

# Влияние структуры периода бинарного фазового дифракционного аксикона на распределение в фокальной плоскости

А.В. Устинов<sup>а,б</sup>

<sup>а</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Московское шоссе, 34, Самара, Россия

<sup>б</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, ул. Молодогвардейская, 151, Самара, Россия

## Аннотация

Структура бинарного фазового дифракционного аксикона определяется соотношением ширины полос разной фазы, их положением в пределах периода, значением разности фаз. Ранее был выполнен анализ влияния соотношения ширины полос и показано, что эффективным подходом является разложение функции пропускания решётки в ряд Фурье. В докладе в его рамках исследуется влияние сдвига полос. Доказано, что он эквивалентен изменению соотношения ширины, но более эффективен, так как можно зафиксировать равную ширину полос, при которой мала величина нулевого порядка. Результаты теоретических и численных расчётов согласуются между собой. Таким образом, возможно динамическое изменение вида фокального распределения за счёт сдвига полос в периоде.

**Ключевые слова:** дифракционный аксикон; структура периода решётки; разделение световых колец в фокусе; дифракционные порядки

## 1. Введение

Кольцевая решётка является дифракционным аналогом конического аксикона [1], формирующего протяжённый световой отрезок вдоль оптической оси. Удобство использования кольцевой дифракционной решётки вместо рефракционного конического аксикона состоит в возможности динамического изменения характеристик оптического элемента за счёт изменения структуры периода. Недостатком является потеря эффективности, связанная с перераспределением части энергии в высокие дифракционные порядки [2], которые, тем не менее, не влияют на формирование светового отрезка вдоль оптической оси.

Хотя аксиконы использовались и исследовались задолго до своего официального названия [3], именно во второй половине прошлого века этот оптический элемент вызвал повышенный интерес, связанный с бездифракционными свойствами формируемых им пучков Бесселя [4-9]. Уникальным свойством аксикона является формирование в фокальной плоскости линзы тонкого светового кольца, что используется при лазерном сверлении [10], а также в оптическом захвате и манипулировании микрочастицами [11-13].

Заметим, что распределение в фокальной плоскости кольцевой решётки в основном исследовалось в отношении дифракционных порядков, возникающих при бинаризации микрорельефа оптического элемента [2, 14-17]. В данной работе, продолжающей результаты [18, 19], больше внимания уделяется изменению распределения в первом дифракционном порядке в зависимости от структуры периода. Структура периода бинарной фазовой дифракционной решётки при фиксированном периоде определяется тремя параметрами: соотношением ширины полос разной фазы, их положением в пределах периода, значением разности фаз. При изменении этого соотношения возможно динамическое преобразование двух-кольцевого распределения в однокольцевое. Здесь будет доказано, что такого же результата можно достичь при изменении положения полос.

## 2. Теоретическое исследование и моделирование

Рассмотрим бинарную фазовую круговую решётку с профилем фазы, показанным на рисунке 1. Период решётки равен  $d$ , а радиус будем считать кратным этому числу:  $R=Nd$ . Как было сказано выше, второй параметр, определяющий структуру периода решётки – это сдвиг полос внутри периода. Пусть соотношение ширины полос фиксировано, но полоса с фазой  $\pi$  и шириной  $ad$  начинается не с левого края, а с позиции, равной  $\gamma d$ . ( $a, \gamma$  – коэффициенты, лежащие в пределах от нуля до единицы.)

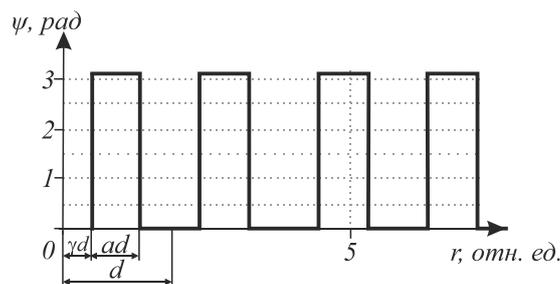


Рис. 1. Профиль фазы бинарной радиальной дифракционной решетки.

