Вторые моменты очередей в системах массового обслуживания с групповыми пуассоновскими потоками

Б.Я. Лихтциндер
Поволжский университет телекоммуникаций и информатики,
Самара, Россия
lixt@psuti.ru

В. И. Моисеев
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия.
vim@psu.ru

А.Ю. Привалов
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Самара, Россия
privalov1967@gmail.com

***Аннотация* — Рассматривается применение интервальных методов анализа очередей в системах массового обслуживания с групповыми пуассоновскими потоками. Получены соотношения для вторых моментов размеров очередей в системах массового обслуживания с групповыми пуассоновскими потоками. Показано, что они зависят от третьего центрального момента числа заявок, поступающих в течение интервалов времени обработки одной заявки.**

Ключевые слова — групповые пуассоновские потоки, системы массового обслуживания, вторые моменты, коэффициент загрузки, очереди.

1. Введение

Одной из популярных моделей пакетного трафика, сочетающего в себе простоту анализа, свойственную классическим Пуассоновским моделям и возможность учёта пачечного характера современного пакетного трафика являются неординарные потоки Пуассона. Они являются альтернативой моделям, учитывающим фрактальные свойства потоков, которые, в виду весьма высокой сложности, нашли ограниченное применение на практике. Этапы развития указанных моделей представлены в обзоре [1], а самые популярные их виды рассмотрены в [2, 7-9].

К такого рода моделям относится и неординарный пуассоновский поток событий. В нем выполняются свойства стационарности и отсутствия последействия, но не выполняется свойство ординарности. Такой поток называют пуассоновским неординарным (групповым) потоком независимых событий [5]. Глубокое исследование статистических характеристик таких потоков в системах телекоммуникаций представляется весьма актуальной задачей.

Известно, что среднее значение числа заявок $\mathbf{M}(A(\tau))=\lambda\tau\mathbf{M}(B)$ указанного потока, поступающих в течение некоторого интервала τ, пропорционально длительности этого интервала. Если интервал является временем обработки заявки в СМО, то $\mathbf{M}(A(\tau))=\lambda\tau\mathbf{M}(B)=\rho$. Дисперсия $\mathbf{D}(A(\tau))$ также пропорциональна коэффициенту загрузки ρ:

$$\mathbf{D}(A(\tau)) = \lambda\tau\mathbf{M}(B^2) = \rho\mathbf{M}(B)(1+\nu^2)=E_B\rho$$

Здесь, B – случайная величина, равная размеру пачки (в числе заявок), а $\nu^2=\mathbf{D}(B)/(\mathbf{M}(B))^2$ – квадрат коэффициента вариации чисел заявок в пачках.

Разработанный нами интервальный метод (см., например, [4,6]) будет использоваться и здесь, и позволит относительно просто получить вторые моменты очереди в одноканальной СМО (для группового пуассоновского потока результат обладает научной новизной). Здесь в обобщенной нами формуле Хинчина-Поллачека из [4,6], определяющей среднее значение размера очереди, будет отсутствовать элемент, учитывающий корреляционную зависимость, и формула будет иметь вид:

$$\mathrm{M}(Q)= \mathbf{D}(A(\tau))/(2(1-\rho)) - \rho/2= E_B\,\rho\,/(2(1-\rho)) - \rho/2 \qquad (1)$$

Дисперсия размера пачки и коэффициент загрузки полностью определяют средний размер очереди одноканальной СМО. В частном случае ординарного пуассоновского потока: B=1 (константа), ν^2=0, E_B=1 получается известная формула:

$$\mathrm{M}(Q)= \rho^2/(2(1-\rho)).$$

Практическое значение представленных в докладе формул для первых двух моментов очереди в СМО с групповым пуассоновским потоком состоит в том, что они позволяют гораздо точнее моделировать такими потоками реальный трафик, подбирая распределение размера пачки пакетов, прибывающих одновременно.

2. Второй начальный момент размеров очередей

Найдём второй начальный момент размера очереди $\mathrm{M}(q^2)$, для чего воспользуемся уравнением баланса [4]:

$$Q_i=Q_{i-1} + A_i - \delta_i \qquad (2)$$

где δ_i=0, если $Q_{i-1}= A_i = 0$ и δ_i=1 в противном случае, Q_i - значение очереди на i-м интервале времени обработки одной заявки, A_i - число заявок, поступивших, а δ_i - число заявок, обработанных в течение указанного интервала времени.

