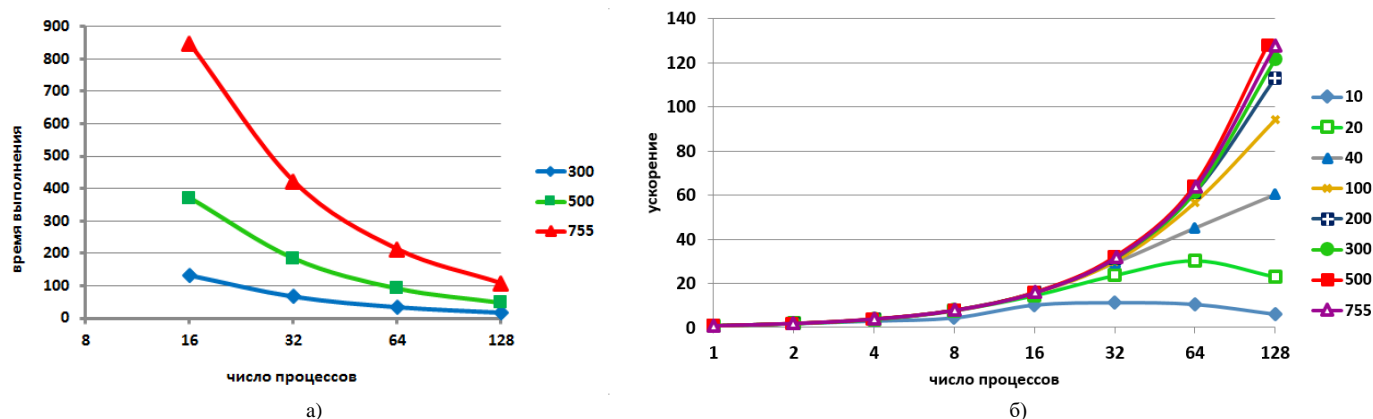


Рис. 6. Графики зависимости а) времени и б) ускорения работы алгоритма от числа процессов.

Как и ожидалось, ускорение, достигаемое при использовании предложенного параллельного алгоритма, увеличивается с ростом размера вычисляемой матрицы несходства сигналов, причем при вычислении полной матрицы ускорение оказывается почти линейным.

Таким образом, в результате применения разработанного алгоритма и запуска его на 128 процессах суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова удалось сократить время вычисления одной полной

матрицы несходства фрагментов электроэнцефалограмм удалось сократить в 127,89 раз: с 3,8 часов до 1,78 минут, а общее время вычисления всех 198 матриц - с 29 суток до 3,5 часов.

5. Заключение

В данной работе предложен высокопроизводительный алгоритм вычисления матрицы несходства сигналов, представляющих фрагменты электроэнцефалограмм головного мозга. Предложенный алгоритм реализован на языке C++ с применением технологии MPI и протестирован с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова [23]. Результаты исследования на реальных данных показали, что предложенный метод позволяет достичь почти линейного ускорения и при использовании 128 процессов сократить общее время вычислений с 29 суток до 3,5 часов, что открывает возможности повышения качества автоматического анализа электроэнцефалограмм.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Грант 15-07-08967.

Авторы выражают благодарность ректору МГУ Садовничему Виктору Антоновичу, а также НИВЦ МГУ за предоставление возможности проведения вычислительных экспериментов на суперкомпьютерном комплексе МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