Будем считать, что перехода через границу периода нет, то есть на правом краю фаза по-прежнему равна нулю (удобство этого ограничения проявится ниже). Для этого необходимо выполнение условия:

$$a + \gamma \leq 1. \tag{1}$$

Фаза в пределах одного периода выражается формулой

$$\psi(r) = \begin{cases} \pi, \gamma \cdot d \leq r \leq \gamma \cdot d + a \cdot d, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{2}$$

При падении на такую решётку плоской волны амплитуда поля в плоскости фокуса линзы определяется радиально-симметричным преобразованием Фурье:

$$F(\rho) = 1/\lambda f \int_0^R \exp[i\psi(r)] J_0(k\rho r/f) r dr, \tag{3}$$

где  $\lambda$  - длина волны падающего излучения,  $f$  – фокусное расстояние линзы,  $J_0(x)$  - функция Бесселя нулевого порядка, также обозначим  $\omega = k\rho/f$ .

В случае фазы, определяемой формулой (2), интеграл в (3) вычисляется аналитически и результат похож на приведённый в [18, 19]. Анализ этого выражения объясняет многие свойства распределения в плоскости фокуса. Однако, ввиду своей сложности, оно недостаточно пригодно для решения обратной задачи, а его приближение не объясняет структуру максимумов интенсивности, так как в приближённое выражение не зависит от величины  $a$ , хотя изменение этого параметра существенно меняет распределение в фокусе (рис. 2, 3). На этих рисунках приведены расчеты, полученные по формуле (3) численным интегрированием при следующих параметрах  $R=50\lambda$ ,  $f=100\lambda$ , период  $d=2\lambda$ .

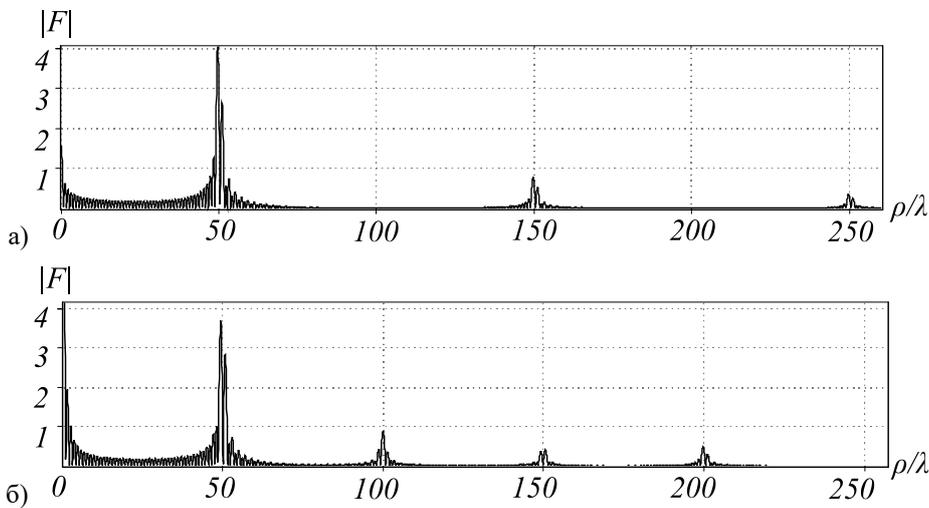


Рис. 2. Радиальное сечение модуля комплексного распределения в фокусе для  $a=0,5$  (а) и  $a=0,6$  (б).

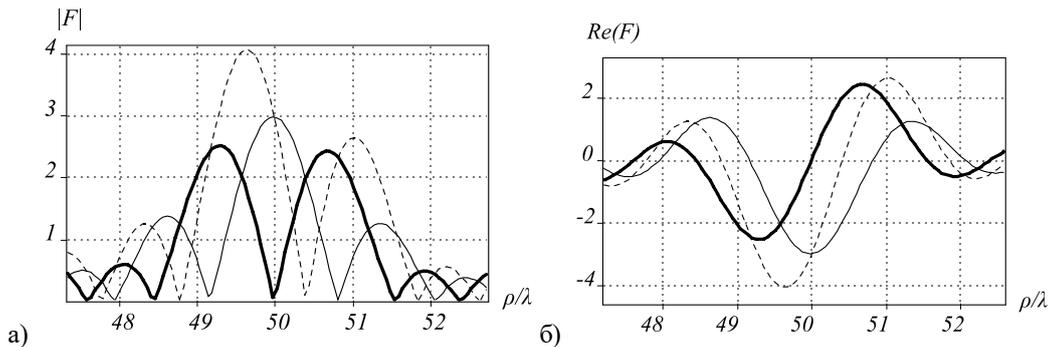


Рис. 3. Радиальное сечение а) модуля и б) действительной части комплексного распределения в окрестности первого дифракционного порядка: для  $a=0,75$  (толстая линия);  $a=0,5$  (пунктирная линия);  $a=0,25$  (тонкая линия).