Необходимо учитывать, что при заданных ограничениях

$$(\delta_i)^k= \delta_i,\ \ A_i\delta_i=A_i,\ \ Q_{i-1}\delta_i= Q_{i-1}\ \text{ и }\ \mathbf{M}(A_i)=\mathbf{M}(\delta_i) \qquad (3)$$

Возведем обе части уравнения (2) в третью степень, и после некоторых несложных преобразований с учётом принятых ограничений получим:

$$(Q_i)^3=(Q_{i-1})^3 + 3(Q_{i-1})^2A_i - 3(Q_{i-1})^2+3Q_{i-1}((A_i)^2-2A_i+1) + (A_i)^3-$$
$$-3(A_i)^2 + 3A_i - \delta_i.$$

Произведем усреднение обеих частей с учётом стационарного состояния системы при стремлении времени к бесконечности, когда $\mathbf{M}((Q_i)^3) = \mathbf{M}((Q_{i-1}))^3$, и после некоторых преобразований, получим:

$$3\,\mathbf{M}((Q_{i-1})^2)\,(1-\mathbf{M}(A_i)) = 3\,\mathbf{M}(Q_{i-1})\,\mathbf{D}(A_i) +$$
$$+ 3\,\mathbf{M}(Q_{i-1})(1-\mathbf{M}(A_i)\,)^2 + \mathbf{M}((A_i)^3) - 3\mathbf{M}(A_i)^2 + 2\mathbf{M}(A_i).$$

Выразим отсюда $\mathbf{M}((Q_{i-1})^2)$:

$$\mathbf{M}((Q_{i-1})^2) = \mathbf{M}(Q_{i-1})\,(1-\mathbf{M}(A_i))^2 / (1-\mathbf{M}(A_i)) + $$
$$+ (\mathbf{M}((A_i)^3) - 3\mathbf{M}(A_i)^2 + 2\mathbf{M}(A_i))/(3(1-\mathbf{M}(A_i))).$$

В дальнейшем нам удобнее будет пользоваться не начальным третьим моментом $\mathbf{M}((A_i)^3)$, а центральным $\boldsymbol{\mu}_3(A_i)= \mathbf{M}(A_i-\mathbf{M}(A_i))^3$, при этом несложно показать, что

$$\mathbf{M}((A_i)^3) = \boldsymbol{\mu}_3(A_i) + 3\,\mathbf{D}(A_i)\mathbf{M}(A_i) + (\mathbf{M}(A_i))^3,$$

откуда можно получить, что

$$\mathbf{M}((Q_{i-1})^2) = \mathbf{M}(Q_{i-1})\,(1-\mathbf{M}(A_i))^2 / (1-\mathbf{M}(A_i)) +$$
$$+ ((\mathbf{M}(A_i))^3+3\mathbf{D}(A_i)\mathbf{M}(A_i)-3(\mathbf{M}(A_i))^2+2\mathbf{M}(A_i))/(3(1-\mathbf{M}(A_i)))+$$
$$+ \boldsymbol{\mu}_3(A_i) / (3(1-\mathbf{M}(A_i))).$$

При устремлении времени к бесконечности индекс i-1 можно опустить, и воспользовавшись тем, что $\mathbf{M}(A_i)=\rho$, а также (1), после некоторых преобразований, получить:

$$\mathbf{M}(Q^2)=(\mathbf{D}(A(\tau)) - \rho(1-\rho))(\mathbf{D}(A(\tau)) + (1-\rho)^2)/(2(1-\rho)^2) +$$
$$+ (\rho^3+3\mathbf{D}(A(\tau))\rho - 3\mathbf{D}(A(\tau)) - 3\rho^2 + 2\rho)/(3(1-\rho)) +$$
$$+\boldsymbol{\mu}_3(A(\tau)) / (3(1-\rho)).$$

Найти $\boldsymbol{\mu}_3(A(\tau))$ можно методом производящих функций, используя для производящей функции $G_A(z)$ с.в. $A(\tau)$ её очевидное выражение через $G_B(z)$ – производящую функцию размера пачки:

$$G_A(z) = \exp(-\lambda) \sum((G_B(z))^n\lambda^n /n! = \exp(\lambda(G_B(z)-1)).$$