- [1] Зенков, Л.Р. Клиническая электроэнцефалография (с элементами эпилептологии) / Л.Р. Зенков, К.С. Зенков. — 3-е изд. — Москва: Изд-во МЕДпресс-информ, 2004. — 368 с. ISBN 5-901712-21-8
- [2] Teplan, M. FundamentalsofEEGmeasurement. MeasurementScienceReview2002. 2(2), pp. 1-11.
- [3] Wolpaw, J.R.AnEEG-based brain-computer interface for cursor control. Electroencephalography & Clinical Neurophysiology/J.R. Wolpaw, D.J.McFarland, G.W.Neat, C.A.Forneris Vol 78(3), Mar 1991, 252—259
- [4] Tran, L. EEG Features for the Detection of Event-Related Potentials Evoked Using Rapid Serial Visual Presentation 2014. PhD Thesis. 63 p.
- [5] Hope, C.High Throughput Screening for Mammography using a Human-Computer Interface with Rapid Serial Visual Presentation (RSVP) /C.Hope, A. Sterr,P.E. Langovan, N.Geades, D.Windridge, K.Young, K.Wells - Proc. SPIE 8673, Medical Imaging 2013: Image Perception, Observer Performance, and Technology Assessment, 867303 (March 28, 2013); doi:10.1117/12.2007557
- [6] Sakoe, H.Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing/H. Sakoe, S. Chiba., 26(1):43{49, 1978}.
- [7] Berndt, D. J.Using dynamic time warping to find patterns in time series / D. J. Berndt & J. Clifford. (1994), in 'Association for the Advancement of Artificial Intelligence, Workshop on Knowledge Discovery in Databases (AAAI)', pp. 229–248.
- [8] Keogh, E.Scaling up dynamic time warping for datamining applications/E. Keogh & M. Pazzani. (2000), in 'Proceedings of the sixth ACM SIGKDD intern. conf. on Knowledge discovery and data mining (KDD)', ACM Press, New York, NY, USA, pp. 285–289.
- [9] Vapnik ,V. Statistical Learning Theory. John-Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [10] Tatarchuk,A.Supervised Selective Kernel Fusion for Membrane Protein Prediction. M. Comin et al. (Eds.): PRIB /A. Tatarchuk, V. Sulimova, V. Mottl, D.Windridge. Lecture Notes in Computer Science Volume 8626, 2014, pp.98-109.
- [11] Myers, C. 'Performance tradeoffs in dynamic time warping algorithms for isolated word recognition' / C. Myers, L. R. Rabiner& A. E. Rosenberg, (1980), IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing 28(6), 623 – 635.
- [12] Keogh, E. 'Exact indexing of dynamic time warping' / E. Keogh &C. Ratanamahatana, (2004), Knowledge and Information Systems (KIS) 7(3), 358–386.
- [13] Lemire, D. 'Faster retrieval with a two-pass dynamic-time-warping lower bound', (2009), Pattern Recogn. 42(9), 2169–2180.
- [14] Salvador, S. Toward accurate dynamic time wrapping in linear time and space / S. Salvador, P. Chan. Intelligent Data Analysis, 11(5):561-580, 2007
- [15] Al-Naymat, G. SparseDTW: A Novel Approach to Speed up Dynamic Time Warping/ G. Al-Naymat, S. Chawla, & J. Taheri, (2012), 2012
- [16] Silva, D.F. Speeding up all-pairwise dynamic time warping matrix calculation / D.F. Silva,&Batista, G.E.A.P.A. (2016). - website. <http://sites.labicc.icmc.usp.br/prunedDTW>
- [17] Lamport, L. The parallel execution of DO loops// Commun. ACM.- 1974.- v.17, N 2, p. 83-93.
- [18] Бабичев, А.В.Распараллеливание программных циклов/ А.В. Бабичев, В.Г.Лебедев./ Программирование// 1983, N 5, с. 52-63.
- [19] Fernandez, A. Loop Transformation Using Nonunimodal Matrices/ A. Fernandez, J. M. Llaberia, M. Valero-Garcia Loop Transformation Using Nonunimodal Matrices // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1995, vol. 6, № 8, pp.832-840.
- [20] Абу-Халил, Ж.М. Параллельный алгоритм глобального выравнивания с оптимальным использованием памяти / Ж. М. Абу-Халил, Р. И. Морылев, Б.Я. Штейнберг // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 1; URL: <http://www.science-education.ru/107-8139>
- [21] Штейнберг, Б.Я. Оптимизация использования кэш памяти в вычислительных задачах и оптимизирующей компиляции // Всероссийская научная конференция по проблемам информатики СПИСОК-2013, 23-26 апреля, 2013, матмех Санкт-Петербургского университета, / г. Санкт- Петербург.
- [22] Антонов, А.С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 71 с.
- [23] Воеводин, Вл.В. Практика суперкомпьютера "Ломоносов"/ Вл.В. Воеводин, С.А. Жуматий, С.И. Соболев, А.С. Антонов, П.А. Брызгалов, Д.А. Никитенко, К.С. Стефанов, Вад.В.Воеводин // Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы", N 7, 2012. С. 36-39.
- [24] Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления /Р. Беллман, Калаба Р. М.:Наука, 1969, 118 с.