Наличие раздвоения максимумов и их смещения (см. рис. 3) относительно основной частоты  $\omega_0 = 2\pi/d$  и кратных ей упоминалось в статье [19], где вместо бинарной решётки исследовался радиальный косинус, там же упомянут пример линейного дифракционного аксикона, для которого таких эффектов нет. В [19] были вычислены позиции и величины двух пиков в спектре радиального косинуса в первом дифракционном порядке, но способ расчёта был чисто арифметическим без анализа причин расщепления светового кольца в пространственном спектре.

Объяснить структуру максимума поможет не прямой расчёт по формуле (3), а другой способ: исходную функцию  $f(r) = \exp[i\psi(r)]$  (в нашем случае она действительная) разлагаем в ряд Фурье на периоде  $[0, d]$  и затем выполняем преобразование (3). Это не позволяет точно вычислить  $F(\rho)$ , но даёт возможность объяснить и выразить количественно

упомянутые выше эффекты. Поэтому в данной статье рассматривается только способ с разложением функции пропускания решётки в ряд Фурье.

Для разложения в ряд Фурье используем стандартные формулы для периода  $[x_0, x_0+2L]$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (4)$$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье для решётки с функцией пропускания (2). Неравенство (1) обеспечивает, что в последнем интеграле формул (5-7) нижний предел будет меньше верхнего.

$$a_0 = \frac{2}{d} \cdot \int_0^d f(x) dx = \frac{2}{d} \cdot \left[ \int_0^{\gamma d} (1) dx + \int_{\gamma d}^{\gamma d + ad} (-1) dx + \int_{\gamma d + ad}^d (1) dx \right] = 2(1 - 2a). \quad (5)$$

Эта величина не зависит от  $\gamma$ , что очевидно. Для остальных коэффициентов Фурье приведём конечные результаты, не выписывая разбиения на три интеграла.

$$a_n = \frac{2}{d} \cdot \int_0^d f(x) \cos \frac{2n\pi x}{d} dx = -\frac{2}{\pi n} [\sin 2\pi n(\gamma + a) - \sin 2\pi n\gamma] = -\frac{2}{\pi n} p_n. \quad (6)$$

$$b_n = \frac{2}{d} \cdot \int_0^d f(x) \sin \frac{2n\pi x}{d} dx = -\frac{2}{\pi n} [\cos 2\pi n\gamma - \cos 2\pi n(\gamma + a)] = -\frac{2}{\pi n} q_n. \quad (7)$$

Тогда разложение функции  $f(r) = \exp[i\psi(r)]$  имеет вид:

$$f(r) = (1 - 2a) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ p_n \cos \frac{2\pi nr}{d} + q_n \sin \frac{2\pi nr}{d} \right\} \quad (8)$$

Для анализа поведения пространственного спектра необходимо подставить разложение (8) в (3). Если радиус  $R$  считать бесконечным, то аналитически вычислить интеграл можно, хотя, очевидно, ответ будет выражаться через обобщённые функции. Рассуждения, представленные в статье [20], дают теоретическое объяснение результатов моделирования, по крайней мере, качественное.

На основе теории из [20] можно получить амплитуды левого и правого пиков

$$A_{left} = -0,661p_n + 1,128q_n \quad A_{right} = 1,128p_n - 0,661q_n. \quad (9)$$

В частности, подставив из (6) и (7) значения  $p_n$  и  $q_n$ , получим условие, когда левый пик противоположен правому – это соответствует двум кольцам одинаковой интенсивности. После преобразований получаем равенство

$$tg \pi n(a + 2\gamma) = -1 \quad - \quad a = (m + 3/4) / n - 2\gamma. \quad (10)$$

При первом порядке дифракции ( $n=1$ ) минимальный корень ( $m=0$ ) равен  $a = 3/4 - 2\gamma$ . Если мы хотим, чтобы было  $a=1/2$ , то будет  $\gamma=1/8$ . Такой выбор даёт большую интенсивность кольца, чем полученный в [19]  $\gamma=0$ ,  $a=3/4$ , так как при  $a=1/2$  нулевой коэффициент Фурье (5) равен нулю, соответственно интенсивность в нулевом порядке дифракции очень мала, а в остальных порядках увеличивается.

