Все преобразования Фурье Клиффорда

В.Г. Лабунец[1], В.П. Часовских[1], Н. Остхеймер[2]

[1]*Уральский государственный лесотехнический университет, Сибирский тракт 37, Екатеринбург, Россия, 620100*
[2] *Capricat LLC, Попано Бич, Флорида, США*

Аннотация
Впервые вводится полное множество различных многопараметрических преобразований Фурье-Клиффорда, основанное на перечислении всех мнимых единиц, содержащихся в алгебре Клиффорда. Мнимые единицы сосредоточены на сферах (эллиптических или гиперболических) и зависят от множества параметров (направляющих косинусов). Использование многопараметрических мнимых единиц позволяет сконструировать многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда, применение которых эффективно в OFDM-телекоммуникационных системах. Внутри него строится подкласс НВП со структурой быстрого алгоритма.

Ключевые слова
Преобразования Фурье-Клиффорда, OFDM-телекоммуникационные системы.

1. Введение

Обработка сигналов и изображений, принимающих значения в произвольной алгебре Клиффорда $Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n)$ – одно из перспективных направлений в теории современных телекоммуникационных систем, дальнейшее развитие которого сдерживается отсутствием полного перечня теоретически возможных преобразований Фурье, оперирующих гиперкомплексными числами Клиффорда.

В данной работе мы представляем унифицированный подход к синтезу полного множества подобных преобразований (часто называемых преобразованиями Фурье-Клиффорда) путем перечисления полного множества мнимых единиц $\imath = \sqrt{-1} \in Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n),$ содержащихся в произвольной алгебре Клиффорда. Каждая мнимая единица лежит на сфере (эллиптической или гиперболической) и поэтому зависит от конечного набора параметров – направляющих косинусов $\imath = \imath(\boldsymbol{\theta}) = \imath(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q) = \sqrt{-1}$, где $\boldsymbol{\theta} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q) \in \mathbf{Tor}_q[0, 2\pi] = [0, 2\pi]^q$ - вектор параметров, принадлежащий q-D тору.

Напомним, что обычная классическая мнимая единица $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{C}$ используется в классическом преобразовании Фурье с ядром в виде $\varepsilon_N^{ikn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right).$ В преобразованиях Фурье-Клиффорда вместо мнимой единицы $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{C}$ используется многопараметрическая единица (гиперкомплексное число) со свойством $\imath(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{-1} \in Alg_{p,q,r}^{2^n}$:

$$\varepsilon_N^{\imath(\boldsymbol{\theta})kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \imath(\boldsymbol{\theta})\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right).$$

Преобразование с подобным ядром называется преобразованием Фурье-Клиффорда.

2. Многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда

Пусь $\{I_i\}_{i=1}^n$ – множество из n гипермнимых “родительских” единиц. Мы полагаем, что 1) $I_i^2 = -1$ for $1 \le i \le q,$ 2) $I_i^2 = +1$ for $q+1 \le i \le q+p,$ 3) $I_i^2 = 0$ for $q+p+1 \le i \le \le q+p+r = n$ и 4) $I_i I_k = -I_k I_i$ $(k \ne i)$. Три целых числа (q, p, r) называются сигнатурой набора $\{I_i\}_{i=1}^n.$ Используя его мы введем множество из 2^n “детских” единиц $\mathbf{J^b} := I_1^{b_1} I_2^{b_2} \cdots I_n^{b_n},$ где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbf{B}_2^{\mathbf{n}}.$ Здесь

$\mathbf{B}_2^{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_2 \times ... \times \mathbf{B}_2}_{n}$ – произвольный n-битовый вектор, где $b_i \in \mathbf{B}_2 = \{0,1\}$ и $\mathbf{B}_2^{\mathbf{n}}$ – суть n-D Булев куб. Алгебра Клиффорда $Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n)$ – суть некоммутативная алгебра над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, натянутая на все $\mathbf{J}^{\mathbf{b}} := I_1^{b_1} I_2^{b_2} \cdots I_n^{b_n}$:

$$Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n) := \left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right\}.$$