Найдя отсюда выражение трёх первых факториальных моментов $A(\tau)$ через факториальные моменты B, и далее, по известным формулам, подставив их в выражение третьего центрального момента через факториальные, можно получить окончательный результат:

$$\boldsymbol{\mu}_3(A(\tau))= \lambda\tau(\mathbf{M}(B^3).$$

Итак, второй начальный момент размера очереди в СМО с групповыми пуассоновскими потоками определяется соотношением:

$$\mathbf{M}(Q^2)=(E_B\,\rho - \rho(1-\rho))(E_B\,\rho + (1-\rho)^2)/(2(1-\rho)^2) +$$
$$+ (\rho^3+3E_B\,\rho^2 - 3E_B\,\rho - 3\rho^2 + 2\rho)/(3(1-\rho)) +$$
$$+\boldsymbol{\mu}_3(A(\tau)) / (3(1-\rho)). \qquad (4)$$

В частном случае, для простейшего пуассоновского потока, где $E_B=1$, $\boldsymbol{\mu}_3(A(\tau))=\rho$ (т.к. $\mathbf{M}(B^3)=\mathbf{M}(B)=1$), выражение упроститься:

$$\mathbf{M}(Q^2)=(1-\rho/3+\rho^2/3)\,\rho^2/(2(1-\rho)^2).$$

Оно показывает, что второй начальный момент очереди пуассоновского потока определяется исключительно значением коэффициента загрузки.

3. Дисперсия размеров очередей

Дисперсию размеров очередей определим на основании известного соотношения $\mathbf{D}(Q) = \mathbf{M}(Q^2) - (\mathbf{M}(Q))^2$, подставив туда (4) и (2). После некоторых преобразований, получим

$$\mathbf{D}(Q) = (E_B\rho - \rho(1-\rho))(E_B\rho + 2 - 3\rho + \rho^2)/(4(1-\rho)^2) +$$
$$+ (\rho^3+3E_B\,\rho^2 - 3E_B\rho - 3\rho^2 + 2\rho)/(3(1-\rho)) +$$
$$+ \boldsymbol{\mu}_3(A(\tau)) / (3(1-\rho)).$$

В частном случае, для простейшего пуассоновского потока

$$\mathbf{D}(Q)=(1-\rho/3-\rho^2/6)\,\rho^2 /(2(1-\rho)^2).$$

Так же, как и второй начальный момент, дисперсия очереди простейшего потока полностью определяется коэффициентом загрузки.

4. Заключение

Представлены формулы для вторых моментов очереди в одноканальной СМО с групповым пуассоновским потоком на входе.

Дисперсия очередей групповых пуассоновских потоков зависит от третьего центрального момента, который характеризует симметричность закона распределения размеров пачек заявок. Два различных групповых потока, имеющие одинаковые зависимости средних значений очередей от коэффициента загрузки, имеют различные дисперсии очередей, разность которых пропорциональна разности их третьих моментов.

Литература

[1] Вишневский, В.М. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей / В.М. Вишневский, А.Н. Дудин //Автоматика и телемеханика. – 2017. – Т. 8. – С. 3–59.

[2] Neuts, M.F. Versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. – 1979. – Vol. 16(4). – P. 764-779. DOI: https://doi.org/10.2307/3213143.

[3] Дудин, А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А.Н. Дудин, В.И. Клименок – Минск: БГУ, 2000. – 175 с.

[4] Лихтциндер, Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование) // Б.Я. Лихтциндер. – М.: Горячая линия - Телеком, 2018. – 290 с.

[5] Likhttsinder, B. Ya. Models of group Poisson flows in teltcommunicftions traffic control / B.Ya. Likhttsinder, Yu.O. Bakay // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2020. – Т. 28, № 3. – С. 75-89.

[6] Likhttsinder, B. Ya. Queue Analysis for Video Traffic Using the Generalized Interval Method / B. Ya. Likhttsinder, E.V. Kitaeva, A. Yu. Privalov // 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). – 2022. – P. 1–4.

[7] Lakatos, L. Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications / L. Lakatos, L. Szeidl, M. Telek. – Springer Science+Business Media, 2013. – 388 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5317-8.

[8] Klimenok, V.I. Retrial BMAP/PH/N Queueing System with a Threshold-Dependent Inter-Retrial Time Distribution / V. I. Klimenok, A.N. Dudin, V. M. Vishnevsky and O.V. Semenova // Mathematics. – 2022. – Vol.10(2). – P. 269. https://doi.org/10.3390/math10020269

[9] Vishnevsky, V. Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate / V. Vishnevsky, K. Vytovtov, E. Barabanova, O. Semenova // Mathematics. – 2022. – Vol.10(10). – P. 1684. https://doi.org/10.3390/math101016840