Найти абсолютные значения пиков, прилегающих к частоте  $2\pi/d$ , а также их позиции, можно с использованием ряда Фурье (8) и подхода, описанного в [19]. Для этого линейную комбинацию синуса и косинуса приведём к косинусу со сдвигом фазы. Слагаемое первого порядка ряда Фурье (используем значения (6) и (7)) равно

$$S_1 = a_1 \cos \frac{2\pi r}{d} + b_1 \sin \frac{2\pi r}{d} = -\frac{4}{\pi} \sin(\pi a) \cos \left( \frac{2\pi r}{d} - \pi(a + 2\gamma) \right). \quad (11)$$

Сравнив его с выражением  $S_1 = -\frac{4}{\pi} \sin(\pi a) \cos \left( \frac{2\pi r}{d} - \pi a \right)$  мы видим, что изменение аргумента в (10) не является частным случаем. Все полученные результаты сохраняют силу при замене параметра  $a$  на  $a+2\gamma$ . В частности, два пика имеют противоположную амплитуду при  $a+2\gamma=3/4$ ; а один пик без смещения будет при  $a+2\gamma=1/4$ .

Таким образом доказано, что сдвиг полос эквивалентен изменению соотношения их ширины, но имеет большую эффективность, так как можно зафиксировать равную ширину полос, при которой величине нулевого порядка очень мала.

Для полноты рассмотрим оставшийся третий параметр структуры периода решётки – разность фаз между соседними полосами. Рассмотрим случай, когда сдвига полос нет, но величина фазы на полосах изменится: нуль останется нулём, а вместо  $\pi$  будет произвольная величина  $\psi_0$ . Таким образом, раскладываемая в ряд Фурье функция уже *не будет действительной*. Коэффициенты Фурье равны следующим значениям:

$$a_0 = \frac{2}{d} \cdot \int_0^d f(x) dx = \frac{2}{d} \cdot \left[ \int_0^{ad} (e^{i\psi_0}) dx + \int_{ad}^d (1) dx \right] = 2(1 - a + ae^{i\psi_0}) \quad (12)$$

$$|a_0|^2 = 4(1 - 4a \sin^2(\psi_0/2) + 4a^2 \sin^2(\psi_0/2))$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n a (1 - e^{i\psi_0}) \quad |a_n|^2 = \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin^2 2\pi n a \cdot 4 \sin^2(\psi_0/2) \quad (13)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n} (1 - \cos 2\pi n a) (1 - e^{i\psi_0}) \quad |b_n|^2 = \frac{1}{\pi^2 n^2} (1 - \cos 2\pi n a)^2 \cdot 4 \sin^2(\psi_0/2) \quad (14)$$

Таким образом, заметно меняется вид только нулевого коэффициента, а остальные приобретают комплексный множитель, который *одинаков* для всех коэффициентов (не зависит от номера) и *не зависит от параметра a*. Поэтому сохраняются в силе все полученные выше выводы для  $\psi_0 = \pi$ , кроме соотношения  $n$ -го и нулевого порядков дифракции. Минимальное значение  $|a_0|^2$  по-прежнему достигается при  $a=1/2$  и равно  $4\cos^2(\psi_0/2)$ .

### 3. Заключение

В работе выполнен анализ влияния сдвига полос бинарной фазовой кольцевой решётки на распределение в фокальной плоскости путём численного моделирования и аналитических вычислений. Ранее уже было проведено исследование влияния соотношения ширины полос. В зависимости его величины существенно меняется структура распределения в фокальной плоскости в области максимума интенсивности. Имеется либо одно кольцо, либо два кольца с различным соотношением амплитуды. Возникло предположение, что сдвиг полос и изменение разности фаз также должны влиять на структуру максимумов.

С учётом проведённых ранее исследований для теоретического рассмотрения был использован только подход с разложением функции пропускания решётки в ряд Фурье. Сравнение аналитических выражений доказало, что сдвиг полос эквивалентен изменению соотношения их ширины, но его использование более эффективно. Это объясняется тем, что мы можем зафиксировать равную ширину полос, что приводит к очень малой величине нулевого порядка.