Обычно при построении преобразований Фурье-Клиффорда в качестве $\sqrt{-1}$ используют те базисные гипермнимые единицы $\imath = I_s$, for которых $I_s^2 = -1$ $(s = 1, 2, ..., p)$. Однако известно, что в алгебре кватернионов $Alg_{p,0,0}^4(\mathbf{R} \mid J_1, J_2)$ кроме базисных гипермнимых единиц J_1, J_2 все чисто векторные кватернионы $xJ_1 + yJ_2 + xJ_3$ с единичной нормой $\left(x^2 + y^2 + z^2 = 1\right)$ являются мнимыми единицами, так как для них $\imath^2 = (xJ_1 + yJ_2 + xJ_3)^2 = -1.$ Все они лежат на классической единичной сфере в трехмерном пространстве и параметризуются углами Эйлера $\imath = \imath(\alpha, \varphi, \theta)$. Новый класс преобразований Фурье-Клиффорда с этими мнимыми единицами был предложен в нашей работе [1], где у каждой дискретной гармоники Клиффорда использовалась своя мнимая единица $\imath_k(\alpha, \varphi, \theta)$:

$$\varepsilon_N^{\imath_k kn} = \varepsilon_N^{\imath_k(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k) kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + \imath_k(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right),$$

где $\imath_k = \imath(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k)$. Этот результат можно распространить на произвольную алгебру $Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n)$. Пусть $\{I_i\}_{i=1}^p$ - набор первых p родительских гипермнимых единиц. Из эти единиц отберем $C_p^2 = p(p-1)/2$ различных пар $\{I_i, I_j\}_{i<j=1}^p$. Используя их, можно построить C_p^2 различных кватернионных алгебр $Alg_{p,q,r}^{4^n}(\mathbf{R} \mid I_i, I_j) \subset Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n)$. Очевидно, что все числа Клиффорда вида $xI_i + yI_j + zI_iI_j \in Alg_{p,q,r}^{2^n}(\mathbf{R} \mid I_1, I_2, ..., I_n)$ с единичной нормой $\left(x^2 + y^2 + z^2 = 1\right)$ являются мнимыми единицами, так как для них $\imath^2 = (xI_i + yI_j + zI_iI_j)^2 = -1,$ которые можно использовать для порождения C_p^2 новых преобразований Фурье Клиффорда.

В качестве второго примера приведем еще один способ получения мнимых единиц в алгебре $Alg_{p,0,0}^4(\mathbf{R} \mid J_1, J_2).$ Для чисел Клиффорда вида $x = (x_1I_1 + x_2I_2 + ... + x_nI_n)$ (чисто векторные Клиффордеоны) мы имеем $|x^2| = |(x_1I_1 + x_2I_2 + ... + x_nI_n)^2| = |x_1^2I_1^2 + x_2^2I_2^2 + ... + x_n^2I_n^2| \geq 0$ – положительное вещественное число. Поэтому, для $\mathring{x} = x / \sqrt{|x^2|}$ мы имеем $(\mathring{x})^2 | \in \{-1, 0, +1\}.$ Те из них, для которых $(\mathring{x})^2 = -1$, могут быть названы мнимыми единицами Клиффорда $\imath = \mathring{x}$. Очевидно, что они лежат на поверхности сферы $(\mathring{x}_1)^2 I_1^2 + (\mathring{x}_2)^2 I_2^2 + ... + (\mathring{x}_1)_n^2 I_n^2 = -1$. Существуют и другие способы построения подобных мнимых единиц Клиффорда, рассмотрению которых посвящена данная работа.

Перспективная область применения – OFDM-телекоммуникационные системы, в которых мы заменяем БПФ на быстрое преобразование Фурье-Клиффорда (БПФК).

3. Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-29-09022.

4. Литература

[1] Labunets, V. Intelligent OFDM Telecommunication Systems Based on Many-Parameter Complex or Quaternion Fourier Transforms / V. Labunets, E. Ostheimer, Z. Hu, S. Petoukhov, M. He // Advances in Intelligent Systems, Computer Science and Digital Economics. – 2020. – Vol. 1127. – P. 129-144.