Также аналитически было показано, что если фазы полос  $0$  и  $\pi$  радиан заменить на  $0$  и произвольное не изменяет структуры распределения в плоскости фокуса, а влияет только на контраст между нулевым и остальными порядками дифракции.

В итоге доказана возможность динамического изменения вида фокального распределения за счёт регулирования структуры периода аксикона.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 16-07-00825, 16-29-11698).

### Литература

- [1] McLeod, J.H. The axicon: a new type of optical element // J. Opt. Soc. Am. - 1954. - Vol.44. - P.592-597.
- [2] Fedotowsky, A. Far Field Diffraction Patterns of Circular Gratings / A. Fedotowsky, K. Lehovc // Appl. Opt. - 1974. - Vol.13(11). - P.2638-2642.
- [3] Jaroszewicz, Z. Axicon – the most important optical element / Z. Jaroszewicz, A. Burvall, A.T. Friberg // Opt. Photonics News. - 2005. - Vol.16(4). - P.34-39.
- [4] Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, Jr., J.H. Eberly // Phys. Rev. Lett. - 1987. - Vol.58. - P.1499-1501.
- [5] Vasara, A. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A.T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. A. - 1989. - Vol.6. - P.1748-1754.
- [6] Khonina, S.N. Bessel-mode formers / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // Proceedings of SPIE 2363, 184-190 (1994)
- [7] Kotlyar, V.V. Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics, 42(6), 1231-1239 (1995)
- [8] Батусов, Ю.А. История зарождения мезооптики / Ю.А. Батусов, Л.М. Сороко // Физика элементарных частиц и атомного ядра. - 2009. - Т.40(2). - С.457-496.
- [9] Хонина, С.Н. Сравнительный анализ распределений интенсивности, формируемых дифракционным аксиконом и дифракционным логарифмическим аксиконом / С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33(2). – С. 162-174.
- [10] Rioux, M. Linear, annular, and radial focusing with axicons and applications to laser machining / M. Rioux, R. Tremblay, P.-A. Belanger // Appl. Opt. - 1978. - Vol.17. - P.1532-1536.
- [11] Khonina, S. N. DOE for optical micromanipulation / S.N. Khonina, R.V. Skidanov, A.A. Almazov, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, A.V. Volkov // Proc. SPIE. - 2004. - Vol.5447. - P.304-311.
- [12] Soifer, V.A. Optical Microparticle Manipulation: Advances and New Possibilities Created by Diffractive Optics / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina // Phys. Part. Nuclei. - 2004. - Vol.35(6). - P.733-766.
- [13] Shao, B. Dynamically adjustable annular laser trapping based on axicons / B. Shao, S.C. Esener, J.M. Nascimento, E.L. Botvinick, M.W. Berns // Appl. Opt. - 2006. - Vol.45. - P.6421-6428.
- [14] Khonina, S.N. Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 1999. – Vol. 46(2). – P. 227-238.
- [15] Хонина, С.Н. Бинарная линза: исследование локальных фокусов / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, Р.В. Скиданов // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 35(3). – С. 339-346.
- [16] Khonina, S.N. Local foci of a parabolic binary diffraction lens / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, R.V. Skidanov, A.P. Porfirev // Applied Optics. – 2015. – Vol. 54(18). – P. 5680-5685.
- [17] Khonina, S.N. Lenses to form a longitudinal distribution matched with special functions / S.N. Khonina, A.V. Ustinov // Optics Communications. – 2015. – V. 341. – P. 114-121.

- [18] Устинов, А.В. Анализ дифракции лазерного излучения на аксиконе с числовой апертурой выше предельной / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38(2). – С. 213-222
- [19] Хонина, С.Н. Пространственно-спектральный анализ бинарных дифракционных оптических элементов, кодированных на основе комплексно-сопряжённого дополнения / С.Н. Хонина, А.В. Устинов // Известия Самарского научного центра РАН. - 2014. - В.16(6). - С.10-18.
- [20] Amidror, I. Fourier spectrum of radially periodic images // J. Opt. Soc. Am. A. - 1997. - Vol.14(4). - P.816-826.